

Ramanujan y las q -series

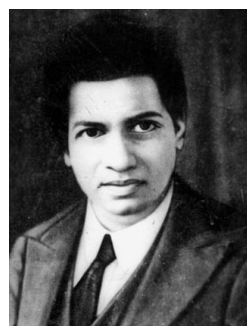
por

Renato Álvarez Nodarse

RESUMEN. En el presente trabajo vamos a discutir qué son las q -series, entes matemáticos de gran interés en la teoría analítica de números, con conexiones en las más diversas áreas de la matemática. Comenzaremos discutiendo brevemente el concepto de serie numérica para, poco a poco, ir adentrándonos en el « q -mundo». El hilo conductor del trabajo serán las contribuciones de Ramanujan del que celebramos este año el centenario de su prematura muerte.

Este año 2020 se cumplen los 100 años de la prematura muerte de Srinivāsa Aiyangār Rāmānujan (22 de diciembre de 1887 – 26 de abril de 1920). Ramanujan es el matemático indio más famoso de la historia de las matemáticas. Su vida está novelada en al menos dos novelas: *El contable hindú* de David Leavitt (Anagrama, 2011) y *El hombre que conocía el infinito* de Robert Kanigel (Scribner, 1991), esta última todavía sin traducir al castellano. Recientemente, en 2015, se estrenó una película basada en la segunda de las novelas (*El hombre que conocía el infinito*, Warner Bros, 2015) dirigida por Matt Brown. Ramanujan fue, sin duda, un genio de las matemáticas cuya obra ha dejado profundas huellas en la matemática moderna. No es nuestra intención en este artículo hablar sobre la vida de Ramanujan —para eso el lector tiene los dos libros antes mencionados y también, aunque en un contexto más amplio, el de Antonio J. Durán *Crónicas matemáticas. Una breve historia de la ciencia más antigua y sus personajes* (Crítica, 2018) [17]—, sino dar unas pinceladas de uno de los temas a los que más contribuyó este genial matemático, las q -series; aparte de mencionar, por supuesto, algunas de sus principales contribuciones.

Con el objetivo de hacer el trabajo más llevadero al lector no experto, en la sección 1 comenzaremos con algunas nociones muy básicas acerca de las series numéricas, que el lector conocedor puede saltarse si lo prefiere. Antes de pasar a hablar sobre las q -series, se discutirán en la sección 2 dos tipos de series muy especiales donde Ramanujan ha dejado su huella: las series asintóticas y las series para el cálculo (eficiente) del número π . En la sección 3 introduciremos las q -series comenzando por la más simple de todas (la serie geométrica), sin olvidar las famosas q -series básicas. En las secciones 4 y 5 discutiremos algunas integrales *peculiares* de Ramanujan, así



S. Ramanujan

como su famosa serie ${}_1\psi_1$, respectivamente; para, a continuación, en la sección 6 discutir uno de los resultados más llamativos de este genial contable indio: las hoy conocidas *identidades de Rogers-Ramanujan*. Culminaremos este trabajo con algunas reflexiones y consideraciones finales sobre las matemáticas y su relación con las otras ciencias y, por supuesto, discutiremos el papel de Ramanujan en todo ello. Empecemos, pues, nuestro viaje.

1. INTRODUCCIÓN: ¿QUÉ ES UNA SERIE INFINITA?

Para responder a la pregunta «¿qué es una serie infinita?» vamos a recurrir a una aporía que se remonta a la antigua Grecia y que fue propuesta por Zenón de Elea (siglo V a.n.e.), la aporía de Aquiles y la tortuga:

Supongamos que Aquiles quiere atrapar a una tortuga que ve al final del estadio. Aunque Aquiles sabe que él es más rápido que la tortuga, jamás podrá alcanzarla puesto que él tiene que alcanzar sucesivamente aquellos lugares por donde ya ha pasado la tortuga, o sea agotar un número infinito de tramos de camino.

El razonamiento anterior lo podemos *aritmétizar* como sigue. Supongamos que Aquiles recorre en el mismo tiempo que la tortuga el doble del espacio que ella —o la tortuga la mitad de lo que Aquiles ha recorrido, como se quiera—. Entonces, cuando Aquiles ha recorrido una distancia S , la tortuga se le ha adelantado una distancia $S/2$. Cuando Aquiles recorra dicha distancia $S/2$, la tortuga se le habrá adelantado $S/4$, y así sucesivamente (ver la figura 1). Por tanto, tras n iteraciones a Aquiles le quedará todavía por recorrer una distancia $S/2^{n-1}$, es decir, la distancia entre Aquiles y la tortuga siempre será mayor que cero y por tanto Aquiles nunca podrá alcanzar a la tortuga. Sin embargo, todos sabemos que si corremos un poco más rápido que la tortuga necesariamente la hemos de alcanzar. He aquí la paradoja. ¿Cómo resolverla?

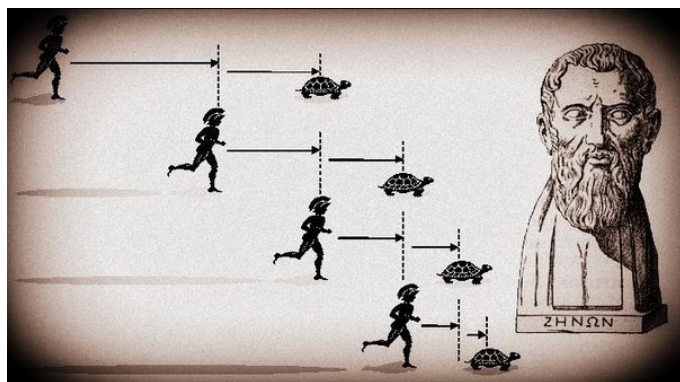


Figura 1: La aporía de Aquiles y la tortuga de Zenón de Elea.

Una posibilidad es, como hizo Grégoire de Saint-Vicent en su *Opus Geometricum* publicada en 1647, suponer que Aquiles corre a velocidad constante v . Entonces Aquiles ha de recorrer una distancia S_A igual a

$$S_A = S + \frac{S}{2} + \frac{S}{2^2} + \dots + \frac{S}{2^n} + \dots = S \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots \right).$$

Y ¿cuánto tiempo tardará Aquiles en alcanzar a la tortuga? Como Aquiles va a una velocidad constante v , entonces el tiempo t_n que necesitaría para recorrer cada uno de los tramos será igual a $2^{-n+1}S/v$, $n = 1, 2, \dots$, y, por tanto, el tiempo total vendrá dado por la suma de cada uno de los t_n , es decir por la fórmula

$$t_A = \frac{S}{v} + \frac{1}{2} \frac{S}{v} + \frac{1}{2^2} \frac{S}{v} + \dots + \frac{1}{2^n} \frac{S}{v} + \dots = \frac{S}{v} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots \right).$$

En cualquiera de los dos casos lo *único* que tenemos que hacer es encontrar la suma

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots, \tag{1.1}$$

pero ¿a qué es igual la suma anterior?

Esta pregunta, aunque lo parezca, no es nada trivial pues tenemos una suma con un número infinito de sumandos, y el infinito siempre suele dar problemas (para una historia del infinito y algunas de sus paradojas véase el magnífico libro [42]). Veamos un ejemplo muy sencillo que muestra lo anterior.

Consideremos la suma infinita

$$1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots + (-1)^{n-1} + (-1)^n + \dots. \tag{1.2}$$

Una forma de *sumarla* es la siguiente:

$$1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \dots + (-1 + 1) + \dots = 1 + 0 + 0 + \dots + 0 + \dots = 1;$$

o esta otra:

$$(1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots + (1 - 1) + \dots = 0 + 0 + 0 + \dots + 0 + \dots = 0.$$

¿Cuál de las dos es la forma correcta de sumarla?

Otra posibilidad es *reordenar* la serie de la siguiente forma¹

$$1 + 1 + (-1 + 1) + (-1 + 1) + (-1 + 1) + \dots = 2 + 0 + 0 + \dots = 2,$$

¹Si denotamos por $a_n = (-1)^{n-1}$, $n = 1, 2, \dots$, la suma (1.2) se escribiría $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$. Entonces la reordenación propuesta correspondería a la suma

$$a_1 + a_3 + (a_2 + a_5) + (a_4 + a_7) + \dots + (a_{2n} + a_{2n+3}) + \dots,$$

que contiene los mismos sumandos que (1.2) pero sumados de otra forma. Reordenaciones análogas permiten obtener como resultado cualquier número entero que se quiera.

lo cual nos induce a la siguiente reordenación:

$$\underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{N \text{ veces}} + (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \cdots = N + 0 + 0 + \cdots = N,$$

donde N es cualquier número entero positivo que se nos ocurra.

