Polinomios ortogonales: historia y aplicaciones[1]

Renato Álvarez-Nodarse

1. Introducción

En este breve artículo vamos a intentar dar una visión de los polinomios ortogonales: entes matemáticos de gran sencillez y con un sinnúmero de aplicaciones tanto en Matemáticas (ecuaciones diferenciales, combinatoria, teoría de números, álgebra computacional, funciones Theta, aproximación racional, teoría de grupos, etc) como en Física o Ingeniería (física cuántica, ecuaciones de Schrödinger, entropías de Shannon, osciladores, compresión de la información, etc).

Aunque no es nuestro objetivo presentar nuevos teoremas, para situarnos en el contexto vamos a comenzar dando una de las definiciones más sencillas de familia de polinomios ortogonales.

Definición: *Dada una sucesión de polinomios $(P_n)_n$ con grado $P_n = n$, diremos que es una sucesión de polinomios ortogonales con respecto a una medida μ si se cumple que: $\int_{\mathbb{R}} P_n(x)P_m(x)d\mu(x) = \delta_{n,m}K_n$, n, $m = 0, 1, 2, \ldots$, donde $\delta_{n,m}$ es el símbolo de Kronecker ($\delta_{n,m} = 1$ si $n = m$ y 0 si $n \neq m$).*

Cuando la medida μ es positiva entonces, $K_n > 0$ para todo n, en cuyo caso se dice que la familia de polinomios es definida positiva, y a $d_n = \sqrt{K_n}$ se le denomina norma del polinomio P_n. Ejemplos de dichas familias son los conocidos polinomios de Jacobi, Laguerre y Hermite que introduciremos en el próximo apartado. Un caso de especial interés es cuando la medida es absolutamente continua, es decir, cuando existe una función continua ρ (no necesariamente positiva) tal que $d\mu(x) = \rho(x)dx$. En este caso la función ρ se denomina función peso.

Para mayor claridad vamos a dividir nuestra exposición en distintos apartados. Comenzaremos dando una breve introducción histórica para a continuación pasar a describir dos de los aspectos más llamativos relacionados con estos objetos matemáticos: el nacimiento de la teoría general y los teoremas de caracterización. También veremos dos grandes subclases de polinomios ortogonales: los $q-$polinomios y los polinomios matriciales. Culminaremos presentando un breve apartado con algunas de las aplicaciones más significativas de los polinomios ortogonales así como la descripción de algunos textos clásicos sobre el tema.

[1]Artículo aparecido en *Bol. Soc. Esp. Mat. Apl.* **18** *(2001), 19–45*

2. Breve introducción histórica

2.1. Las familias clásicas

Los polinomios ortogonales corresponden a una pequeña parte de una gran familia de funciones especiales. Su historia se remonta al siglo XVIII y está estrechamente relacionada con la resolución de problemas de inmediata aplicación práctica. Uno de estos problemas estaba relacionado con la, por entonces reciente, teoría de la gravedad de Newton.

Era bien conocido en el siglo XVIII que la fuerza de atracción entre dos cuerpos podía ser determinada a partir de la *función potencial* $V(x,y,z)$. Además, la misma era fácil de calcular conociendo la distribución de masa –digamos su densidad ρ– en el interior del cuerpo mediante la fórmula:

$$V(x,y,z) = \int\int\int \frac{\rho(\xi,\eta,\zeta)}{r} d\xi d\eta d\zeta, \tag{1}$$

donde $r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}$ y, por tanto, calculando la integral es posible encontrar la función V. Esto, sin embargo, es complicado ya que es necesario conocer a priori la distribución de masa de los cuerpos, la cual es, en general, desconocida. Si a esto unimos el hecho de que el cálculo directo de la integral (1) suele ser muy engorroso –pues se trata de una integral triple que hay que integrar en un volumen acotado pero con forma arbitraria–. Otra posibilidad era resolver la *ecuación del potencial* para puntos exteriores al cuerpo: $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$. Esta noción del potencial y su relación con las fuerzas fue tratado por distintos matemáticos de la talla de Daniel Bernoulli, Euler y Lagrange.


Adrien M. Legendre

Uno de los problemas más atractivos surgidos en esos años fue el de la atracción de un cuerpo por una esfera. Este problema interesó a Adrien–Marie Legendre (1752–1833). Éste, en un artículo de 1782 titulado *Sur l'attraction des sphéroïdes* (aunque publicado en 1785), probó un teorema muy interesante que establece que, si se conoce el valor de la fuerza de atracción de un cuerpo de revolución en un punto exterior situado en su eje, entonces se conoce en todo punto exterior. Así redujo el problema al estudio de la componente radial $P(r,\theta,0)$, cuya expresión es

$$P(r,\theta,0) = \int\int\int \frac{(r-r')\cos\gamma}{(r^2 - 2rr'\cos\gamma + r'^2)^{\frac{3}{2}}} r'^2 \sin\theta' d\theta' d\phi' dr' ,$$

donde $\cos\gamma = \cos\theta\,\cos\theta' + \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\theta'\,\cos\phi'$. Además probó que el integrando de ésta se podía expresar mediante una serie de potencias de $\frac{r'}{r}$ de la forma

$$\frac{1}{r^2}\left\{1+3P_2(\cos\gamma)\frac{r'^2}{r^2}+5P_4(\cos\gamma)\frac{r'^4}{r^4}+\dots\right\}.$$

Las funciones $P_2, P_4, ...$ son funciones racionales enteras –polinomios– de $\cos\gamma$, que hoy se conocen como polinomios de Legendre.

Dos años más tarde en 1784, Legendre dedujo algunas de las propiedades de las funciones $P_{2n}(x)$ como la ortogonalidad:

$$\int_0^1 P_{2n}(x)P_{2m}(x)dx = \delta_{mn}\frac{1}{4m+1},$$

donde δ_{mn} es el símbolo de Kronecker. Había nacido la primera familia de polinomios ortogonales de la historia. En ese mismo trabajo, Legendre probó que los ceros de P_n eran reales, distintos entre sí, simétricos respecto al origen y menores, en valor absoluto que 1. En su cuarto artículo sobre el tema (escrito en 1790, aunque publicado tres años más tarde) introdujo los polinomios de grado impar, así como los hoy llamados polinomios asociados de Legendre $P_n^m(x)$ que se expresan a través de los polinomios P_n de la forma $P_n^{(m)}(x)=(1-x^2)^{\frac{m}{2}}\frac{d^mP_n(x)}{dx^m}$, y que son soluciones de la ecuación de Laplace en coordenadas esféricas tras aplicar el método de separación de variables.

Los polinomios de Legendre fueron considerados también por Pierre–Simon Laplace (1749–1827) quien en 1782 introdujo las funciones esféricas –que están directamente relacionadas con los polinomios de Legendre– y demostró varios resultados relativos a ellas. También es destacable otro resultado publicado en 1826 –*Mémoire sur l'attraction des spheroides* (Corresp. sur l'Ecole Royale Polytech. III, 361–385)– por el francés Olinde Rodrigues (1794–1851). Se trata de una fórmula para expresar los polinomios de Legendre, $P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}$, conocida hoy día como *fórmula de Rodrigues.*

Charles Hermite

La siguiente familia, en orden de aparición, fue la de los polinomios de Hermite H_n llamados así en honor a Charles Hermite (1822–1901) quien los estudió junto con el caso de varias variables en su ensayo *Sur un nouveau développement en série des fonctions* (C. R. Acad. Sci. Paris, I) en 1864 (ver Œuvres, Gauthier-Villars, 1908, Tome II, 293–308), aunque al parecer el primero en considerarlos fue Laplace en 1810 en su *Mécanique céleste* donde los utilizó en problemas de teoría de las probabilidades. En este caso la ortogonalidad se expresa respecto a la función e^{-x^2} soportada en la recta real.

Luego el ruso Pafnuti Lvovich Chebyshev (1821–1894) realizó un estudio detallado de los mismos en 1859 –véase su artículo *Sur le développement des fonctions à une seule variable* (Oeuvres, Tom I, 501-508, Chelsea Pub. Co.)–.


Nicolás Laguerre

La próxima familia, conocida como polinomios de Laguerre L_n^α, deben su nombre a Edmond Nicolás Laguerre (1834–1886). Estos polinomios ya eran parcialmente conocidos por Niels Henrik Abel (1802–1829) y Joseph-Louis Lagrange (1736–1813), aunque es nuevamente Chebyshev el primero en realizar un estudio detallado de los mismos en 1859 en el trabajo antes citado y que continuó el matemático ruso Konstantin Aleksandrovich Posse (1847–1928) en 1873. El caso general para $\alpha > -1$ fue estudiado por Yulian Vasilevich Sojotkin (1842–1827) en 1873, y no es hasta 1879 que Laguerre los introduce –caso particular $\alpha = 0$– cuando estudiaba la integral $\int_x^\infty e^{-x}x^{-1}dx$, mediante su desarrollo en fracciones continuas. En particular, Laguerre, en su memoria *Sur l'intégrale* $\int_x^\infty \frac{e^{-x}dx}{x}$ (Bull. Soc. Math. France, VII, 1879) (ver Œvres, Gauthier-Villars, 1898, 428–437), prueba, entre otras cosas, la relación entre la integral $\int_x^\infty \frac{e^{-x}}{x}dx$, y la fracción continua:

$$\int_x^\infty \frac{e^{-x}}{x}dx = \cfrac{e^{-x}}{x+1-\cfrac{1}{x+3-\cdots}} = e^{-x}\frac{\phi_m(x)}{L_m(x)} \; ,$$

donde los denominadores $L_m(x)$ son las soluciones polinómicas de la ecuación diferencial de Laguerre $xy'' + (x+1)y' - my = 0$, $m = 0, 1, 2, \ldots$, que no son más que los hoy conocidos polinomios clásicos de Laguerre.