Otra opción es construir la sucesión de *sumas parciales*, es decir, construir la suma de los n primeros sumandos $S_n = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots$, y luego tomar el límite $n \rightarrow \infty$. Así, en nuestro caso obtendríamos

$$S_1 = 1, \quad S_2 = 1 - 1 = 0, \quad S_3 = 1 - 1 + 1 = 1, \quad S_4 = 1 - 1 + 1 - 1 = 0, \quad \dots,$$

lo que nos conduce a las sucesiones $S_{2n} = 0$ y $S_{2n-1} = 1$, de donde se deduce que no existe el límite cuando $n \rightarrow \infty$ de S_n y por tanto no podremos encontrar la suma de la serie. Ya que hemos calculado la sucesión de sumas parciales, podríamos «ponderar» o promediarlas, es decir, sumar de la siguiente forma:

$$C_1 = S_1 = 1, \quad C_2 = \frac{S_1 + S_2}{2} = \frac{1}{2}, \quad C_3 = \frac{S_1 + S_2 + S_3}{3} = \frac{2}{3}, \quad \dots$$

Así obtenemos, para cualquier $n \geq 1$,

$$C_{2n-1} = \frac{S_1 + S_2 + \cdots + S_{2n-1}}{2n-1} = \frac{n}{2n-1}, \quad C_{2n} = \frac{S_1 + S_2 + \cdots + S_{2n}}{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Si ahora tomamos el límite de C_n cuando n tiende a infinito² vemos que dicho límite es $1/2$, luego podríamos decir que la suma de nuestra serie es $1/2$. Dicho valor era el que proponía Leibniz para la suma (1.2) con una argumentación que hoy nos parecería un sinsentido [42, pág. 33].

Es hora de formalizar nuestro problema. Dada una sucesión de números $(a_n)_n$, encontrar, si es posible, la suma

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots .$$

En otras palabras, queremos encontrar la suma de todos los términos de una sucesión infinita de números. A la suma infinita anterior se le suele denominar en matemáticas *serie numérica*.

En este trabajo adoptaremos la definición *estándar* para la suma de una serie que vamos enunciar como sigue: Dada una serie numérica, diremos que es *convergente* o *sumable*, y que su *suma* es S , si existe el límite de sus *sumas parciales* $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ y es igual a S , i.e.,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = S.$$

²De hecho esta es la forma que propuso el matemático italiano Ernesto Cesàro para sumar series.

Las series que no convergen según la definición anterior las llamaremos *divergentes*.

Está claro que la serie (1.2) es divergente, no así la serie (1.1), pues para esta última tenemos (el caso general lo trataremos en la sección 3)

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = 2.$$

Lo anterior nos permite resolver la aporía de Zenón, pues tanto la distancia S_A que ha de recorrer Aquiles como el tiempo t_A que ha de tardar en atrapar a la tortuga vienen expresados por la serie infinita (1.1). Pero dicha suma es justo la que acabamos de encontrar, así que

$$S_A = S \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots\right) = 2S,$$

$$t_A = \frac{S}{v} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots\right) = \frac{2S}{v}.$$

Luego ¡Aquiles atrapará a su tortuga «fugitiva»! en un tiempo finito y recorrerá una distancia finita, ¡no hay ninguna paradoja!

2. RAMANUJAN Y LAS SERIES NUMÉRICAS

2.1. SUMANDO SERIES DIVERGENTES

Los ejemplos del apartado anterior nos indican que tratar con las series en general, y con las series divergentes en particular, no es tarea sencilla. Encontrar la *suma* de una serie *divergente* es bastante complicado y por ello durante mucho tiempo dichas series estuvieron desterradas de las matemáticas. Ya lo decía el gran matemático noruego Niels H. Abel en 1826³: «*Las series divergentes son la invención del diablo, y es vergonzoso basar en ellas cualquier demostración*». Afortunadamente esto ha cambiado y hoy día juegan un papel relevante en el análisis (ver, por ejemplo, [32]).

Para ilustrar lo anterior veamos un ejemplo debido a nuestro protagonista. Ramanujan, en su famosa carta a G. H. Hardy⁴ del 16 de enero de 1913, escribió una serie de fórmulas bastante raras a ojos de un profano. Una de ellas era la siguiente:

$$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots = -\frac{1}{12}. \quad (2.1)$$

¿Cómo puede una suma de números positivos dar como resultado un número negativo? Pero la cosa es incluso peor, pues es obvio que a medida que sumamos más

³Abel lo escribió en una carta a A. Holmboe fechada el 16 de enero de 1826 (*Oeuvres*, Vol. 2, Grondahl & Son, Christiania, 1881).

⁴Hardy era seguramente el matemático inglés más importante de principios del siglo XX, lo que fue una suerte para Ramanujan pues el hecho de que Hardy lo considerase un genio ayudó, sin ninguna duda, a que Ramanujan pudiese obtener una beca para estudiar y trabajar en Cambridge con él.

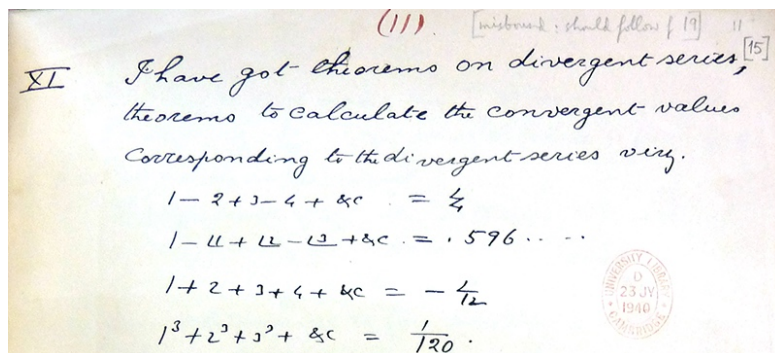


Figura 2: Fragmento de una de las pocas páginas que se conservan de la carta de Ramanujan a Hardy donde aparece la suma (2.1) (ver la tercera fórmula).

términos de nuestra serie vamos a obtener un número cada vez más grande. En esta serie, las sumas parciales cumplen

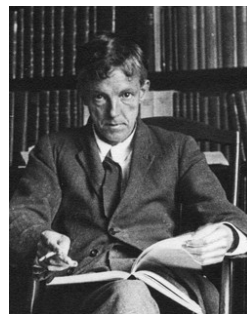
$$S_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty;$$

así pues, la sucesión de sumas parciales es siempre positiva, creciente y no acotada, y la serie es divergente. ¿Cómo obtuvo entonces Ramanujan ese resultado tan extraño?

El resultado de Ramanujan podría parecer a muchos los delirios de un loco. La realidad era muy distinta, lo que Ramanujan había *descubierto* era una forma de «*sumar*» series divergentes,⁵ algo que, como hemos dicho, era altamente no trivial, y más aún viniendo de un indio que se había presentado en su carta con las siguientes palabras:

Me presento ante usted como un empleado en el Departamento de Contabilidad del Puerto de Madrás [...]. Tengo veintitrés años. No he tenido educación universitaria pero he seguido los estudios ordinarios en la escuela. Después de la escuela he estado empleando mi tiempo libre en trabajar en matemáticas.

No he seguido el curso regular que se hace en una universidad, sino que me estoy abriendo yo mismo un camino nuevo.



G. H. Hardy

Para entender el resultado de Ramanujan hay que conocer la fórmula de Euler-Maclaurin para una función $f(x)$ lo *suficientemente buena* (para más detalle ver,

⁵En la susodicha carta de Ramanujan a Hardy este le escribía: *Tengo teoremas sobre series divergentes, teoremas para calcular los valores convergentes correspondientes a las series divergentes [...].* La cuestión, como ya habrá adivinado el lector, es qué entendía Ramanujan por la suma de dichas series.

por ejemplo, [32, pág. 318]). En una de sus tantas versiones (concretamente la que utilizó Ramanujan [11, cuaderno I, ec. (1.1), pág. 134]) dicha fórmula establece que, si $x \rightarrow \infty$,

$$\sum_{k=1}^x f(k) \sim C + \int_0^x f(t) dt + \frac{1}{2}f(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k}}{(2k)!} f^{(2k-1)}(x),$$

donde B_r son los números de Bernoulli (ver, por ejemplo, [32, pág. 320] o [45, §24]). Esta fórmula hay que entenderla, como bien explica Hardy en [32], como una fórmula asintótica más que como una fórmula exacta para el cálculo de la serie. La C que aparece en la fórmula anterior es una constante que sólo depende de la función f en cuestión y se puede usar para definir la suma de la serie divergente. Justo esa es la definición que usó Ramanujan, aunque él la llamó *la constante de la serie*, serie que además puede converger o diverger [11, I, ec. (1.2), pág. 134]. Para dicha constante C se puede, bajo ciertas condiciones, obtener la expresión

$$C = -\frac{1}{2}f(0) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k}}{(2k)!} f^{(2k-1)}(0).$$

Así, por ejemplo, si tomamos $f(x) = x$, entonces $f^{(k)}(0) = 0$, para todo $k \geq 2$, luego

$$C = -\frac{B_2}{2} = -\frac{1}{12},$$

de donde se sigue la fórmula de Ramanujan (2.1). Si, en cambio, tomamos $f(x) = 1$ entonces, como $C = -1/2$, tendríamos $1+1+1+1+\dots = -1/2$ (ver [32, ec. (3.10.11), pág. 333] o [11, I, ejemplos 1 y 2, pág. 135]).

De todo lo anterior el lector puede deducir que lo de encontrar el valor de una suma de infinitos números no es problema sencillo, y dependerá mucho de lo que entendamos como *suma de la serie*.