En este trabajo Laguerre también demostró que los ceros de los L_n eran reales y simples y además, probó la propiedad de ortogonalidad que satisfacían dichos polinomios:

$$\int_0^\infty e^{-x}L_m(x)L_n(x)dx = \delta_{mn}(n!)^2.$$

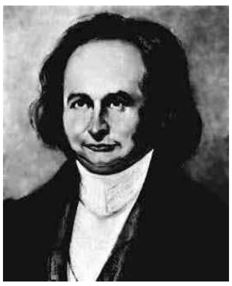
Años más tarde, en 1880, otro estudiante de Chebyshev, Nikolai Yakovlevich Sonin (1849–1915) continúa el estudio comenzado por Sojotkin sobre los polinomios con $\alpha > -1$. Es quizá por ello que que en algunos sitios a los polinomios $L_n^\alpha(x)$ se les denomina polinomios de Laguerre–Sonin.

Antes de pasar a nuestra última familia *clásica* debemos hacer una breve incursión en la teoría de las ecuaciones diferenciales de segundo orden. El estudio de las funciones especiales que surgen como soluciones en serie de ecuaciones diferenciales ordinarias lineales fue desarrollado por Carl Friederich Gauss (1777–1855) en su famoso ensayo de 1813 *Disquisitiones generales* *circa seriem infinitam ...,* (Werke, II (1876), 123-162) sobre funciones hipergeométricas. –las cuales, a su vez, fueron introducidas por Leonhard Euler (1707–1783) en 1769–. En este ensayo Gauss no hizo uso de la ecuación diferencial que sí utilizó más tarde en material inédito –*Disquisitiones generales circa seriem infinitam...,* (Werke, III (1876), 207-229)–. Allí introdujo la ecuación diferencial $x(1-x)y'' + [\gamma - (\alpha+\beta+1)x]y' - \alpha\beta y = 0$, cuya solución es

$$\mathrm{F}(\alpha,\beta;\gamma|x) = 1 + \frac{\alpha\cdot\beta}{1\cdot\gamma}x + \frac{\alpha(\alpha+1)\cdot\beta(\beta+1)}{1\cdot2\cdot\gamma(\gamma+1)}x^2 + \cdots \ . \tag{2}$$

Carl F. Gauss

Gauss reconoció que, para ciertos valores de α, β y γ, la serie incluía, entre otras, casi todas las funciones elementales. Por ejemplo: $(1+z)^a = \mathrm{F}(-a,b;b|-z)$, $\log(1+z) = z\mathrm{F}(1,1;2|-z)$, etc. También Gauss estableció la convergencia de la serie e introdujo la notación $\mathrm{F}(a,b\,;c|x)$ que convive todavía con la notación moderna ${}_2\mathrm{F}_1\left(\begin{smallmatrix} a,b \\ c\end{smallmatrix}\middle| x\right)$. Otro trabajo importante de Gauss fue su *Methodus nova integrali um valores per approximationen inveniendi*, (Werke III, 163–196) donde demuestra una fórmula de cuadraturas para el cálculo aproximado (y eficiente) de integrales que constituye una de las aplicaciones más importantes de los polinomios ortogonales. En concreto, Gauss "recuperó" los ceros de los polinomios de Legendre cuando buscaba dónde deberían estar los del polinomio de interpolación (de Lagrange) para obtener la mayor precisión posible al integrar entre 0 y 1, aunque no utilizó la ortogonalidad de los polinomios (hecho que probablemente desconocía) sino la función hipergeométrica ${}_2F_1$. La construcción de la fórmula de cuadraturas, tal y como la conocemos hoy usando la ortogonalidad, se debe a nuestro próximo personaje, Karl Gustav Jacob Jacobi –*Uever Gauss' neve Methode die werthe der Integrale näherungsweise zu finden* J. Reine Angew. Math., **1** (1826) 301-308– (1804–1851), otro de los grandes matemáticos del siglo XIX.



Karl Jacobi

Jacobi fue uno de los más grandes matemáticos del siglo XIX y no sólo por sus aportaciones puramente teóricas, sino por su interés por resolver díficiles problemas de inmediata aplicación práctica –las famosas ecuaciones de Hamilton y Jacobi de la Mecánica, o sus trabajos en Mecánica de Fluidos, por ejemplo–. Es notable su célebre frase: "*El señor Fourier opina que la finalidad de las matemáticas consiste en su utilidad pública y en la explicación de los fenómenos naturales; pero un filósofo como él debería haber sabido que la finalidad única de la ciencia es rendir honor al espíritu humano y que, por ello,* *una cuestión de números vale tanto como una cuestión sobre el sistema del mundo*, que quizá dió comienzo a esa absurda batalla de hoy día sobre la prioridad de la Matemática "platónica" basada en la idea de que *la Matemática debe ser independiente de toda utilidad inmediata* de la Matemática aplicada de Fourier.

Fiel a esa idea platónica, Jacobi introduce una nueva familia que generaliza los polinomios de Legendre a partir de la función hipergeométrica de Gauss, sin importarle sus posibles aplicaciones –recordemos que las familias anteriores habían aparecido de uno u otro modo relacionadas con aplicaciones físicas o matemáticas–. Así, en su artículo póstumo de 1859, *Untersunshungen über die Differentialgleichung de hypergeometrischen Reihe* (J. Reine Angew. Math. **56** 149–165), definió la familia de polinomios

$$P_n^{\alpha,\beta}(x) = \frac{\Gamma(n+\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)n!}\,{}_2\mathrm{F}_1\left(\begin{array}{c} -n, n+\alpha+\beta+1 \\ \alpha+1 \end{array}\middle| \frac{1-x}{2}\right),$$

para la que demostró, entre otras, una propiedad de ortogonalidad en el intervalo $[-1,1]$ con respecto a la función peso $\rho(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$, $\alpha > -1$, $\beta > -1$, o sea,

$$\int_{-1}^{1} P_n^{\alpha,\beta}(x)P_m^{\alpha,\beta}(x)\,\rho(x)dx = \delta_{mn}\frac{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{(2n+\alpha+\beta+1)\Gamma(n+\alpha+\beta+1)n!},$$

donde $\Gamma(x)$ denota la función Gamma de Euler. Es fácil comprobar (ver, por ejemplo, [12, 40, 42]) que tanto los polinomios de Laguerre como los de Hermite también se pueden escribir como una función hipergeométrica no de Gauss, sino de las funciones hipergeométricas generalizadas ${}_p\mathrm{F}_q$.

Para culminar este apartado mencionaremos que una generalización de la serie hipergeométrica de Gauss (2) fue realizada por Eduard Heine (1821–1881) en 1846–1847. En sus ensayos *Über die Reihe...* (J. Reine Angew. Math. **32** (1846), 210-212) y *Untersuchungen über die Reihe...* (J. Reine Angew. Math. **34** (1847), 285-328), Heine introduce la serie

$$1 + \frac{(1-q^\alpha)(1-q^\beta)}{(1-q)(1-q^\gamma)}z + \frac{(1-q^\alpha)(1-q^{\alpha+1})(1-q^\beta)(1-q^{\beta+1})}{(1-q)(1-q^2)(1-q^\gamma)(1-q^{\gamma+1})}z^2 + \cdots,$$

que obviamente se transforma en (2) cuando $q \to 1$ y se conoce como la serie de Heine ${}_2\varphi_1$. Generalizaciones de la serie de Heine han servido para introducir y estudiar otras familias de polinomios: los q-polinomios a los que nos referiremos más adelante.

2.2. Las familias clásicas discretas

Además de las familias anteriores, conocidas como familias clásicas continuas (ya que satisfacen una ecuación diferencial), existen otras denominadas comúnmente familias "discretas" ya que su ortogonalidad viene dada mediante sumas, o bien son solución de una ecuación en diferencias. El caso más sencillo lo constituyen los polinomios de Chebyshev discretos introducidos por Chebyshev en 1858 en un breve trabajo titulado *Sur une nouvelle série* (Oeuvres, Tom I, 381–384, Chelsea Pub. Co.), y que luego amplió en su ensayo *Sur l'interpolation des valeurs équidistantes* (Oeuvres, Tom II, 219–242, Chelsea Pub. Co.) de 1875, cuyo principal objetivo era construir buenas tablas de fuego para la artillería rusa. Siguiendo las ideas expuestas por Chebyshev, M. P. Kravchuk introdujo en 1929 una nueva familia: los polinomios de Kravchuk. La idea es la siguiente: interpolar una función cuando a los valores dados de la función se les asignan unos *pesos* de acuerdo con alguna ley determinada de probabilidad. En otras palabras, sean $x_0, x_1, \ldots, x_N$ diferentes valores de la variable independiente de una función $f(x)$ y sean $y_0, y_1, ..., y_N$ los correspondientes valores de la función. Se quiere encontrar los coeficientes A_m del desarrollo $y \approx A_0 P_0(x) + \ldots + A_k P_k(x), \quad (k < N)$ determinados por la condición

$$\sum_{i=0}^{N-1} \rho(x_i)[y_i - A_0 P_0(x_i) - \cdots - A_k P_k(x_i)]^2 = \text{ mínimo}, \quad x_{i+1} = x_i + 1,$$

y donde P_m es un polinomio de grado m determinado por la condición de ortogonalidad y normalización (polinomios ortonormales)

$$\sum_{i=0}^{N-1} \rho(x_i) P_k(x_i) P_m(x_i) = \begin{cases} 0 & k < m \\ 1 & k = m \end{cases}, \quad \rho(x_i) > 0, \quad \sum_{i=0}^{N-1} \rho(x_i) = 1. \quad (3)$$

En el caso $\rho(x) = 1$, $x = 0, 1, \ldots N-1$ (distribución uniforme), este problema conduce a los polinomios discretos de Chebyshev, mientras que el caso $\rho(x) = \frac{(n-1)(n-2)\cdots(n-x)}{1\cdot 2\cdots x} p^x q^{n-1-x}$, $x = 0, 1, 2, \ldots, N-1$ (distribución binomial) conduce a los polinomios de Kravchuk. Otros casos corresponden a las distribuciones de Poisson $\rho(x) = \frac{\mu^x}{x!}$, $x = 0, 1, 2, \ldots$ (polinomios de Charlier), de Pascal $\rho(x) = \frac{\mu^x}{\Gamma(\gamma+x)x!}$, $x = 0, 1, 2, \ldots$ (polinomios de Meixner) y de Pólya o hipergeométrica $\rho(x) = \frac{\Gamma(N+\alpha-x)\Gamma(\beta+x+1)}{\Gamma(N-x)x!}$, $x = 1, 2, \ldots, N-1$ (polinomios de Hahn, de los cuales los de Chebyshev son un caso particular). Estas cuatro familias constituyen lo que hoy conocemos como polinomios clásicos discretos.

Aunque el método descrito nos permite obtener todas las familias de polinomios discretos no todas se descubrieron de esa manera. Como ejemplo mostraremos como aparecieron los polinomios de Meixner a partir de las funciones generatrices, muy útiles en la teoría de probabilidades. Por *función generatriz* de la sucesión de polinomios $(P_n)_n$ se entiende una función $\mathcal{F}$ de dos variables que se puede representar mediante una serie formal infinita de la forma $\mathcal{F}(x, w) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x) w^n$, donde la sucesión $(a_n)_n$ es conocida.

J. Meixner, en un artículo publicado en el J. London Math. Soc. (vol **9** pp. 6-13) en 1934, consideró el problema de la determinación de todos los sistemas de polinomios ortogonales cuyas funciones generatrices tuvieran la forma $A(w)e^{xG(w)} = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)w^n$, $A(w) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n w^n$, y $G(w) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n w^n$, donde $a_0 \neq 0$, $g_1 \neq 0$ y f_n son polinomios de grado n con coeficientes principales y $(n!)^{-1}a_0 g_1^n$ –el coeficiente principal de un polinomio es el coeficiente de la mayor potencia del mismo, o sea, a_n si $p_n(x) = a_n x^n + \cdots$–. Meixner probó que a la sucesión $(P_n)_n$ le corresponde una función generatriz anterior si y sólo si los polinomios $(P_n)_n$ satisfacen una relación de recurrencia de la forma $P_{n+1}(x) = [x-(dn+f)]P_n(x) - n(gn+h)P_{n-1}(x)$, $n \neq 0$, donde $g \neq 0$, $g+h > 0$. Además demostró que existían cinco clases distintas de polinomios ortogonales con una función generatriz definida como antes, tres conocidas: los polinomios de Hermite, los polinomios de Laguerre y los polinomios de Charlier –introducidos inicialmente por C.V.L. Charlier en 1905–1906 en su artículo en el Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik. (vol. **2**(20) pag. 35) al estudiar ciertos problemas relacionados con mediciones astrónomicas–, y dos nuevas: los ya mencionados polinomios de Meixner y los polinomios de Meixner de segunda especie, ortogonales respecto a una función peso compleja.

3. Teoría general. Stieltjes y Chebyshev

Como hemos visto en la sección anterior, los polinomios ortogonales están estrechamente relacionados con las ecuaciones diferenciales y teoría de aproximación (en particular por su relación con las fracciones continuas). Esta conexión, y en especial la segunda, conducen al nacimiento, en la segunda mitad del siglo XIX, de la teoría general sobre polinomios ortogonales.

Veamos, en primer lugar, la relación entre los polinomios ortogonales y la teoría de las fracciones continuas. Comenzaremos con los trabajos de Thomas Jan Stieltjes Jr. (1856–1894). Stieltjes, en su famoso ensayo *Recherches sur les fractions continues* (Ann. Fac. Sci. Univ. Toulouse, **8** (1894) 1-122, **9** (1895) 1-47) publicado póstumamente en dos partes en 1894 y 1895, desarrolló la teoría general de las S-fracciones definidas por

$$\cfrac{1}{c_1 z + \cfrac{1}{c_2 + \cfrac{1}{c_3 z + \cdots \cfrac{1}{c_{2n} + \cfrac{1}{c_{2n+1} z + \ddots}}}}},$$

con la condición $c_k > 0$ $(k = 1, 2, ...)$. Stieltjes probó que haciendo el cambio $a_0^2 = 1/c_1, b_0 = -1/(c_1 c_2)$ y $a_n^2 = 1/(c_{2n-1}c_{2n}^2 c_{2n+1})$, $b_n = -1/(c_{2n}c_{2n+1}) -$

$1/(c_{2n+1}c_{2n+2})$, $n = 1, 2, \ldots$, esta fracción se transformaba en una de las fracciones continuas de Jacobi y, además, que si $a_k = 0$, para todo $k \geq n+1$, entonces la expresión anterior se transformaba en una función racional $f_n(z)$ de la forma $f_n(z) = \frac{1}{a_1}\frac{p^{(1)}_{n-1}(z)}{p_n(z)}$, donde los polinomios denominadores $p_n(z)$ y los numeradores $p^{(1)}_{n-1}(z)$ son soluciones de la relación de recurrencia a tres términos

$$zr_n(z) = a_{n+1}r_{n+1}(z) + b_n r_n(z) + a_n r_{n-1}(z), \quad n \geq 0 \ ,$$

con las condiciones iniciales:

$$r_{-1}(z) = 0, r_0(z) = 1 \quad \text{y} \quad r_{-1}(z) = 1, r_0(z) = 0,$$

respectivamente. A partir de la relación de recurrencia y para el caso de las J-fracciones, Stieltjes demostró que existía un funcional $\mathcal{L}$, lineal y positivo, tal que, $\mathcal{L}(p_n p_m) = 0$ para $n \neq m$, lo cual se puede interpretar como una versión primitiva del famoso teorema de Favard demostrado antes por O. Perron (1929), A. Wintner (1929) y M. H. Stone (1932), J. Sherman (1935) y I. P. Natanson (1935) indistintamente que asegura lo siguiente:

Thomas Stieltjes

Teorema: (Favard 1935 [20]) *Supongamos que una sucesión de polinomios* $(p_n)_n$ *satisface una relación de recurrencia a tres términos de la forma:*

$$zp_n(z) = a_{n+1}p_{n+1}(z) + b_n p_n(z) + a_n p_{n-1}(z), \quad n \geq 0 \ ,$$

con $a_{k+1} > 0$ *y* $b_k \in \mathbb{R}$ $(k = 0, 1, 2, ...)$ *y las condiciones iniciales* $p_{-1}(z) = 0$ *y* $p_0(z) = 1$. *Entonces, dichos polinomios* p_n *son ortonormales en* $L^2(\alpha)$, *siendo* α *cierta medida positiva sobre la recta real, o sea, existe una función real no decreciente* α *con un número infinito de puntos de crecimiento efectivo tal que, para todo* $n, m = 0, 1, 2, ...$ *se tiene que:*

$$\int_{-\infty}^{\infty} p_n(x)p_m(x)d\alpha(x) = \delta_{mn},$$

donde, como antes, δ_{mn} *es el símbolo de Kronecker.*

Además demostró que tales polinomios tenían ceros con unas propiedades muy interesantes: todos eran reales y simples, y los ceros de p_n entrelazaban con los ceros de $p^{(1)}_{n-1}$ y con los de p_{n-1}.

El *Recherches* de Stieltjes no sólo constituyó un trabajo esencial en la teoría de fraciones continuas sino que representó el primer trabajo dedicado a la naciente teoría general de polinomios ortogonales. Además de ello, en él Stieltjes introduce lo que se conoce actualmente como problema de momentos (dada una sucesión $(\mu_n)_n$, encontrar una medida $\mu(x)$ tal que $\mu_k = \int x^n d\mu(x)$) así como una extensión de la integral de Riemann –la integral de Riemann-Stieltjes– que le permitió un tratamiento más general de la ortogonalidad.

Además de los trabajos de Stieltjes debemos destacar también los del matemático ruso Pafnuti Lvovich Chebyshev. Chebyshev estudió un ingente número de problemas relacionados con los polinomios ortogonales – ya comentamos sus trabajos donde estudia los polinomios de Hermite y Laguerre y la introducción de la primera familia discreta–, llegando a ellos al tratar de resolver problemas aplicados. Por ejemplo, sus investigaciones en 1854 sobre algunos mecanismos que transformaban la energía de rotación en energía de traslación le llevaron al problema de mejor aproximación. Así, en su memoria *Théorie des mécanismes connus sous le nom de parallélogrammes* (Oeuvres, Tomo I, Chelsea Pub. Co. 111-145), Chebyshev planteó el problema de encontrar la mejor aproximación polinómica uniforme de una función continua f, o sea, dada la función continua f definida en cierto intervalo (a,b), encontrar dentro del conjunto $\mathbb{P}_n$ de todos los polinomios de grado a lo sumo n el polinomio p_n de grado n tal que el máximo de $|f(x) - p_n(x)|$ sea mínimo en dicho intervalo. De esa manera introdujo los hoy conocidos *polinomios de Chebyshev de primera especie* $T_n(x)$ que son la solución al problema extremal de encontrar los polinomios mónicos $p_n(x) = x^n + \cdots$ tales que $\max|p_n(x)|$ en el intervalo $[-1,1]$ sea mínimo, encontrando la solución

Pafnuti Chebyshev

$$\min_{p_n\in\mathbb{P}_n} \max_{x\in[-1,1]} |p_n(x)| = \frac{1}{2^{n-1}}, \quad p_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}}T_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}}\cos(n \arccos x).$$

Estos polinomios forman un sistema ortogonal con respecto a la función peso $\rho(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$ y coinciden con los polinomios de Jacobi $P_n^{-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}}$.

Debemos destacar que Chebyshev obtuvo numerosos resultados sobre los polinomios ortogonales. En 1859, desde diferentes consideraciones, estudió otros sistemas de polinomios ortogonales como los de Hermite y Laguerre. Sin embargo, él no los introdujo a partir de la relación de ortogonalidad sino a partir del desarrollo en serie de potencias para las fracciones continuas de la forma $\int_a^b \frac{\rho(x)dx}{z-x}$. Chebyshev también estudió el problema de momentos y fórmulas de cuadratura e introdujo la primera familia de polinomios *discretos*: los ya mencionados polinomios discretos de Chebyshev.