2.2. RAMANUJAN Y SUS SERIES DE π

Otro ejemplo revelador del don de Ramanujan para las matemáticas se puede ver en las series que encontró para calcular el valor de π . El número π es quizá el número más famoso de las Matemáticas, aparece casi en cualquier lugar (incluso donde no se le espera). El valor de π es el cociente entre el perímetro de una circunferencia y su diámetro y es un número irracional, es decir, no se puede escribir como cociente de números enteros. Arquímedes, allá por el siglo III a.n.e., demostró que el valor de π estaba comprendido entre los valores $3 + 10/71$ y $3 + 1/7$, es decir, encontró el valor de π con dos cifras significativas (i.e., hasta la segunda cifra ya que, por ejemplo, $3 + 1/7 = 22/7 \approx 3.1428\dots$), lo que se consideró en su día una gran proeza de cálculo. Para ello aproximó la circunferencia mediante polígonos regulares de 96 lados, es decir usó un método geométrico. Este método geométrico se usó durante siglos, teniendo el récord Ludolph Van Ceulen, quien calculó los perímetros de polígonos regulares de 262 lados, obteniendo el valor de π con 35 cifras decimales

exactas. Hubo que esperar hasta el siglo XVII para encontrar métodos analíticos que permitiesen calcular los valores de π de forma más eficiente, todos ellos mediante series numéricas. Por ejemplo, en 1671 James Gregory descubrió la serie infinita de la función arcotangente

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Si tomamos $x = 1$ obtenemos la famosa serie de Leibniz (que Leibniz encontró en 1674 y publicó en 1682)

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \dots$$

Es curioso que Gregory no haya estudiado el caso particular anterior, aunque la razón parece ser que la convergencia de la serie (concepto que el propio Gregory había introducido) era demasiado lenta para que fuese útil en el cálculo numérico de π . Se puede comprobar que con 10 sumandos se obtiene $\pi \approx 4 \cdot 11757173/14549535 \approx 3.2$, que representa un error de 0.1. Si queremos, por ejemplo, conseguir 3 cifras decimales, hay que sumar ¡1000 términos!

Casi 30 años más tarde, en 1699, el calculista Abraham Sharp calcula 71 cifras de π usando la serie de Gregory, pero sustituyendo x por $1/\sqrt{3}$. De esta forma se tiene la fórmula

$$\pi = 2\sqrt{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)3^n} = 2\sqrt{3} \left(1 + \frac{1}{3 \cdot 3} - \frac{1}{5 \cdot 9} + \frac{1}{7 \cdot 27} - \frac{1}{9 \cdot 81} + \dots \right),$$

que converge mucho más rápido. Sharp calculó 150 términos de la serie entre paréntesis y la raíz de tres con 76 decimales y obtuvo el valor de π con 72 decimales. Si usáramos 10 términos sólo conseguiríamos seis dígitos correctos.

Años antes, en 1676, Isaac Newton había calculado el valor de π usando su serie para el arcoseno

$$\pi = 6 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2k)} \frac{1}{2^{2k+1} (2k+1)} = 6 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^3 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{2^5 \cdot 5} + \dots \right).$$

Si sumamos los 10 primeros términos obtenemos el valor de π con 8 cifras correctas. Para tener una idea del ingente trabajo que requiere calcular las cifras decimales de π usando dichas fórmulas invitamos al lector a que calcule con lápiz y papel la suma de los 6 primeros sumandos de la serie de Newton anterior:

$$3 + \frac{1}{8} + \frac{9}{640} + \frac{15}{7168} + \frac{35}{98304} + \frac{189}{2883584} = \frac{951195037}{302776320} \approx 3.141577,$$

que coincide con valor real de π hasta la cuarta cifra decimal. Así que imagínese las cuentas que tuvo que realizar Newton para conseguir 16 cifras decimales teniendo que sumar los primeros 23 términos de dicha serie.

Unos años después, en 1706, John Machin, usando la expresión $\pi = 16 \arctan(1/5) - 4 \arctan(1/239)$, obtuvo, a partir de la serie de Gregory, la serie

$$\begin{aligned} \pi &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} \left(\frac{16}{5^{2k+1}} - \frac{4}{239^{2k+1}} \right) \\ &= \frac{3804}{1195} - \frac{72810068}{1706489875} + \frac{12476980230684}{12184551018734375} - \frac{712697588470600764}{24359780855939418203125} + \dots \end{aligned}$$

cuya suma de los 10 primeros dan el valor de π con 17 cifras exactas (para obtener el mismo resultado con la serie usada por Sharp se necesitan 32 sumandos). A partir de ahí hay una explosión de series que convergen muy rápido a π , dentro de las cuales tienen un sitio especial las de Srinivasa Ramanujan. Una especialmente sencilla y tremendamente rápida es

$$\frac{1}{\pi} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{42n+5}{2^{12n+4}} \binom{2n}{n}^3,$$

la suma de cuyos primeros tres términos da seis cifras decimales exactas de π (con 10 se tienen ¡19 cifras!). Esta serie aparece en la entrada 15.6.2 (p. 370) del célebre cuaderno perdido de Ramanujan [5].

Para terminar este apartado dedicado a las series usadas para el cálculo de π vamos a incluir otra de las famosas series de Ramanujan [47, ec. (39), pág. 38]:

$$\frac{4}{\pi} = \frac{1}{882} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (4n)!}{(4^n n!)^4} \frac{1123 + 21460n}{882^{2n}}.$$

La rapidez de esta serie es impresionante, pues con un único término se obtiene $3528/1123 \approx 3.141585$, que tiene cinco cifras exactas de π . Si tomamos 10, por ejemplo, obtenemos 64 cifras exactas.⁶ Ramanujan obtuvo una gran cantidad de dichas series que dejó escritas en sus cuadernos y en una de sus pocas publicaciones [47], aunque apenas aportó demostraciones. Una historia más completa sobre este problema se puede encontrar en [30].

3. LAS q -SERIES

Ya sabemos lo que es una serie en general, por tanto es momento de preguntarnos ¿qué es una q -serie? Justo con esa pregunta comienza el esclarecedor artículo de Bruce C. Berndt *What is a q -series?* [13]. En él, Berndt escribe

⁶El récord del cálculo a mano de las cifras de π lo tiene Willian Shanks, que usando la fórmula de Machin calculó, durante 20 años, 707 decimales de π , aunque, desgraciadamente para él, Daniel Ferguson en 1946 descubrió un error en el decimal 528, obteniendo el propio Ferguson 808 cifras exactas pero con ayuda de una calculadora de mesa, récord que fue superado por él mismo junto a John Wrench con 1202 cifras. A partir de ese momento entrarán en juego los ordenadores. Una historia del cálculo de las cifras de π se puede encontrar en [30].

La definición más simple y manifiestamente inútil sería una serie con q en los sumandos. Habiendo comenzado este ensayo con tonterías sin sentido, a continuación admitamos que no existe una definición «buena» de una q -serie.

Dicho esto podríamos acabar aquí nuestra historia, pero en vez de hacerlo vamos a dar un pequeño paseo por el *jardín* de las q -series y, de paso, comentar algunas contribuciones de Ramanujan en el tema. Así pues, y ya que no existe una definición exacta de lo que son las q -series, vamos a comenzar nuestro viaje parafraseando a Morfeo, el personaje de la película *The Matrix* (1999): «*A nadie se le puede decir lo que son las q -series. Tienes que verlas por ti mismo*».

3.1. LA SERIE GEOMÉTRICA $1 + q + q^2 + q^3 + \dots$

La primera q -serie de la historia es sin duda la serie geométrica⁷

$$1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^n + \dots \quad (3.1)$$

con la que ya nos encontramos al principio de este artículo, pues la serie (1.1) no es más que una serie geométrica de razón $q = 1/2$. Esta serie ya era conocida por los griegos. Sus *sumas parciales* están *calculadas* en la proposición 35 del libro IX de los *Elementos* de Euclides [20, pág. 236], que establece que

Si tantos números como se quiera son continuamente proporcionales, y se quitan del segundo y del último (números) iguales al primero, entonces, como el exceso del segundo es al primero, así el exceso del último será a todos los anteriores a él.