Por estas razones, tanto a Stieltjes como a Chebyshev se les considera los padres de la teoría de polinomios ortogonales que estaba por llegar a principios del siglo XX, y que se consolidó en 1939 con la aparición de la monografía *Orthogonal Polynomials* de Gabor Szegő [42]. En esta excelente monografía, aparte de presentar una teoría general sobre polinomios ortogonales, se incluyen gran cantidad de resultados sobre las familias clásicas y se inicia la teoría de Szegő de polinomios sobre la circunferencia unidad.

4. Los teoremas de caracterización

Consideremos ahora uno de los problemas más importantes en la teoría de los polinomios ortogonales: los teoremas que nos indican cuáles son las principales propiedades que los caracterizan. En el apartado anterior nos encontramos con uno de los resultados más generales: El Teorema de Favard. Aquí trataremos los teoremas de caracterización relacionados con las familias clásicas.

La primera caracterización que consideraremos fue obtenida por S. Bochner [13] quien probó que los únicos polinomios ortogonales que satisfacían una ecuación diferencial del tipo:

$$\sigma(x)\frac{d^2}{dx^2}P_n(x)+\tau(x)\frac{d}{dx}P_n(x)+\lambda_n P_n(x)=0\,, \tag{4}$$

donde σ y τ son polinomios de grado a lo sumo 2 y exactamente 1, respectivamente, y λ_n es una constante, eran los polinomios clásicos, o sea, los polinomios de Jacobi ($\sigma(x)=(1-x^2)$), Laguerre ($\sigma(x)=x$) y Hermite ($\sigma(x)=1$) –estas tres familias de polinomios son ortogonales con respecto a una función peso definida en $\mathbb{R}$ (ver Tabla 1)– y, aparentemente, una nueva familia cuando $\sigma(x)=x^2$. Estos últimos, denominados polinomios de Bessel, a diferencia de las tres familias anteriores no corresponden a un caso definido positivo, es decir la medida de ortogonalidad no es positiva. Aunque estos polinomios habían sido considerados por muchos matemáticos (e.g. Burchnall y Chaundy en 1931 [14]), fueron H. L. Krall y O. Frink quienes los presentaron formalmente en 1949 en su artículo *A new class of orthogonal polynomials* (Trans. Amer. Math. Soc. **65**) [33] y les dieron el nombre por su relación con las funciones de Bessel. En ese magnífico trabajo estudiaron un sinnúmero de propiedades y probaron la ortogonalidad respecto a una función peso en la circunferencia unidad $\mathbb{T}$. Sin embargo no encontraron ninguna función "peso" (necesariamente signada) sobre la recta real. El problema fue finalmente resuelto por A. Durán en 1990 en [17] donde se desarrolla un método general para encontrar explícitamente funciones muy regulares con momentos dados; como aplicación encontró las primeras medidas signadas sobre $\mathbb{R}$ y $(0,+\infty)$ respecto a las cuales los polinomios de Bessel eran ortogonales.

Otra caracterización, la más antigua, se debe a Sonin quien, en 1887, probó que los únicos polinomios ortogonales que satisfacían la propiedad de

Cuadro 1: Los polinomios ortogonales clásicos.

SPO	función P_n $\sigma(x)$	función peso	Intervalo de ortogonalidad
Laguerre	$\sigma(x) = x$	$x^\alpha e^{-x}$	$[0, \infty)$
Hermite	$\sigma(x) = 1$	e^{-x^2}	$(-\infty, \infty)$
Jacobi	$\sigma(x) = 1 - x^2$	$(1-x)^\alpha (1+x)^\beta$	$[-1, 1]$
Bessel	$\sigma(x) = x^2$	$2^{\alpha+1} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-2)^m}{\Gamma(m+\alpha+1) z^m}$	$\mathbb{T}$

que sus derivadas P_n' también eran ortogonales eran los polinomios de Jacobi, Laguerre y Hermite. Esta propiedad fue redescubierta W. Hahn en 1935 quien también recuperó los polinomios de Bessel no considerados por Sonin –el caso Bessel también fue estudiado por H.L.Krall [31]–. Dos años más tarde, el mismo Hahn probó un resultado más general que contenía al anterior: si la sucesión de polinomios ortogonales $(P_n)_n$ era tal que la sucesión de sus $k-$ésimas derivadas $(P_n^{(k)})_n$, para cierto $k \in \mathbb{N}$, también era ortogonal, entonces $(P_n)_n$ era alguna de las sucesiones de polinomios ortogonales clásicos.

La tercera caracterización fue propuesta por F. Tricomi [43] quien conjeturó y parcialmente demostró (para más detalle ver [1, 12]) que sólo los polinomios ortogonales clásicos se podían expresar en términos de una fórmula tipo Rodrigues:

$$P_n(x) = \frac{B_n}{\rho(x)} \frac{d^n}{dx^n} [\rho(x)\sigma^n(x)], \quad n = 0, 1, 2, \dots , \tag{5}$$

donde ρ es una función no negativa en cierto intervalo y σ es un polinomio independiente de n. La demostración rigurosa de este resultado fue dada por Cryer en 1969 [15], aunque ya E. H. Hildebrandt en 1931 [27] tenía varios resultados en esa dirección. Otra caracterización consiste en que los únicos polinomios ortogonales respecto a una función peso ρ solución de la ecuación diferencial de Pearson

$$[\rho(x)\sigma(x)]' = \tau(x)\rho(x), \quad \text{grado } \sigma \leq 2, \text{ grado } \tau = 1 ,$$

eran los clásicos (Jacobi, Laguerre y Hermite), que fue probada por Hildebrandt en 1931 [27]. El caso discreto fue considerado por primera vez también por E. H. Hildebrandt [27] en 1931 y fue resuelto completamente por P. Lesky [34] en 1962. Precisamente esta última caracterización traducida al espacio dual de los funcionales permitió a F. Marcellán y sus colaboradores obtener una forma unificada de probar todas las caracterizaciones así como varias completamente nuevas, no sólo para los polinomios clásicos [36], sino para el caso "discreto" [21] (Hahn, Meixner, etc.). Una revisión de los teoremas de caracterización la podemos encontrar en diversos trabajos, por ejemplo, en [1, 10, 12, 36]).

Una extensión de los polinomios clásicos se debe a H.L. Krall quien, en 1938, estudió el problema de la determinación de soluciones polinómicas de una ecuación diferencial de orden $2n$ ($n = 1$ conduce a los polinomios clásicos como ya vimos), encontrando condiciones necesarias y suficientes para la existencia de las mismas. Dos años mas tarde, en 1940, clasificó todas las ecuaciones de cuarto orden con soluciones polinómicas [32]. En 1978, su hijo A.M. Krall [32] estudió estos nuevos polinomios (no clásicos) y los denominó polinomios tipo-Legendre, tipo-Laguerre y tipo-Jacobi (ver tabla 2). Nótese que los polinomios obtenidos son ortogonales respecto a medidas clásicas "perturbadas" mediante una o dos masas de Dirac $M\delta(x)$, siendo $\delta(x)$ la función δ de Dirac (más detalles se pueden encontrar en [4, 5]).

Cuadro 2: Los Polinomios de Krall.

P_n	Medida	Intervalo de ortogonalidad
tipo Laguerre	$e^{-x} \ + M\delta(x)$	$[0, \infty)$
tipo Legendre	$\frac{\alpha}{2} + \frac{\delta(x-1)}{2} + \frac{\delta(x+1)}{2}$	$[-1, 1]$
tipo Jacobi	$(1-x)^{\alpha} \ + M\delta(x)$	$[0, 1]$

Este problema inició las investigaciones en un nuevo campo de las funciones especiales: los polinomios semiclásicos [25]. La generalización de este problema al caso de los polinomios "discretos" desembocó en una conjetura propuesta por R. Askey en 1990 y resuelta independientemente por H. Bavinck y H. van Haeringen en 1994 y por R. Alvarez-Nodarse y F. Marcellán un año más tarde [3]. Un estudio más general de este tipo de polinomios así como las relaciones límites entre los distintos polinomios de tipo Krall (tanto continuos como discretos) fue hecho en [4]. Otra generalización de los polinomios ortogonales clásicos son los polinomios ortogonales respecto a un producto escalar de tipo Sobolev introducidos por D. C. Lewis (ver e.g. [35]).

5. Los $q-$polinomios

Además de la extensión de Krall para los polinomios clásicos hay otras posibilidades. Una de ellas fue explotada por W. Hahn en 1949 en su ensayo

[24]. Allí, Hahn propuso el siguiente problema: *Sea* Θ_q *el operador lineal*

$$\Theta_{q,w} f(x) = \frac{f(qx+w) - f(x)}{(q-1)x + w}.$$

Encontrar todas las sucesiones de polinomios ortogonales (P_n) *tales que:*

1. $(\Theta_{q,w} P_n)_n$ *sea también una sucesión de polinomios ortogonales;*
2. $\Theta_{q,w} P_n(x)$ *satisfaga una ecuación de la forma:*

$$\sigma(x)\Theta_{q,w}^2 P_n(x) + \tau(x)\Theta_{q,w} P_n(x) + \lambda_n P_n(x) = 0, \qquad \forall n \geq 0,$$

   donde grado $\sigma \leq 2$ *y grado* $\tau = 1$.

3. $\rho(x)P_n(x) = \Theta_{q,w}^n [X_0(x) \cdot X_1(x) \cdots X_n(x)\rho(x)]$, *siendo* X_0 *un polinomio independiente de* n, $X_{i+1}(x) = X_i(qx+w)$ *y* ρ *independiente de* n.
4. *Los momentos* μ_n *asociados a la sucesión* $(P_n)_n$, *satisfacen una relación de recurrencia de la forma* $\mu_n = \frac{a+bq^n}{c+dq^n}\mu_{n-1}, \quad ad - bc \neq 0$.