Hemos de aclarar que la fórmula que usamos hoy para el cálculo de las sumas parciales de una serie geométrica no aparece en los *Elementos*. No obstante, dicha fórmula se puede deducir fácilmente de la proposición anterior. En efecto, sea la sucesión $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$, con $a_{n+1} = qa_n$ para todo $n \geq 1$; entonces, según la proposición 35,

$$\frac{a_2 - a_1}{a_1} = \frac{a_{n+1} - a_1}{a_1 + a_2 + \dots + a_n} \quad \Rightarrow \quad a_1 + a_2 + \dots + a_n = a_1 \frac{a_{n+1} - a_1}{a_2 - a_1}.$$

Si ahora usamos que $a_n = a_1 q^{n-1}$, lo anterior nos conduce a la conocida fórmula para el cálculo de las sumas parciales de una serie geométrica en general,

$$a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \dots + a_1 q^{n-1} = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

⁷El término serie geométrica viene dado por el hecho de que estamos sumando todos los términos de una progresión geométrica, es decir, una progresión o sucesión $(a_n)_n$ tal que $q = a_2/a_1 = a_3/a_2 = \dots = a_{n+1}/a_n = \dots$, i.e., que el cociente de dos términos consecutivos cualesquiera de la sucesión es una constante, usualmente denominada *razón de la progresión*. Nótese que de la definición se sigue que $a_n = a_1 q^{n-1}$, para $n = 1, 2, \dots$

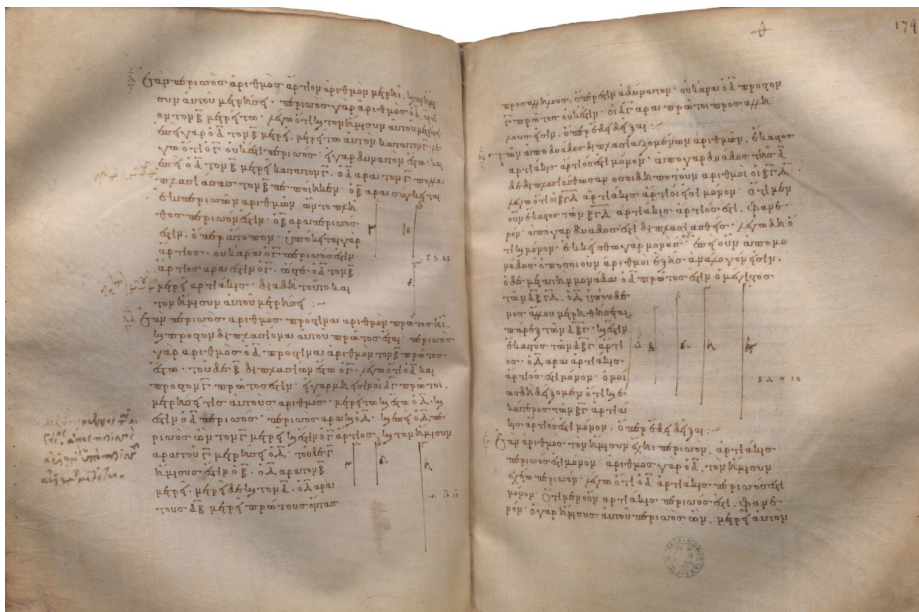


Figura 3: Página 174 del manuscrito *d’Orville Euclid*, fechado en 888 y copiado por el escriba Stephanus Clericus. Se encuentra en la Biblioteca Bodleiana de la Universidad de Oxford, pudiéndose consultar online en https://medieval.bodleian.ox.ac.uk/catalog/manuscript_4146. Según el catálogo de la biblioteca es el manuscrito datado más antiguo de un autor griego clásico.

Nótese que si tomamos $a_1 = 1$, la fórmula anterior se transforma en

$$1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} = \frac{q^n - 1}{q - 1}, \tag{3.2}$$

que nos permite calcular las sumas parciales de la serie geométrica (3.1). A partir de esta expresión se tiene que si $|q| < 1$, entonces q^n tiende a cero si n tiende a infinito y, por tanto,

$$1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} + \dots = \lim_{N \rightarrow \infty} 1 + q + \dots + q^{N-1} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{q^N - 1}{q - 1} = \frac{1}{1 - q}, \tag{3.3}$$

que es la suma de la serie geométrica (3.1) y de nuestra primera q -serie.

La serie geométrica aparece en el famoso tratado de Arquímedes *La cuadratura de la parábola* escrito en forma de carta a su amigo Dositeo. En dicho tratado Arquímedes prueba que el área A de un segmento parabólico (ver figura 4, izquierda) se puede expresar como $4/3$ del área de cierto triángulo inscrito en la parábola (ver figura 4, derecha). Para ello prueba una serie de proposiciones entre las cuales destaca la proposición 23, que establece que

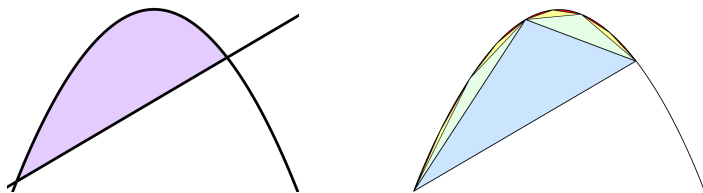


Figura 4: Segmento parabólico cuya área quiere calcularse (izquierda) y sucesión de triángulos inscritos usados por Arquímedes.

Si se colocan (suman) magnitudes en una serie de razón cuatro, el conjunto de las magnitudes, si se le suma la tercera parte de la más pequeña, será cuatro tercios de la mayor.

En la figura 5 se puede ver dicho enunciado tomado de un manuscrito griego⁸ conservado en la Biblioteca del Monasterio de El Escorial [6].

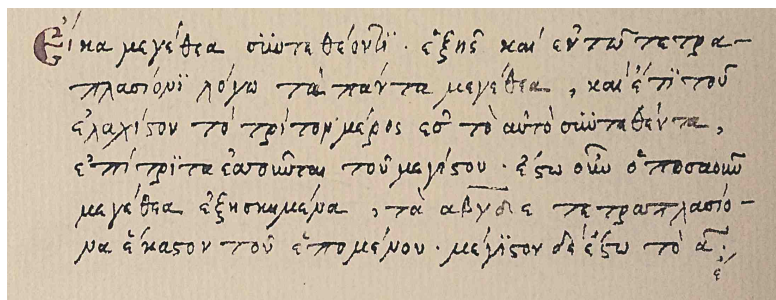


Figura 5: Enunciado de la proposición XXIII en el manuscrito X-I-14 de la biblioteca de El Escorial, datado en el siglo XVI, que contiene las siguientes obras de Arquímedes: *Sobre la esfera y el cilindro* (I y II), *La medida del círculo* y *La cuadratura de la parábola*. Dicho manuscrito fue copiado en Venecia a expensas de Diego Hurtado de Mendoza (que ejerció como embajador de Carlos V en dicha ciudad entre 1527 y 1547) del manuscrito CCCV perteneciente a la Biblioteca Marciana.

Si llamamos a_1 a la primera magnitud, a_2 a la segunda, a_3 a la tercera y así sucesivamente, tendremos que

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \frac{1}{3}a_n = \frac{4}{3}a_1.$$

Si usamos ahora que el cociente entre dos magnitudes consecutivas es igual a $1/4$ tendremos que $a_k = a_1 \left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}$, $k = 1, 2, \dots$, luego

$$a_1 \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \cdots + \frac{1}{4^{n-1}}\right) + \frac{1}{3} \frac{a_1}{4^{n-1}} = \frac{4}{3}a_1,$$

⁸La foto es un fragmento de la reproducción facsímil del manuscrito X-I-14 de la Biblioteca de El Escorial, datado en el siglo XVI, que contiene las siguientes obras de Arquímedes: *Sobre la esfera y el cilindro* (I y II), *La medida del círculo* y *La cuadratura de la parábola*. Dicho manuscrito fue copiado en Venecia a expensas de Diego Hurtado de Mendoza (que ejerció como embajador de Carlos V en dicha ciudad entre 1527 y 1547) del manuscrito CCCV perteneciente a la Biblioteca Marciana.

que es equivalente a escribir

$$\left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \cdots + \frac{1}{4^{n-1}}\right) = \frac{4}{3} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4^{n-1}} = \frac{1 - \frac{1}{4^n}}{1 - \frac{1}{4}},$$

que es justo la suma parcial de la serie geométrica (3.2) con razón $1/4$.

En su prueba de la proposición 23, Arquímedes no utiliza la proposición 35 del libro IX de Euclides que obviamente debía conocer, sino un método geométrico bastante ingenioso.

Finalmente, en la proposición 24 Arquímedes prueba su resultado principal, a saber, que el área A del segmento parabólico es $4/3$ del área del correspondiente triángulo. Para probarlo vamos a denotar por T al área del primer triángulo (el mayor en la figura 4). Entonces, el área total de los dos triángulos laterales a ese en la figura 4 es $2 \times T/8$, el de los cuatro siguientes $4 \times T/8^2$, y así sucesivamente, de forma que el área total sería, usando el método exhaustivo o de exhaución (del que Arquímedes era todo un experto), igual a

$$A = T + 2 \left(\frac{T}{8}\right) + 4 \left(\frac{T}{8^2}\right) + \cdots = T \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \cdots\right) = \frac{4}{3} T.$$

Como se ve, para calcular el área del segmento parabólico se precisa sumar una serie geométrica, en este caso de razón $q = 1/4$, cuya suma es, usando (3.3), $4/3$, de donde obtenemos el resultado. En honor a la verdad hay que decir que, en su tratado, Arquímedes no probó la proposición 24 antes mencionada sumando la serie, sino probando que el área A no podía ser ni mayor ni menor que $4/3 T$.

3.2. LAS PARTICIONES DE NÚMEROS ENTEROS POSITIVOS Y LAS q -SERIES

El primer matemático en lidiar con las q -series (aparte de la serie geométrica, se entiende) fue Leonard Euler (entre los clásicos, más adelante nos aparecerán también Jacobi y Gauss, ver figura 6). En el capítulo XVI de su magnífica obra *Introductio in analysin infinitorum* de 1748 (ver la edición traducida y anotada [24]) Euler introduce las *particiones de números*.

Imaginemos que n es un número entero positivo y queremos saber de cuántas formas podemos descomponer n en suma de enteros positivos, con la salvedad de que dos sumas que sólo difieren en el orden de los sumandos no se consideran distintas. Por ejemplo, el número 4 admite cinco particiones,

$$4 = 3 + 1 = 2 + 2 = 2 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1,$$

mientras que el número 5 admite 7,

$$5 = 4 + 1 = 3 + 2 = 3 + 1 + 1 = 2 + 2 + 1 = 2 + 1 + 1 + 1 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1.$$

A dicho número, que denotaremos por $p(n)$, se le denomina número de particiones del entero positivo n en enteros positivos.

Para resolverlo, Euler se da cuenta de que dicho número coincide con el coeficiente del desarrollo en serie de cierta función. Pero dejemos que el propio Euler lo cuente [24, §304, pág. 257] (hemos cambiado la x del original por la q):

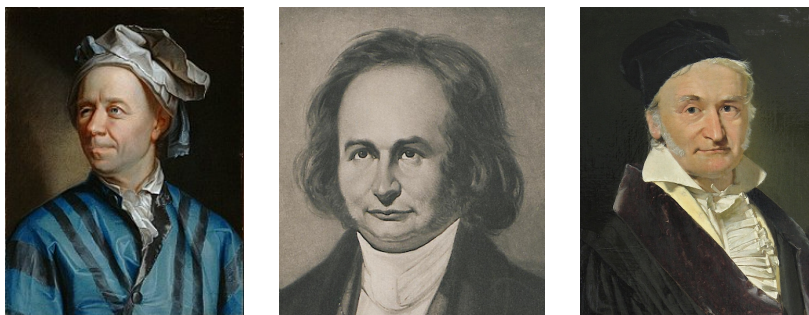


Figura 6: Los tres pioneros en el estudio de las q -series: de izquierda a derecha, L. Euler, C. G. J. Jacobi y C. F. Gauss.

305. [...] la expresión

$$\frac{1}{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)(1-q^4)(1-q^5)(1-q^6)\&c.}$$

se desarrolla en la serie

$$1 + q + 2q^2 + 3q^3 + 5q^4 + 7q^5 + 11q^6 + 15q^7 + 22q^8 + \&c.,$$

en la que un coeficiente cualquiera indica de cuántos modos diversos puede el exponente de la potencia adjunta, mediante adición, ser producido a partir de números enteros, así iguales como desiguales. A saber, claro está, por el término $11q^6$ se conoce que el número 6 puede producirse de once modos mediante adición a partir de números enteros, que son

$$\begin{array}{l|l} 6 = 6 & 6 = 3 + 1 + 1 + 1 \\ 6 = 5 + 1 & 6 = 2 + 2 + 2 \\ 6 = 4 + 2 & 6 = 2 + 2 + 1 + 1 \\ 6 = 4 + 1 + 1 & 6 = 2 + 1 + 1 + 1 + 1 \\ 6 = 3 + 3 & 6 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 \\ 6 = 3 + 2 + 1 & \end{array}$$

donde también debe notarse que el mismo número propuesto, comoquiera que esté contenido en la serie de números propuesta, 1, 2, 3, 4, 5, 6, &c., representa uno de esos modos.

Vamos a reescribir el resultado de Euler de forma compacta. Para ello vamos a definir el siguiente producto:

$$(a; q)_n = \prod_{k=0}^{n-1} (1 - aq^k) = (1 - a)(1 - aq)(1 - aq^2) \cdots (1 - aq^{n-1}), \quad (3.4)$$

que no es más que el q -análogo del símbolo Pochhammer⁹ o q -factorial ascendente.

⁹El símbolo de Pochhammer lo introduciremos más adelante (ver la ecuación (3.16)).

Si suponemos que $q \in (0, 1)$, lo que es habitual para las q -series, entonces podemos definir el producto infinito¹⁰

$$(a; q)_\infty = \prod_{k=0}^{\infty} (1 - aq^k) = \lim_{n \rightarrow \infty} (a; q)_n.$$

De las definiciones anteriores se deduce que

$$(q^{-m}; q)_n = 0 \quad \text{y} \quad (q^{-m}; q)_\infty = 0, \quad m = 0, 1, 2, \dots, n > m. \quad (3.5)$$

Usando la notación anterior, el resultado de Euler se puede escribir de forma compacta de la siguiente forma:

$$\frac{1}{(q; q)_\infty} = \sum_{n=0}^{\infty} p(n)q^n, \quad p(0) := 1. \quad (3.6)$$

La fórmula anterior define una *función generatriz*¹¹ para la sucesión $p(n)$. Algo que se intuye «*fácilmente*» es que los valores de $p(n)$ crecen muy rápidamente con n . Por ejemplo, se puede comprobar que $p(1) = 1$, $p(5) = 7$, $p(10) = 42$, $p(50) = 204226$, $p(100) = 190569292$, $p(200) = 3972999029388$, etc.¹²

Las funciones generatrices son muy útiles en toda la matemática. Por ejemplo, imaginemos que queremos encontrar el número de particiones de cualquier entero positivo n en enteros positivos distintos. Denotemos dicho número por $p_{\neq}(n)$. Entonces,

$$(-q; q)_\infty = \sum_{n=0}^{\infty} p_{\neq}(n)q^n, \quad p_{\neq}(0) := 1. \quad (3.7)$$

Este resultado también lo prueba Euler en [24, §301, pág. 255]. De ambos resultados es fácil ver que el número de particiones de cualquier entero positivo n en enteros positivos *impares*, que denotaremos por $p_{\text{im}}(n)$, es igual a $p_{\neq}(n)$. Para ello podemos usar que

$$\frac{1}{(q; q^2)_\infty} = \sum_{n=0}^{\infty} p_{\text{im}}(n)q^n, \quad p_{\text{im}}(0) := 1. \quad (3.8)$$

¹⁰Otra vez nos encontramos con el problema de lidiar con un número infinito de operaciones, esta vez con un producto de infinitos factores. En lo que nos ocupa dado que ninguno de los productos será cero podemos tomar como definición la natural, i.e., tomar límites en los correspondientes productos parciales.

¹¹Dada una sucesión numérica $(a_n)_n$, se denomina función generatriz de $(a_n)_n$ a la función $A(x)$ tal que

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$

Es decir, es la función tal que los coeficientes de su desarrollo en serie coinciden con los de la sucesión dada.

¹²Para calcular los valores numéricos anteriores hemos usado programa de cálculo simbólico con licencia GPL MAXIMA, <http://maxima.sourceforge.net>.

Ahora bien, como

$$(-q; q)_\infty = \prod_{k=0}^{\infty} (1 + q^k) = \frac{1}{\prod_{k=0}^{\infty} (1 - q^{2k+1})} = \frac{1}{(q; q^2)_\infty},$$

entonces de (3.7) y (3.8) se tiene que $p_{\neq}(n) = p_{\text{im}}(n)$. Las fórmulas anteriores (3.6), (3.7) y (3.8) son ejemplos de q -series, y, como se ve, juegan un papel relevante en la teoría de números. Para saber más sobre el trabajo de Euler y sus extensiones, consultar [38].

Pero volvamos a Ramanujan. Uno de los resultados más conocidos de Ramanujan está relacionado precisamente con el cómputo de $p(n)$. En 1918, en un trabajo conjunto [33], Hardy y Ramanujan encuentran, usando esencialmente las funciones generatrices de Euler y el teorema de Stirling,¹³ que el número de particiones $p(n)$ está acotado por la desigualdad

$$\frac{H}{n} e^{2\sqrt{n}} < p(n) < \frac{K}{n} e^{2\sqrt{n}},$$

donde H y K son ciertas constantes positivas. En ese mismo trabajo, ya usando técnicas mucho más sofisticadas, Hardy y Ramanujan obtienen una serie asintótica¹⁴ para calcular el valor de $p(n)$, cuyo primer término es

$$p(n) \sim p_a(n) = \frac{1}{2\pi\sqrt{2}} \frac{d}{dn} \left(\frac{e^{2\pi\lambda_n/\sqrt{6}}}{\lambda_n} \right), \quad \lambda_n = \sqrt{n - \frac{1}{24}},$$

donde d/dn denota la derivada con respecto a la variable n .

En la siguiente tabla mostramos los valores de $p(n)$ reales y los obtenidos con la fórmula anterior para algunos valores de n :

n	40	80	120	160	200
$p(n)$	37338	15796476	1844349560	107438159466	3972999029388
$p_a(n)$	37330	15796366	1844348547	107438152842	3972998993185
$p(n) - p_a(n)$	8	110	1013	6624	36203
$\frac{p(n) - p_a(n)}{p(n)}$	2.14×10^{-4}	6.96×10^{-6}	5.49×10^{-7}	6.16×10^{-8}	9.11×10^{-9}

¹³Hardy y Ramanujan enuncian el teorema de Stirling de la siguiente forma: Para todo n entero positivo, la cantidad $n! e^n/n^{n+1/2}$ está contenida entre dos números reales positivos. En realidad Stirling probó que, para n entero positivo suficientemente grande, $n! \sim s_n = \sqrt{2\pi n}(n/e)^n$, es decir, que $\lim_{n \rightarrow \infty} n!/s_n = 1$.