En ese mismo trabajo, Hahn da la respuesta para el funcional $\Theta_q \equiv \Theta_{q,w}$ correspondiente al caso $q \in (0,1)$ y $w = 0$. El caso $q = 1$ y $w = 1$ conduce directamente a los polinomios discretos antes mencionados y fue resuelto por P. Lesky en 1962. El caso $w = 0$ y $q \to 1$ obviamente se transforma en el caso clásico estudiado por el mismo Hahn en 1935-1939. Aunque su artículo de 1949 es obscuro y prácticamente no contiene ninguna demostración, en él Hahn encuentra la familia más general de polinomios que pertenecían a la clase antes mencionada ($w = 0$), que son los hoy conocidos q-polinomios grandes de Jacobi y, en particular, los $q-$polinomios que llevan su nombre: $q-$polinomios de Hahn y que constituyen una familia finita.

Un hecho sorprendente fue que, aparte de las tres caracterizaciones anteriores de Hanh, no se conocía ninguna otra caracterización de estas familias. Este lapso fue cubierto recientemente por J. C. Medem en un trabajo en conjunto con R. Alvarez-Nodarse y F. Marcellán [38], donde se prueban además de las cuatro caracterizaciones las siguientes:

Teorema: *Sea* $\mathcal{L}$ *un funcional regular y* $(P_n)_n$ *la sucesión de polinomios ortogonales asociada y sea* $q \in \mathbb{C}\backslash\{q : |q| = 1\}$. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*
(a) $\mathcal{L}$ *satisface la ecuación distribucional* $\Theta_q(\phi\mathcal{L}) = \psi\mathcal{L}$, *siendo* ϕ *y* ψ *polinomios con grado*$(\phi) \leq 2$ *y grado*$(\psi) = 1$,

(b) Existen dos polinomios $\phi^{(k)}$ *y* $\psi^{(k)}$ *de grados a lo más 2 y exactamente 1, respectivamente, y una sucesión de constantes* $\widehat{\lambda}_n^{(k)} \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$, $n \geq 1$, $\widehat{\lambda}_0^{(k)} = 0$,

tal que $\phi^{(k)}\Theta_q\Theta_{q^{-1}}Q_n^{(k)} + \psi^{(k)}\Theta_{q^{-1}}Q_n^{(k)} = \widehat{\lambda}_n^{(k)}Q_n^{(k)}$, *con* $Q_n^{(k)} = C_{nk}\Theta_q^k P_{n+k}$ ($C_{n,k}$ *es tal que* $Q_n^{(k)} = x^n + \cdots$),

(c) Existen dos polinomios ϕ *y* ϕ^* *de grado a lo más 2, y seis sucesiones* $(a_n)_n$, $(b_n)_n$, $(c_n)_n$, $(a_n^\star)_n$, $(b_n^\star)_n$, $(c_n^\star)_n$, $c_n c_n^\star \neq 0$, *tales que* $\phi\Theta P_n = a_n P_{n+1} + b_n P_n + c_n P_{n-1}$ *y* $\phi^*\Theta_{q^{-1}}P_n = a_n^\star P_{n+1} + b_n^\star P_n + c_n^\star P_{n-1}$,

(d) Existen tres sucesiones $(e_n)_{n\geq 0}, (h_n)_{n\geq 0}$ *tales que* $P_n = Q_n + e_n Q_{n-1} + h_n Q_{n-2}$, *con* $Q_n = \frac{q-1}{q^{n+1}-1}\Theta_q P_{n+1}$.

Finalmente, mencionaremos que J.C. Medem en 1996 dio otras caracterizaciones para una clase más general: los polinomios $q-$semiclásicos, basando sus demostraciones en el marco de los funcionales lineales siguiendo una idea idea iniciada por el P. Maroni en los 80 para el caso "continuo".

Antes de continuar, debemos destacar que aunque los $q-$polinomios eran conocidos a finales del siglo XIX –el primer ejemplo de $q-$polinomios se debe A. A. Markov, el famoso estudiante de Chebyshev, que en 1884 consideró un caso particular de los que se conocen como polinomios de $q-$Hahn– es justamente a partir del trabajo de Hahn en 1949, mencionado anteriormente, cuando su estudio recobra fuerza debido, fundamentalmente, a su conexión con la teoría de funciones Theta, teoría de particiones, representación de $q-$álgebras y grupos cuánticos, entre otras involucrándonse un sinnúmero de matemáticos de los que se puede destacar a R. Askey, J. A. Wilson, T. H. Koornwinder, D. Stanton, M. E. H. Ismail, T. S. Chihara, W. A. Al-Salam, A. F. Nikiforov, V. B. Uvarov, N. M. Atakishiyev, S. K. Suslov, entre otros (ver, por ejemplo, [8, 9, 10, 22, 28, 29, 39]).

Existen dos formas generales de tratar a estas familias. La primera, desarrollada en los años 80 por los estadounidenses G. E. Andrews y R. Askey y sus colaboradores, se basa en las series hipergeométricas básicas ${}_4\varphi_3$ –las "q" generalizaciones de la serie de Gauss de las que ya hemos visto un ejemplo debido a Heine–, definidas en general por

$$ {}_r\varphi_p\left(\begin{array}{c} a_1, a_2, \ldots, a_r \\ b_1, b_2, \ldots, b_p \end{array} \middle| q\,;\, z \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a_1;q)_k \cdots (a_r;q)_k}{(b_1;q)_k \cdots (b_p;q)_k} \frac{z^k}{(q;q)_k} \left[(-1)^k q^{\frac{k}{2}(k-1)}\right]^{p-r+1}, $$

con $(a;q)_n = \prod_{k=0}^{n-1}(1-aq^k)$, $0 < q < 1$. En particular, descubrieron que todas las familias de polinomios ortogonales clásicos podían obtenerse como casos límites de los polinomios de Askey-Wilson definidos por

$$ p_n(x;a,b,c,d) = {}_4\varphi_3\left(\begin{array}{c} q^{-n}, q^{n-1}abcd, ae^{-i\theta}, ae^{i\theta} \\ ab, ac, ad \end{array} \middle| q;q \right), \quad x = \cos\theta, $$

apareciendo en 1994 [28] la $q-$Tabla de Askey que clasificaba (presuntamente) a todas las demás familias de $q-$polinomios.

Algo más tarde, en 1983, los rusos A. F. Nikiforov y A. V. Uvarov proponen una aproximación diferente (y más general) que consiste en considerar los $q-$polinomios como soluciones polinómicas –en $x(s)$– de una ecuación en diferencias:

$$\tilde{\sigma}(x(s))\frac{\triangle}{\triangle x(s-\frac{1}{2})}\frac{\nabla y(s)}{\nabla x(s)}+\frac{\tilde{\tau}(x(s))}{2}\left[\frac{\triangle y(s)}{\triangle x(s)}+\frac{\nabla y(s)}{\nabla x(s)}\right]+\lambda y(s)=0,$$
$$\nabla f(s)=f(s)-f(s-1), \qquad \triangle f(s)=f(s+1)-f(s)\,, \tag{6}$$

con $x(s) = c_1q^s + c_2(q)q^{-s} + c_3(q) = c_1(q^s + q^{-s-\mu}) + c_3$, donde $q \in \mathbb{C}$, c_1, c_2, c_3 son constantes que pueden depender de q, pero son independientes de s; $\tilde{\sigma}(x(s))$ es un polinomio de grado, a lo sumo, 2 en $x(s)$ y $\tilde{\tau}(x(s))$, de grado 1 y λ es una constante. La ecuación anterior se denomina *ecuación en diferencias de tipo hipergeométrico* y aproxima a la ecuación (4) en la *red no uniforme* $x(s)$. Una propiedad inmediata de esta aproximación es precisamente que las soluciones de (6) se pueden expresar como series básicas, es decir

$$P_n(s)_q = {}_4\varphi_3\left(\begin{array}{c} q^{-n}, q^{2\mu+n-1+\sum_{i=1}^4 s_i}, q^{s_1-s}, q^{s_1+s+\mu} \\ q^{s_1+s_2+\mu}, q^{s_1+s_3+\mu}, q^{s_1+s_4+\mu} \end{array} ; q\,,\, q\right), \tag{7}$$

En particular, los polinomios de Askey-Wilson son una solución de la ecuación anterior cuando $x(s) = \frac{1}{2}(q^s + q^{-s}) \equiv x$, y $q^{s_1} = a$, $q^{s_2} = b$, $q^{s_3} = c$, $q^{s_4} = d$. Los trabajos de estos dos autores culmina con una clasificación diferente de los $q-$polinomios, basada en la ecuación (6), aparecida en 1991 [41].

Aparentemente, la clasificación de los $q-$polinomios según la $q-$tabla de Askey contenía todas las familias posibles de $q-$polinomios. No obstante quedaba pendiente la cuestión de si realmente la ecuación de tipo hipergeométrico (6) tenía como solución a todas las familias conocidas de $q-$polinomios. Esta cuestión fue parcialmente resuelta en [6], donde se establece un hecho sorprendente: incluso dentro de la clase de Hahn, lo que equivale a trabajar en la red exponencial lineal $x(s) = c_1q^s + c_3$, la clasificación de Nikiforov-Uvarov contiene dos familias completamente nuevas y no contenidas en el $q-$esquema de Askey. Ellas son:

$$j_n(x;a,b) = {}_2\phi_0\left(\begin{array}{c} q^{-n}, aq^n \\ — \end{array} \Big| q;\, \frac{x}{ab}\right), \quad \text{y} \quad l_n(x;a) = {}_2\phi_0\left(\begin{array}{c} q^{-n}, 0 \\ — \end{array} \Big| q;\, -\frac{x}{a}\right).$$

Actualmente continúa abierto el problema de caracterización en la red general conociéndose sólo algunos resultados parciales (aunque muy interesantes) debidos a A. Grunbaum y L. Haine usando técnicas biespectrales [23]. También esta abierto el problema de clasificación completa de todas las familias ortogonales en la red general $x(s) = c_1(q)q^s + c_2(q)q^{-s} + c_3(q)$.