¹⁴Definir formalmente lo que es una serie asintótica requeriría más espacio del que nos gustaría. En el caso que nos ocupa digamos, a grandes rasgos, que $\sum_{k=1}^{\infty} A_k(n)$ es una serie asintótica para $p(n)$ si $p(n) - \sum_{k=1}^N A_k(n) \rightarrow 0$ cuando $n \rightarrow \infty$ para cualquier N (y, para n grande, el error es menor cuanto mayor sea el número de sumandos N que tomemos), pudiendo la serie $\sum_{k=1}^{\infty} A_k(n)$ ser una serie divergente. Un ejemplo clásico de serie asintótica es la serie de Stirling para el cálculo del factorial de un número. El lector interesado puede consultar [18].

Hardy y Ramanujan eran conscientes de que la serie que habían encontrado aproximaba $p(n)$ incluso mejor que lo que ellos habían podido justificar teóricamente, y conjeturaron que, siguiendo unos argumentos no muy distintos a los suyos, se iban a poder conseguir aproximaciones aun mejores. Hubo que esperar hasta 1937 para que Hans Rademacher, modificando ligeramante el método empleado por Hardy y Ramanujan en su demostración, encontrara una serie convergente exacta para $p(n)$ [46], a diferencia de la de Hardy y Ramanujan que era una serie asintótica divergente (las expresiones de las series de Hardy-Ramanujan y de Rademacher para $p(n)$ se pueden ver en [52]).

3.3. EL PRODUCTO TRIPLE DE JACOBI

Otra de las q -series relevantes de las matemáticas es la relacionada con el *teorema del producto triple de Jacobi*. Dicho teorema fue probado por C. G. J. Jacobi en su tratado de 1829 sobre las funciones elípticas *Fundamenta Nova Theoriae Functionum Ellipticarum* [37].

Hay varias formas de expresar el producto de Jacobi, siendo una de las más elegantes la que usa las funciones *theta* de Ramanujan definidas por

$$f(a, b) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^{n(n+1)/2} b^{n(n-1)/2}, \quad |ab| < 1. \tag{3.9}$$

Usando las funciones f anteriores el producto triple de Jacobi se expresa como

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a^{n(n+1)/2} b^{n(n-1)/2} = (-a; ab)_{\infty} (-b; ab)_{\infty} (ab; ab)_{\infty}, \tag{3.10}$$

que, en la notación habitual, toma la forma

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^n q^{n^2} &= \prod_{m=1}^{\infty} (1 - q^{2m})(1 + xq^{2m-1})(1 + x^{-1}q^{2m-1}) \\ &= (q^2; q^2)_{\infty} (-q/x; q^2)_{\infty} (-xq; q^2)_{\infty}. \end{aligned} \tag{3.11}$$

El producto anterior también se suele escribir cambiando x por $-x$, i.e.,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n x^n q^{n^2} = (q^2; q^2)_{\infty} (q/x; q^2)_{\infty} (xq; q^2)_{\infty}. \tag{3.12}$$

Hay varias demostraciones *sencillas* de (3.10) (ver, por ejemplo, [13, §1.3, pág. 10] o [14, capítulos 2 y 3]), aunque nosotros la probaremos más adelante a partir de otra conocida identidad debida a Ramanujan.

Entre los corolarios de (3.10) se tienen algunas de las q -sumas más conocidas de Gauss. En efecto si tomamos $a = b = q$ y $a = b = -q$ se obtienen, respectivamente [29, pág. 440],

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} = (-q; q^2)_{\infty}^2 (q^2; q^2)_{\infty}, \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} = (q; q^2)_{\infty}^2 (q^2; q^2)_{\infty}.$$

Por otro lado, si $a = q$ y $b = q^3$ se tiene, de (3.10),

$$\begin{aligned} f(q, q^3) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{2n^2-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{2n^2+n} = \sum_{n=0}^{\infty} q^{n(n+1)/2} \\ &= (-q; q^4)_{\infty} (-q^3; q^4)_{\infty} (q^4; q^4)_{\infty}, \end{aligned}$$

que, al desarrollar los productos infinitos de la derecha, se transforma en otra de las famosas identidades de Gauss [26, pág. 11]:

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^{n(n+1)/2} = \frac{(q^2; q^2)_{\infty}^2}{(q; q)_{\infty}}.$$

Sustituyendo los valores $a = -q$ y $b = -q^2$ en (3.10) tenemos, por un lado, que la suma de la izquierda se convierte en

$$(-q)^{n(n+1)/2} (-q^2)^{n(n-1)/2} = (-1)^k q^{k(3k-1)/2},$$

y, por el otro, que el producto de la derecha toma la forma

$$(-q; q^3)_{\infty} (-q^2; q^3)_{\infty} (q^3; q^3)_{\infty} = (q; q)_{\infty},$$

de donde se sigue la identidad

$$f(-q, -q^2) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{n(3n-1)/2} = (q; q)_{\infty}, \quad (3.13)$$

donde, una vez más, $f(a, b)$ es la función *theta* de Ramanujan (3.9).

La fórmula (3.13) es conocida como el *teorema del número pentagonal* de Euler y fue presentada por este a la Academia de San Petersburgo el 14 de agosto de 1775¹⁵ [21]. Combinando (3.13) y (3.6) se puede deducir de forma muy sencilla una relación de recurrencia, también debida a Euler, para las particiones $p(n)$,

$$p(n) = \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j+1} \left(p(n - j(3j - 1)/2) + p(n - j(3j + 1)/2) \right),$$

donde se asume que $p(0) = 1$ y $p(m) = 0$ si m es un entero negativo, y que constituye un método bastante eficaz de encontrar los valores numéricos de $p(n)$ (ver [2, §14]). Para más detalles sobre el teorema del producto triple de Jacobi el lector puede consultar, e.g., [3, §10.4], [12, §1.3] y [36, §1].

¹⁵Euler dio con esta fórmula en 1741 y tardó casi 10 años en probarla. La prueba se la envió, en una carta fechada el 9 de junio de 1750, a C. Golbach (ver el volumen IV de la *Opera Omnia* de Euler, disponible en línea en el *Euler Archive Home Page*, <http://eulerarchive.maa.org>, carta OO858, pág. 522).

3.4. LAS SERIES HIPERGEOMÉTRICAS BÁSICAS

Nuestro próximo ejemplo de q -series son las series hipergeométricas básicas o q -series básicas ${}_r\phi_p$ (lo de básicas es por tener la *base* q). La definición formal es la siguiente:

$${}_r\phi_p \left(\begin{matrix} a_1, \dots, a_r \\ b_1, \dots, b_p \end{matrix} \middle| q, x \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1; q)_n (a_2; q)_n \cdots (a_r; q)_n}{(q; q)_n (b_1; q)_n \cdots (b_p; q)_n} \left[(-1)^n q^{\frac{n(n-1)}{2}} \right]^{1+p-r} x^n, \tag{3.14}$$

donde $(a; q)_n$ denota a los q -análogos de los símbolos de Pochhammer (3.4).

¿De dónde vienen estas series? ¿Qué interés pueden tener? Para responder a esta pregunta hay que remontarse otra vez a Euler y a Gauss.

Comencemos respondiendo a la primera pregunta. Las q -series básicas son los q -análogos de las series *hipergeométricas* generalizadas

$${}_rF_p \left(\begin{matrix} a_1, a_2, \dots, a_r \\ b_1, b_2, \dots, b_p \end{matrix} \middle| x \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n \cdots (a_r)_n}{(b_1)_n \cdots (b_p)_n} \frac{x^n}{n!}, \tag{3.15}$$

donde $(a)_n$ es el símbolo de Pochhammer —también denominado *factorial ascendente*—

$$(a)_0 = 1, \quad (a)_n = a(a+1)(a+2) \cdots (a+n-1), \quad n \geq 1. \tag{3.16}$$

Nótese que, al igual que los q -análogos del símbolo de Pochhammer (3.4), $(-m)_n = 0$ para todo $m = 0, 1, 2, \dots$ y $n > m$.

Antes de continuar conviene hacer una aclaración en relación a las series (3.15) y (3.14). De las propiedades de los símbolos de Pochhammer y de sus q -análogos se sigue que si alguno de los a_i es igual $-m$ o q^{-m} , $m = 0, 1, 2, \dots$, entonces los correspondientes productos $(a_i)_n$ y $(a_i; q)_n$ se anulan, por tanto las series (3.15) y (3.14), respectivamente, dejan de ser series infinitas y se convierten en una suma finita de elementos. En este caso se dice que las series (3.15) y (3.14) *terminan*.