6. Polinomios matriciales

Antes de pasar a ver algunas de las principales aplicaciones de los polinomios ortogonales vamos a comentar brevemente una de las extensiones más importantes y de mayor actualidad de la teoría de polinomios ortogonales: los polinomios ortogonales matriciales. Estos objetos matemáticos son polinomios cuyos coeficientes son matrices cuadradas e.g. $N \times N$, o equivalentemente, son matrices cuyas entradas son polinomios, i.e., $P_n(x) = A_n x^n + A_{n-1}x^{n-1} + \cdots A_1 x + A_0$ con $A_k \in \mathbb{R}^{N,N}$, $k = 0, 1, \ldots, n$. La ortogonalidad viene dada en este caso por una matriz de medidas $\mu = (\mu_{i,j})_{i,j=1}^N$ definida positiva (es decir, tal que para todo conjunto de Borel $A \subset \mathbb{R}$, la matriz númerica $\mu(A) = (\mu_{i,j}(A))_{i,j=1}^N$ es semidefinida positiva) con momentos $\int_{\mathbb{R}} t^n dW(t) < +\infty$, $\forall n \geq 0$, tal que

$$\int_{\mathbb{R}} P_n(x) d\mu(x) P_m(x) = \delta_{n,m}\Gamma_n, \quad n, m \geq 0, \tag{8}$$

siendo Γ_n una matriz definida positiva. Como en el caso escalar, la sucesión de polinomios matriciales ortogonales $(P_n)_n$ satisface una fórmula de recurrencia de tres términos:

$$tP_n(t) = A_{n+1}P_{n+1}(t) + B_n(t)P_n(t) + A_n^* P_{n-1}(t), \quad n \geq 0,$$

donde $P_{-1}(t)$ es la matriz nula 0_n y $P_0(t) = I_n$ es la matriz unidad I_n.

La ortogonalidad matricial ha sido estudiada de manera esporádica durante los últimos cincuenta años. Por ejemplo, M. Krein considera el problema de momentos matricial y los correspondientes polinomios matriciales en los años 40. En los 60 se interesan por ellos F. Atkinson (1968) y Yu. M. Berezansky (1965) en sus monografías *Discrete and continuous boundary problems* y *Expansions in eigenfunctions of selfadjoint operators*, respectivamente. En los 80, J.S. Geronimo los usa en la teoría de dispersión (scattering theory), S. Basu y N. K. Bose (1983) en modelos de redes (networks), etc. No obstante, faltaba motivación para desarrollar un estudio sistemático de la teoría; esta motivación ha aparecido al principio de esta década a partir de varios trabajos de A. Durán [18, 19] donde éste muestra cómo interpretar matricialmente la ortogonalidad escalar, convirtiendo así la teoría de polinomios matriciales ortogonales en una herramienta para resolver problemas de la teoría escalar clásica.

En particular, Durán prueba, usando las medidas matriciales, que

$$\frac{1}{\sum_n |p_n'(0)|^2} = \sup\{w_{22}(\{0\}) - \frac{|w_{12}|^2(\{0\})}{w_{1,1}(\{0\})} : W\},$$

donde $W = (w_{i,j})_{i,j=1}^2$ es el conjunto de todas las medidas matriciales asociadas a la sucesión $(p_n)_n$, problema éste que permanecía permanecía abierto desde principios del siglo XX, porque para darle respuesta era necesario acudir a la ortogonalidad matricial. Este uso de la ortogonalidad matricial para resolver problemas de la ortogonalidad escalar clásica ha generado el interés necesario para llevar a cabo un estudio sistématico de la ortogonalidad matricial, situándola, además, como una de las áreas más prometedoras dentro de la teoría de polinomios ortogonales.

7. Aplicaciones

Describamos a continuación algunas de las aplicaciones de los polinomios ortogonales.

Equilibrio electrostático. Una aplicación muy interesante de los polinomios ortogonales clásicos de Jacobi, Laguerre y Hermite, fue descubierta por Stieltjes y está estrechamente ligada al problema del equilibrio electrostático (ver e.g. [42] y las referencias del mismo). Este problema se divide en dos: cuando el intervalo donde se encuentran las cargas es un intervalo acotado y cuando no lo es.

I. Caso de un sistema de cargas en un intervalo acotado. Supongamos que tenemos n cargas unitarias $x_1, x_2, \ldots, x_n$ distribuidas en $[-1,1]$ y colocamos dos cargas extra en los extremos: una carga $p > 0$ en $x = 1$ y otra $q > 0$ en $x = -1$. Supongamos que la energía de interacción entre las cargas está regida por una ley logarítmica (electrostática bidimensional) expresada mediante la fórmula

$$L = -\log D_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) + p \sum_{i=1}^{n} \log \frac{1}{|1 - x_i|} + q \sum_{i=1}^{n} \log \frac{1}{|1 + x_i|},$$

donde el *discriminante* $D_n(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de $x_1, x_2, \ldots, x_n$ viene dado por

$$D_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{1 \le i < j \le n} |x_i - x_j|.$$

Teorema: (Stieltjes 1885–1889) La energía alcanzará un mínimo cuando $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sean los ceros del polinomio de Jacobi $P_n^{(2p-1,2q-1)}(x)$.

Este teorema nos da la interpretación electrostática de los ceros de los polinomios para un intervalo acotado. Notemos que, al considerar un sistema de cargas unitarias del mismo signo, éstas se repelerán. En el caso de un intervalo acotado, las cargas, al estar ligadas a él, se mantendrán en su interior. No ocurre igual en el caso de que el intervalo no sea acotado, pues las cargas se pueden ir al infinito (como de hecho ocurriría si se dejaran libres). Por ello, en el caso de intervalos no acotados se tienen que introducir condiciones adicionales que aseguren que las cargas no se alejan al infinito.

II. Caso de un sistema de cargas en un intervalo no acotado. Supongamos que tenemos n cargas unitarias distribuidas en el intervalo $[0,\infty)$ y colocamos una carga extra $p>0$ en el origen $x=0$. Para impedir que las cargas se puedan ir al infinito exigiremos que se cumpla una condición extra para el *centroide* de las cargas: $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k \le K$, con K cierto número positivo. En este caso la energía vendrá dada por la expresión

$$L = -\log D_n(x_1,\ldots,x_n) + p\sum_{k=1}^{n}\log\frac{1}{x_k}.$$

Teorema: La expresión anterior junto con la condición para el centroide tiene un mínimo cuando $x_1,x_2,\ldots,x_n$ son los ceros del polinomio de Laguerre $L_n^{(2p-1)}(c_n x)$, donde $c_n=(n+2p-1)/K$.
Si ahora colocamos las n cargas unitarias distribuidas en el intervalo $(-\infty,\infty)$ e imponemos la condición: $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k^2 \le L$, $L>0$, entonces tenemos el siguiente resultado:

Teorema: La expresión $-\log D_n(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ con la condición sobre el momento de inercia tendrá un mínimo cuando $x_1,x_2,\ldots,x_n$ son los ceros del polinomio de Hermite $H_n(d_n x)$, donde $d_n=\sqrt{(n-1)/2L}$.

Un hecho importante relacionado con esta interpretación electroestática es el siguiente: Si consideramos que la carga total en el caso del intervalo $[-1,1]$ es 1, y hacemos tender el número de dichas cargas a infinito observamos que las cargas p y q de los extremos es despreciable con respecto a la carga interior y, por tanto, la distribución asintótica de los ceros de los polinomios de Jacobi es independiente de los parámetros α y β de los mismos, luego podemos obtenerla a partir de cualquiera de sus “subfamilias”. Así, por ejemplo, si tomamos los polinomios de Chebyshev de primera especie ($\alpha=\beta=1/2$) cuyos ceros son $x_j=\cos(2j-1)\pi/(2n)$, $j=1,2,\ldots,n$, tendremos para el número de ceros $N_n(a,b)$ en el intervalo $[a,b]$ la siguiente estimación:

$$\frac{N_n(a,b)}{2n} = \sum_{a\le\cos\frac{(2j-1)\pi}{2n}\le b}\frac{1}{n} = \frac{1}{\pi}\int_a^b \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx + o(1),$$

conocida como la distribución arcseno y que resulta característica para toda una amplísima clase de polinomios ortogonales $[-1,1]$, como, por ejemplo, la conocida clase de Nevai. En realidad, este hecho no es una casualidad sino que es una consecuencia de la estrecha interrelación que existe entre la teoría de polinomios ortogonales y la teoría del potencial y es precisamente una de las principales líneas de investigación del momento.

Mécanica cuántica. En otra dirección, precisamente la ecuación diferencial que las familias clásicas (y otras) satisfacen da pie a una de sus principales aplicaciones: su utilización para describir los más importantes modelos cuánticos tanto relativistas como no relativistas. Por citar algunos mencionaremos el oscilador cuántico (polinomios de Hermite o Laguerre y Jacobi), el átomo de hidrógeno y la interación entre los piones y el núcleo atómico (polinomios de Laguerre y Jacobi), etc.

Como ejemplo veamos las ecuaciones estacionarias de Schrödinger para el átomo de hidrógeno (caso no relativista) y de Klein-Gordon para un pión (caso relativista) en un potencial de Coulomb, i.e.,

$$\Delta\psi_S + 2\left(E_S + \frac{1}{r}\right)\psi_S = 0, \qquad \Delta\psi_{KG} + \left[\left(E_{KG} + \frac{\mu}{r}\right)^2 - 1\right]\psi_{KG} = 0,$$

respectivamente, donde Δ es el laplaciano en $\mathbb{R}^3$, E representa la energía del sistema y ψ es la función de onda que caracteriza por completo al sistema. Utilizando que el potencial es central, y por tanto tiene simetría esférica, podemos separar variables en coordenadas esféricas obteniendo las siguientes soluciones

$$\psi_S(r,\theta,\phi) = N_{n,l}e^{-\left(\frac{2r}{n+l+1}\right)}\left(\frac{2r}{n+l+1}\right)^{l+1} L_n^{2l+1}\left(\frac{2r}{n+l+1}\right) Y_{l,m}(\theta,\phi),$$

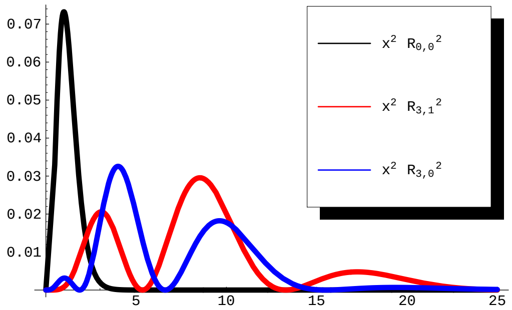
con $N_{n,l} = \sqrt{\dfrac{n!}{(n+l+1)^2(n+2l+1)!}}$ para la primera y, para la segunda,

$$\psi_{KG} = \sqrt{\frac{an!}{(n+\nu+1)(n+2\nu+1)!}}e^{-2ar}\,(2ar)^{\nu+1}\,L_n^{2\nu+1}\,(2ar)\,Y_{l,m}(\theta,\phi),$$

con $\nu = -\frac{1}{2} + \sqrt{(l+\frac{1}{2})^2 - \mu^2}$, $a = \sqrt{1 - \left(1 - \frac{\mu^2}{2(n+l+1)^2}\right)^2}$ y L_n^α los polinomios clásicos de Laguerre. En ambos casos, $n = 0,1,2,\ldots$, $l = 0,1,\ldots,n-1$, $m = -l,-l+1,\ldots,l$ e $Y_{l,m}$ representa a los armónicos esféricos que son proporcionales a los polinomios de Jacobi $P_{l-m}^{m,m}(\cos\theta)$. Finalmente, para ambos sistemas se obtienen los siguientes valores de la energía E:

$$E_S = -\frac{1}{2(n+l+1)^2}, \qquad E_{KG} = 1 - \frac{\mu^2}{2(n+l+1)^2}.$$

En ambos casos se tiene un espectro discreto de energía que concuerda muy bien con los hechos experimentales. Destaquemos que en el caso del átomo de hidrógeno estos valores explicaron perfectamente la llamada serie de Balmer, físico suizo que en 1885 descubrió que las frecuencias ω de las líneas del espectro de rayas del átomo de hidrógeno se expresaba por la fórmula $\omega = R\left(\dfrac{1}{2^2} - \dfrac{1}{k^2}\right)$, $k = 3,4,\ldots$ y R cierta constante. Precisamente los intentos de explicar este fenómeno dieron un impulso definitivo a la aparición de la teoría cuántica. (Bohr (1913), Pauli (1929) y Schrödinger (1929)).



Estado fundamental (negro) y exitado (azul y rojo) del átomo de Hidrógeno

Otra aplicación importante de los polinomios ortogonales relacionada con lo anterior es en el cálculo de las entropías de sistemas cuánticos, en particular para los osciladores y átomos de hidrógeno. Esta cantidad viene definida por integrales de la forma

$$E_\beta(p_n) = -\int x^\beta p_n^2(x)\,\ln\left(p_n^2(x)\right)\rho(x)dx\ ,$$

donde p_n son polinomios ortogonales respecto a la función peso ρ ($d\mu(x) = \rho(x)dx$), y $\beta \in \mathbb{R}$. En general, el valor para la entropía no se conoce para casi ninguna familia de polinomios (exceptuando los polinomios de Chebyshev de primera y segunda especie), y muchos de los resultados son resultados asintóticos. Gran parte de esta teoría está siendo desarrollada por J. S. Dehesa y sus colaboradores (ver el magnífico *survey* sobre este tema [16]).

Teoría de representación de $q-$álgebras. Otro ejemplo de aplicación de los polinomios ortogonales está relacionado con la teoría de representación de $q-$álgebras. A modo de ejemplo vamos a describir la conexión entre el $q-$álgebra $SU_q(2)$ y los polinomios duales de Hahn definidos por [7]

$$W_n^{(c)}(x(s),a,b)_q = {}_3\varphi_2\left(\begin{array}{c} q^{-n}, q^{a-s}, q^{a+s+1} \\ q^{a-b+1}, q^{a+c+1} \end{array}; q, q\right). \tag{9}$$

El álgebra $SU_q(2)$ está generada por los operadores J_+, J_-, J_0, que satisfacen las ecuaciones

$$\begin{gathered}[J_0, J_\pm] = \pm J_\pm, \quad [J_+, J_-] = [2J_0]_q = \frac{sh(2J_0\gamma)}{sh\gamma}, \quad q = e^\gamma, \\ (J_\pm)^\dagger = J_\mp, \quad (J_0)^\dagger = J_0,\end{gathered} \tag{10}$$

donde $[A,B] = AB - BA$, $[n]_q = (q^{\frac{n}{2}} - q^{-\frac{n}{2}})/(q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}})$ son los "q-números" y $[2J_0]_q$ se entiende como el correspondiente desarrollo formal en serie de potencias. Un problema de gran interés es determinar los coeficientes de Clebsch-Gordan (CCG) $\langle J_1 M_1 J_2 M_2 | JM\rangle_q$, definidos mediante el desarrollo

$$|J_1 J_2, JM\rangle_q = \sum_{M_1, M_2} \langle J_1 M_1 J_2 M_2 | JM\rangle_q |J_1 M_1\rangle_q |J_2 M_2\rangle_q \,, \tag{11}$$

siendo $|J_1 J_2, JM\rangle_q$, $|J_1 M_1\rangle_q$ y $|J_2 M_2\rangle_q$ los vectores de la base de las representaciones irreducibles de $SU_q(2)$ D^J, D^{J_1} y D^{J_2}, respectivamente. Utilizando las propiedades de estos coeficientes (ver e.g. [7, 45]) es fácil comprobar que se tiene la igualdad

$$(-1)^{J_1+J_2-J}\langle J_1 M_1 J_2 M_2 | JM\rangle_q = \sqrt{\frac{\rho(s) \bigtriangleup x(s-1/2)}{d_n^2}} W_n^{(c)}(s,a,b)_{q^{-1}} \,.$$

$$|J_1 - J_2| < M,\ n = J_2 - M_2,\ s = J,\ a = M,\ c = J_1 - J_2,\ b = J_1 + J_2 + 1,$$

donde $\rho(x)$ y d_n denotan las funciones peso y la norma de los q-polinomios duales de Hahn, $W_n^{(c)}(x(s),a,b)_{q^{-1}}$, y $\bigtriangleup$ es el operador definido en (6). Las relaciones del tipo anterior son de gran importancia, pues permiten obtener una gran cantidad de propiedades de los CCG a partir de los polinomios $W_n^{(c)}(x(s),a,b)_q$ y viceversa. En particular, en [7], explotando la relación anterior, se encontró una expresión desconocida hasta el momento, que identificaba a los $q-$polinomios duales de Hahn con los $q-$polinomios de Hahn.

Antes de concluir esta sección debemos destacar que también los polinomios "discretos" están intrínsecamente ligados con procesos cuánticos, particularmente los polinomios de Hahn, Meixner, Meixner-Pollaczek y Kravchuk. También es importante destacar el papel relevante de los polinomios ortogonales en la teoría de representación de grupos [39, Capítulo 5], (en particular los grupos $O(3)$, $SU(2)$ y $SU(1,1)$; en teoría de compresión de la información [39, Sección 4.1]; fórmulas de cuadratura [39, Sección 4.1]; para el reconocimiento de voz [11]; etc.

Apendix: Un comentario acerca de la literatura.

Existen un sinfín de publicaciones dedicadas a los polinomios ortogonales (por ejemplo en la bibliografía recopilada J. A. Shohat, E. Hille y J. L. Walsh, –*A bibliography on orthogonal polynomials.* Bulletin of the National Research Council.(U.S.A.) Number 103, National Academy of Sciences, Washington D.C., 1940– hasta 1940 habían aparecido 1952 trabajos de 643 autores). Un simple vistazo a las bases de datos disponibles nos dan estadísticas mucho mayores.

Hoy en día tenemos excelentes monografías dedicadas al estudio de los polinomios ortogonales. Vamos a incluir aqui una breve lista de las mismas –sin pretender que ésta sea completa–.

- *Orthogonal Polynomials* por G. Szegö [42], que es la primera monografía dedicada por entero a este tema y que recoge las principales ideas y técnicas matemáticas, estudiando en particular los polinomios de la clase de Szegö, entre otros muchos.
- *Orthogonal Polynomials* (Pergamon Press, Oxford, 1971) por G.Freud dedicado al estudio de los polinomios desde un punto de vista formal, o sea, propiedades generales, conexión con el problema de momentos, fracciones continuas, etc.
- *Special Functions and its Applications*, N. N. Lebedev (Dover, Nueva York, 1972). Monografía clásica que describe gran parte de las funciones especiales y polinomios clásicos así como muchas de sus aplicaciones a problemas de física matemática e ingeniería.
- *An introduction to orthogonal polynomials* por T. S. Chihara [12]. Excelente revisión del tema utilizando técnicas de funcionales lineales. Muy recomendable para el "principiante".
- *Special Functions of Mathematical Physics* por A.F. Nikiforov y V. B. Uvarov [40], dedicada a las aplicaciones físicas de los polinomios y donde se introducen éstos a partir de la ecuación diferencial de tipo hipergeométrico. Esta monografía es una magnífica introducción al tema.
- *Classical Orthogonal Polynomials of a Discrete Variable* por A.F. Nikiforov, S. K. Suslov y V. B. Uvarov [39], la única, hasta el momento, dedicada al estudio detallado de los polinomios ortogonales de variable discreta en redes, tanto uniformes como no uniformes, y sus aplicaciones.
- *Special Functions and the Theory of Group Representations* por N. Ja. Vilenkin [44] y *Representations of Lie Groups and Special Functions* por N. Ja. Vilenkin y A. U. Klimyk [45], ambos dedicados al estudio de las funciones especiales, polinomios clásicos *continuos y discretos*, así como los q-polinomios utilizando la teoría de la representación de grupos y álgebras.
- *General Orthogonal Polynomials* por H. Stahl y V. Totik (Cambrige University Press, 1992) dedicado a los aspectos más generales y formales de la teoría de polinomios ortogonales con muchas incursiones en el análisis complejo, teoría del potencial y propiedades asintóticas.
- *Fourier Series in Orthogonal Polynomials* por B. Osilenker (World Scientific, Singapore, 1999) dedicado a las series de Fourier de polinomios ortgonales, teoremas generales de convergencia en L^2, L^p, etc.