La serie (3.15) es una generalización de la conocida serie *hipergeométrica* de Gauss ${}_2F_1$ que, como cabía esperar, es (3.15) con $r = 2$ y $p = 1$. La serie ${}_2F_1$ ya aparecía en los trabajos de Euler. Por ejemplo, en el libro segundo de sus *Institutiones Calculi Integralis* de 1769, Euler dedica los capítulos VIII–XI a estudiar la resolución en series de potencias de ciertas ecuaciones diferenciales, entre las cuales está la siguiente:

$$x^2(a + bx^n)y'' + x(c + ex^n)y' + (f + gx^n)y = 0. \tag{3.17}$$

Euler busca su solución en forma de serie de potencias

$$y(x) = Ax^\lambda + Bx^{n+\lambda} + Cx^{2n+\lambda} + Dx^{3n+\lambda} + \dots, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Si en la ecuación diferencial (3.17) (y por ende en la serie anterior) elegimos $n = 1$ y fijamos $f = 0$ obtenemos una ecuación diferencial del tipo

$$\sigma(x)y'' + \tau(x)y' + \Lambda y = 0, \tag{3.18}$$

donde σ y τ son polinomios de orden dos a lo sumo¹⁶ y orden uno, respectivamente, y Λ una constante.

La ecuación (3.18) es la que hoy día conocemos como *ecuación de tipo hipergeométrico* y que juega un papel fundamental por sus aplicaciones en muchas ramas de la ciencia (ver, e.g., la magnífica monografía [44]). Sin embargo, es en un tratado presentado a la Academia de Ciencias de San Petersburgo en 1778 [23] cuando Euler hace el primer estudio de la serie hipergeométrica¹⁷

$$y(x) = {}_2F_1\left(\begin{matrix} \alpha, \beta \\ \gamma \end{matrix} \middle| x\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_n (\beta)_n}{(\gamma)_n} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{\alpha\beta}{1\gamma}x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{2\gamma(\gamma+1)}x^2 + \dots \quad (3.19)$$

y donde prueba, en particular, que dicha serie es solución de la siguiente ecuación diferencial del tipo (3.18):

$$x(1-x)y'' + (\gamma - (\alpha + \beta + 1)x)y' - \alpha\beta y = 0. \quad (3.20)$$

La serie (3.19) y la ecuación (3.20) se conocen como serie *hipergeométrica* y ecuación diferencial *hipergeométrica* de Gauss, respectivamente, debido al pormenorizado estudio que hizo el «*Princeps mathematicorum*» de las mismas en 1812 (ver [27] y [28]). Entre otras muchas propiedades, Gauss muestra que casi todas las funciones elementales se pueden escribir en función de ${}_2F_1$, e.g.,

$$\frac{1}{(1-x)^a} = {}_2F_1\left(\begin{matrix} a, b \\ b \end{matrix} \middle| x\right), \quad \ln(1-x) = -x {}_2F_1\left(\begin{matrix} 1, 1 \\ 2 \end{matrix} \middle| x\right), \quad \arcsen x = x {}_2F_1\left(\begin{matrix} 1/2, 1/2 \\ 3/2 \end{matrix} \middle| x^2\right).$$



J. Wallis

Conviene hacer notar que el término de *sucesión hipergeométrica* lo acuñó J. Wallis en su influyente trabajo *Arithmetica Infinitorum* de 1656, y que luego explicó magistralmente en su *A Treatise of Algebra* de 1685 (pp. 315–316) para referirse a sucesiones que van más rápido que las geométricas «*cuando el multiplicador continuamente crece (o continuamente decrece)*»¹⁸ como en *1, 2, 6, 24, 120, etc.*». Hoy día el término *sucesión hipergeométrica* se usa para las sucesiones $(a_n)_n$ tales que

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(a_1 + n) \cdots (a_r + n)x}{(b_1 + n) \cdots (b_p + n)(n+1)},$$

de forma que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ toma la forma (3.15). Dicha definición, esencialmente, es la que usó Euler en su

¹⁶Dado que la ecuación diferencial (3.17) ha de ser de orden dos, se asume que las constantes a y b no pueden ser ambas iguales a cero.

¹⁷Dicho tratado apareció publicado póstumamente en 1794.

¹⁸Para una progresión geométrica el *multiplicador* es constante ya que, como vimos, $a_{n+1} = qa_n$.

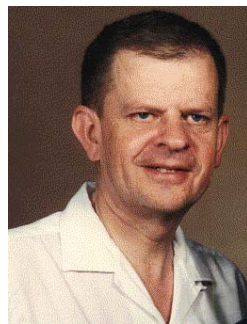
memoria *De termino generali serierum hypergeometricarum* escrita en 1776 publicada y póstumamente en 1793 [22]. Precisamente Euler, en [22], describe una progresión hipergeométrica $(a_n)_n$ como aquella cuyo n -ésimo término es de la forma

$$a_n = a(a + b)(a + 2b)(a + 3b) \cdots (a + (n - 1)b),$$

que es esencialmente el símbolo de Pochhammer (3.16) que usamos hoy día —compárese con la expresión (3.16)—.

Antes de continuar nuestra historia de las q -series conviene hacer notar que la importancia de la ecuación (3.18) va más allá de las propias matemáticas, apareciendo en un sinnúmero de modelos físicos (y no sólo). La razón fundamental de este hecho la explica muy bien el matemático estadounidense Richard Askey [8, pág. xv]:

Esta ecuación diferencial tiene puntos singulares regulares en $x = 0, 1, \infty$. Riemann probó que el requisito de que una ecuación diferencial tuviese puntos singulares regulares en tres puntos dados, y que cualquier otro punto complejo sea un punto regular, es una restricción tan fuerte que la ecuación diferencial en cuestión ha de ser necesariamente la ecuación hipergeométrica con las singularidades movidas a dichos tres puntos. Es muy infrecuente que ecuaciones diferenciales con cuatro o más puntos singulares tengan soluciones en serie con coeficientes conocidos o con una representación integral explícita. Esto explica en parte por qué la función hipergeométrica clásica aparece en muchos sitios que parecen no tener nada que ver entre sí. La ecuación diferencial que satisfacen (la hipergeométrica) es la más general de su tipo que tiene soluciones con propiedades buenas.



R. Askey

Pero volvamos a las q -series (3.14). Las series hipergeométricas básicas fueron introducidas por E. Heine para el caso particular $r = 2$ y $p = 1$ en 1846, estudio que luego amplió en un segundo trabajo de 1847 [35]. En su trabajo, Heine consideró la serie (3.14) con $r = 2$, $p = 1$ y $a_1 = q^a$, $a_2 = q^b$ y $b_1 = q^c$, i.e.,

$$\begin{aligned} {}_2\phi_1\left(\begin{matrix} q^a, q^b \\ q^c \end{matrix} \middle| q, x\right) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(q^a; q)_n (q^b; q)_n}{(q; q)_n (q^c; q)_n} x^n \\ &= 1 + \frac{(1 - q^a)(1 - q^b)}{(1 - q)(1 - q^c)} x + \frac{(1 - q^a)(1 - q^{a+1})(1 - q^b)(1 - q^{b+1})}{(1 - q)(1 - q^2)(1 - q^c)(1 - q^{c+1})} x^2 + \dots \end{aligned} \tag{3.21}$$

Como se tiene que

$$\lim_{q \rightarrow 1} \frac{1 - q^x}{1 - q} = x \quad \Rightarrow \quad \lim_{q \rightarrow 1} \frac{(q^a; q)_n}{(q^b; q)_n} = \frac{(\alpha)_n}{(\beta)_n},$$

entonces

$$\lim_{q \rightarrow 1} {}_2\phi_1 \left(\begin{matrix} q^a, q^b \\ q^c \end{matrix} \middle| q, x \right) = {}_2F_1 \left(\begin{matrix} a, b \\ b \end{matrix} \middle| x \right).$$

De forma análoga se tiene que, cuando $q \rightarrow 1$, la serie (3.14) se convierte en la serie (3.15). Aunque no vamos a entrar en detalles conviene hacer notar que, en adelante, vamos a asumir que tanto las series hipergeométricas y sus correspondientes q -análogos son convergentes en cierta región del plano complejo. El lector interesado puede encontrar más detalles al respecto en la monografía [25, pág. 5].

En su trabajo de 1846 (de sólo tres páginas), Heine establece la relación de la serie (3.21) con las fracciones continuas de las que hablaremos más adelante, y pospone hasta su artículo de 1847 [35] el estudio detallado de la misma. Entre las muchas cosas que prueba Heine en dicho segundo artículo, se encuentra que la función ${}_2\phi_1$ satisface una ecuación en diferencias que, en notación moderna, tiene la forma



E. Heine

$$x(q^c - q^{a+b+1}x)D_q^2u + \left(\frac{1-q^c}{1-q} + \frac{(1-q^a)(1-q^b) - (1-q^{a+b+1})}{1-q} x \right) D_q u - \frac{(1-q^a)(1-q^b)}{(1-q)^2} u = 0, \quad (3.22)$$

donde D_q es la q -derivada de Jackson¹⁹

$$D_q f(x) = \frac{f(x) - f(qx)}{(1-q)x}, \quad x \neq 0.$$

Nótese que si f es diferenciable en x , $\lim_{q \rightarrow 1} D_q f(x) = f'(x)$. Usando lo anterior es fácil comprobar que si tomamos el límite $q \rightarrow 1$ en (3.22) recuperamos la ecuación hipergeométrica (3.20). Para saber más sobre el q -cálculo en general y de las propiedades de las q -derivadas en particular consultar, e.g., [39].