Una colección más completa de los textos y manuales relacionados con los polinomios ortogonales se puede encontrar en `OP-SF NET`: *The Electronic News Net of the SIAM Activity Group on Orthogonal Polynomials and Special Functions* en la dirección de internet: `http://math.nist.gov/opsf/booklist.html`

Agradecimientos: Quiero agradecer a la Sociedad Española de Matemática Aplicada (SEMA) por su cordial invitación a escribir este trabajo sobre polinomios ortogonales.

Referencias

[1] W. A. Al-Salam, Characterization theorems for orthogonal polynomials. En: *Orthogonal Polynomials: Theory and Practice.* P. Nevai (Ed.) NATO ASI Series C, **Vol. 294**. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1990, 1-24.

[2] R. Álvarez-Nodarse, *Polinomios hipergeométricos y q-polinomios.* Monografías de la Academia de Ciencias de Zaragoza. Academia de Ciencias de Zaragoza, Zaragoza, 2001, (en prensa).

[3] R. Álvarez-Nodarse y F. Marcellán, *Difference equation for modifications of Meixner polynomials.* J. Math. Anal. Appl. **194** (1995), 250–258.

[4] R. Álvarez-Nodarse y F. Marcellán, The limit relations between generalized orthogonal polynomials. *Indag. Math. (N.S.)*, **8** (1997), 295-316.

[5] R. Álvarez-Nodarse, F. Marcellán y J. Petronilho, WKB approximation and Krall-type orthogonal polynomials. *Acta Aplicandae Mathematicae* **54** (1998), 27-58.

[6] R. Álvarez-Nodarse y J. C. Medem, $q-$Classical polynomials and the $q-$Askey and Nikiforov-Uvarov Tableaus. *J. Comput. Appl. Math.* (2001), (en prensa)

[7] R. Álvarez-Nodarse y Yu.F. Smirnov, q-Dual Hahn polynomials on the non-uniform lattice $x(s) = [s]_q[s+1]_q$ and the q-algebras $SU_q(1,1)$ and $SU_q(2)$. *J. Phys. A.* **29** (1996), 1435-1451.

[8] G. E. Andrews y R. Askey, Classical orthogonal polynomials. En: *Polynômes Orthogonaux et Applications.* C. Brezinski et al. (Eds.) *Lecture Notes in Mathematics.* **Vol. 1171**. Springer-Verlag, Berlín, 1985, 36-62.

[9] R. Askey y R. Wilson, Some basic hypergeometric orthogonal polynomials that generalize Jacobi polynomials. *Mem. Amer. Math. Soc.* **319**. Providence, Rhode Island, 1985.

[10] N. M. Atakishiyev, M. Rahman y S. K. Suslov, On classical orthogonal polynomials. *Constr. Approx.* **11** (1995), 181-226.

[11] G. Carballo, R. Álvarez-Nodarse y J. S. Dehesa, On the Liu-Wang Speech Recognition Model using an Orthogonal Polynomial Representation. *Appl. Math. Letters* **14**(4) (2001), (en prensa).

[12] T. S. Chihara, *An Introduction to Orthogonal Polynomials.* Gordon and Breach Science Publishers, Nueva York, 1978.

[13] S. Bochner, Über Sturm-Liouvillesche polynomsysteme. *Math. Zeit.* **29** (1929), 730-736.

[14] J. L. Burchnall y T. W. Chaundy, Commutative ordinary differential operators. II The identity $P^n = Q^m$. *Proc. Roy. Soc. A.* **134** (1931), 471-485.

[15] C. W. Cryer, Rodrigues' formula and the classical orthogonal polynomials. *Boll. Un. Mat. Ital.,* **25**(3) (1970), 1-11.

[16] J. S. Dehesa, A. Martínez-Finkelshtein y J. Sánchez-Ruiz, Quantum information entropies and orthogonal polynomials *J. Comput. Appl. Math.* (2001), (en prensa)

[17] A. J. Duran, Functions with given moments and weight functions for orthogonal polynomials. *Rocky Mountain J. Math.* **23** (1993), 87–104.

[18] A. J. Duran, *A generalization of Favard's Theorem for polynomials satisfying a recurrence relation.* J. Approx. Th. **74** (1993), 83–109.

[19] A. J. Duran, *On orthogonal polynomials with respect to a positive definite matrix of measures.* Can. J. Math. **47** (1995), 88–112.

[20] J. A. Favard, Sur les polynômes de Tchebicheff. *C.R. Acad. Sci. Paris.* **200** (1935), 2052-2053.

[21] A. G. García, F. Marcellán y L. Salto, A distributional study of discrete classical orthogonal polynomials. *J. Comput. Appl. Math.* **57** (1995), 147-162.

[22] G. Gasper y M. Rahman, *Basic Hypergeometric Series.* Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[23] A. Grünbaum y L. Haine, The q-version of a theorem of Bochner. *J. Comput. Appl. Math.* **68** (1996), 103–114.

[24] W. Hahn, Über orthogonalpolynomen die q-differentialgleichungen genügen. *Math. Nachr.* **2** (1949), 4-34.

[25] E. Hendriksen y H. van Rossum, Semi-classical orthogonal polynomials. En: *Polynômes orthogonaux et leurs applications.* C. Brezinski et al. (Eds.) *Lecture Notes in Mathematics.* **Vol. 1171**. Springer-Verlag, Berlín, 1985, 354-361.

[26] E. Hendriksen y H. van Rossum, Electrostatic interpretation of zeros. En: *Orthogonal Polynomials and their Applications.* M. Alfaro et al. (Eds.) *Lecture Notes in Mathematics.* Springer-Verlag, Berlín, 1988, 241-250.

[27] E. H. Hildebrandt, Systems of polynomials connected with the Charlier expansion and the Pearson differential and difference equation. *Ann. Math. Statist.* **2** (1931), 379-439.

[28] R. Koekoek y R. F. Swarttouw, The Askey-scheme of hypergeometric orthogonal polynomials and its q-analogue. *Reports of the Faculty of Technical Mathematics and Informatics* **No. 98-17**. Delft University of Technology, Delft, 1998. (accesible en la red en `http://aw.twi.tudelft.nl/ koekoek/askey/`)

[29] T. H. Koornwinder, Compact quantum groups and q-special functions. En: *Representations of Lie groups and quantum groups.* V. Baldoni y M.A. Picardello (Eds.) Pitman Research Notes in Mathematics, Series 311, Longman Scientific & Technical, (1994), 46-128.

[30] H. L. Krall, Certain differential equations for Tchebycheff polynomials. *Duke. Math.* **4** (1938), 705-718.

[31] H. L. Krall, On the derivatives of orthogonal polynomials II. *Bull. Amer. Math. Soc.* **47** (1941), 261-264.

[32] H. L. Krall, On orthogonal polynomials satisfying a certain fourth order differential equation. *The Pennsylvania State College Bulletin* **6** (1941), 1-24.

[33] H. L. Krall y O. Frink, A new class of orthogonal polynomials: the Bessel polynomials. *Trans. Amer. Math. Soc.* **65** (1949), 100-115.**134** (1931), 471-485.

[34] P. Lesky, Über Polynomsysteme, die Sturm-Liouvilleschen differenzengleichungen genügen. *Math. Zeit.* **78** (1962), 439-445.

[35] F. Marcellán, M. Alfaro y M. L. Rezola, Sobolev orthogonal polynomials: old and new directions. *J. Comput. Appl. Math.* **48** (1993), 113-131.

[36] F. Marcellán y J. Petronilho, On the solutions of some distributional differential equations: existence and characterizations of the classical moment functionals. *Integral Transform. Spec. Funct.* **2** (1994), 185-218.

[37] J. C. Medem, *Polinomios q-semiclásicos. Tesis Doctoral.* Universidad Politécnica. Madrid, 1996.

[38] J. C. Medem, R. Álvarez-Nodarse y F. Marcellán, On the $q-$polynomials: A distributional study. *J. Comput. Appl. Math.* (2001), (en prensa)

[39] A. F. Nikiforov, S. K. Suslov y V. B. Uvarov, *Classical Orthogonal Polynomials of a Discrete Variable. Springer Series in Computational Physics.* Springer-Verlag, Berlín, 1991. (Edición en ruso, Nauka, Moscú, 1985)

[40] A. F. Nikiforov y V. B. Uvarov, *Special Functions of Mathematical Physics.* Birkhäuser Verlag, Basilea, 1988.

[41] A. F. Nikiforov y V. B. Uvarov, Polynomial Solutions of hypergeometric type difference Equations and their classification. *Integral Transform. Spec. Funct.* **1** (1993), 223-249.

[42] G. Szegö, *Orthogonal Polynomials.* Amer. Math. Soc. Coll. Pub. **23** American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1975 (cuarta edición).

[43] F. Tricomi, *Vorlesungen über Orthogonalreihen.* Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften 76, Springer-Verlag, Berlín-Gottinga-Heidelberg, 1955.

[44] N. Ja. Vilenkin, *Special Functions and the Theory of Group Representations.* Trans. of Math. Monographs. **22**. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1986.

[45] N. Ja. Vilenkin y A.U. Klimyk, *Representations of Lie Groups and Special Functions.* **Vol. I,II,III**. Kluwer Academic Publishers. Dordrecht, 1992.

Renato Álvarez-Nodarse
Departamento de Análisis Matemático, Universidad de Sevilla
e Instituto Carlos I de Física Teórica y Computacional
Universidad de Granada
E-Mail: `ran@cica.es`
WWW: `http://merlin.us.es/~renato/`