Otra propiedad interesante que tiene la función ${}_2\phi_1$ es que si le aplicamos consecutivamente el operador D_q se tiene

$$D_q^n {}_2\phi_1 \left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} \middle| q, x \right) = \frac{(a; q)_n (b; q)_n}{(c; q)_n (1-q)^n} {}_2\phi_1 \left(\begin{matrix} aq^n, bq^n \\ cq^n \end{matrix} \middle| q, x \right),$$

de donde se obtiene, haciendo el cambio $a = q^a$, $b = q^b$, $c = q^c$ y tomando límites $q \rightarrow 1$, la conocida fórmula para la función hipergeométrica de Gauss

$$\frac{d^n}{dx^n} {}_2F_1 \left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} \middle| x \right) = \frac{(a)_n (b)_n}{(c)_n} {}_2F_1 \left(\begin{matrix} a+n, b+n \\ c+n \end{matrix} \middle| x \right).$$

¹⁹Si f es diferenciable en 0, se define $D_q f(0) = f'(0)$.

Sin duda el resultado más celebrado sobre q -series básicas es el q -análogo del teorema del binomio, que escribiremos de la siguiente forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a; q)_n}{(q; q)_n} x^n = {}_2\phi_1\left(\begin{matrix} a, b \\ b \end{matrix} \middle| q, x\right) = {}_1\phi_0\left(\begin{matrix} a \\ - \end{matrix} \middle| q, x\right) = \frac{(ax; q)_{\infty}}{(x; q)_{\infty}}, \quad |x|, |q| < 1. \quad (3.23)$$

La fórmula anterior se puede interpretar de dos formas. La primera como una fórmula para sumar una serie infinita dando como resultado el cociente de dos productos infinitos y viceversa, escribir el cociente de la derecha como una serie de potencias; y, la segunda, como una función generatriz para la sucesión $(a; q)_n / (q; q)_n$.

Existe una prueba muy sencilla de la fórmula (3.23) cuya idea mostraremos a continuación [12, pág. 8]. Sea $F(x)$ el miembro derecho de (3.23), que asumiremos podemos escribir como una serie de potencias

$$F(x) = \frac{(ax; q)_{\infty}}{(x; q)_{\infty}} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad |x| < 1.$$

De (3.23) y de la expresión anterior se deduce que si $x = 0$ entonces $a_0 = 1$. Además, para la función $F(x)$ se tiene que

$$(1 - x)F(x) = (1 - ax)F(qx) \quad \Rightarrow \quad a_n = \frac{1 - aq^{n-1}}{1 - q^n} a_{n-1}, \quad n \geq 1.$$

La igualdad de la derecha se obtiene al igualar los coeficientes de las potencias x^n en la ecuación de la izquierda. Iterando la fórmula anterior y usando que $a_0 = 1$ obtenemos el resultado. Otra prueba muy sencilla se puede encontrar en [25, pág. 9]. Nótese que si tomamos el límite $q \rightarrow 1$ en (3.23) obtenemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_n}{n!} x^n = {}_2F_1\left(\begin{matrix} a, b \\ b \end{matrix} \middle| x\right) = \frac{1}{(1 - x)^a},$$

que no es más que la fórmula del binomio generalizada de Newton para exponentes negativos. Si tomamos $a = 0$ en (3.23) obtenemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(q; q)_n} = \frac{1}{(x; q)_{\infty}},$$

que es otra de las conocidas fórmulas de Euler [24, §304, pág. 257]. Esta fórmula se suele considerar como el q -análogo de la función exponencial, pues haciendo el cambio $x \mapsto (1 - q)x$ y tomando límites cuando $q \rightarrow 1$ se tiene²⁰

$$\lim_{q \rightarrow 1} \frac{(1 - q)^n}{(q; q)_n} = \frac{1}{n!} \quad \Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1 - q)^n}{(q; q)_n} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x.$$

²⁰Para ver algunas propiedades de esta función el lector puede consultar, e.g., [39, §9, pág. 29–32].

El lector avisado se habrá dado cuenta que en varios de los cálculos anteriores hemos intercambiado límites y sumas sin preocuparnos en lo absoluto de si dicha operación está o no permitida. Igualmente, en la demostración de (3.23) hemos asumido, por ejemplo, que la función $F(x)$ se puede desarrollar en serie de potencias, lo cual es algo que en lo absoluto es obvio. A modo de justificación digamos que en nuestra exposición vamos a seguir el espíritu euleriano, dejando la explicación rigurosa para los lectores.²¹

Existe una forma curiosa de escribir el q -análogo del símbolo de Pochhammer (3.4):

$$(x; q)_n = \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q (-1)^k q^{k(k-1)/2} x^k, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.24)$$

donde $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$ son los q -análogos de los coeficientes binomiales definidos por

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{(q; q)_n}{(q; q)_k (q; q)_{n-k}} = \frac{(1 - q^n)(1 - q^{n-1}) \dots (1 - q^{n-k+1})}{(1 - q)(1 - q^2) \dots (1 - q^k)}, \quad 0 \leq k \leq n.$$

Nótese que, si $q \rightarrow 1$,

$$\lim_{q \rightarrow 1} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad \text{y} \quad \lim_{q \rightarrow 1} (x; q)_n = (1 - x)^n.$$

Luego (3.24) se transforma en $(1 - x)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k$, que no es más que la fórmula del binomio para un exponente entero positivo.

Como consecuencia del teorema de binomio (3.23) se tiene la transformación de Heine

$${}_2\phi_1 \left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} \middle| q, x \right) = \frac{(b, ax; q)_\infty}{(c, x; q)_\infty} {}_2\phi_1 \left(\begin{matrix} c/b, x \\ ax \end{matrix} \middle| q, b \right), \quad |x| < 1, |b| < 1. \quad (3.25)$$

Esta fórmula (en realidad, una equivalente) se puede encontrar en el segundo cuaderno de Ramanujan, concretamente en la sexta entrada del capítulo 16. De hecho, la entrada cuarta de ese mismo cuaderno es otra de las fórmulas más conocidas de las q -series: el q -análogo de la fórmula de la suma de Gauss para la serie hipergeométrica (3.19),

$${}_2\phi_1 \left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix} \middle| q, \frac{c}{ab} \right) = \frac{(c/a; q)_\infty (c/b; q)_\infty}{(c; q)_\infty (c/(ab); q)_\infty}, \quad \left| \frac{c}{ab} \right| < 1. \quad (3.26)$$

Probablemente la prueba más simple de la fórmula anterior es usar, como hizo Heine (ver e.g. [25]), la identidad (3.25) tomando $x = c/(ab)$ y luego aplicar a la serie obtenida en el miembro derecho el q -teorema del binomio (3.23). Si en (3.26) hacemos

²¹En el caso de la prueba del q -análogo del teorema del binomio el lector puede consultar, como ya mencionamos, [12, pág. 9] o [25]. Para el paso de los límites nos remitiremos al acertado comentario de Berndt [12, pág. 9]: «En la teoría de q -series siempre se asume que tomar límites bajo el signo de suma [...] está justificado, pero casi nadie lo hace», para a continuación explicar un caso concreto de cómo habría que justificar dicho límite.

el cambio $a = q^a, b = q^b, c = q^c$ y tomamos el límite $q \rightarrow 1$, obtenemos la fórmula de Gauss para la suma de la función ${}_2F_1$:

$${}_2F_1(a, b; c; 1) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c - a - b)}{\Gamma(c - a)\Gamma(c - b)}, \quad \text{Re}(c) > \text{Re}(a + b).$$

Pasar de (3.26) a la fórmula anterior no es nada fácil. Quizá la forma más sencilla de hacerlo consiste en usar la definición de las q -funciones Gamma Γ_q de Thomae

$$\Gamma_q(x) = (1 - q)^{1-x} \prod_{n=0}^{\infty} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q^{n+x}} = (1 - q)^{1-x} \frac{(q; q)_{\infty}}{(q^x; q)_{\infty}}, \quad q \in (0, 1), \quad (3.27)$$

y luego usar que $\lim_{q \rightarrow 1^-} \Gamma_q(x) = \Gamma(x)$ (ver, e.g., [25, pág. 21]).

4. LAS EXTENSIONES DE LAS INTEGRALES BETA DE EULER

El q -análogo de la función Gamma de Euler introducido en (3.27) está relacionado con otro de los resultados casi *milagrosos* de Ramanujan. Ramanujan se interesó por la integral

$$f(a) = \int_0^{\infty} t^{x-1} \frac{(-at; q)_{\infty}}{(-t; q)_{\infty}} dt, \quad a = q^j, \quad (4.1)$$

para la cual encuentra el valor

$$\frac{(a; q)_{\infty} (q^{1-x}; q)_{\infty}}{(q; q)_{\infty} (aq^{-x}; q)_{\infty}},$$

que, por supuesto, no demuestra. Hemos de aclarar que calcular la integral (4.1) no es tarea simple en absoluto. Un caso particular de dicha integral aparece en la carta de Ramanujan a Hardy del 16 de enero de 1913 ya mencionada. Concretamente, la cuarta fórmula que aparece en dicha carta es

$$\int_0^{\infty} \frac{dt}{(1 + t^2)(1 + q^2 t^2)(1 + q^4 t^2) \cdots} = \frac{\pi}{2(1 + q + q^3 + \cdots + q^{\frac{n(n-1)}{2}} + \cdots)}, \quad (4.2)$$

resultado que, en su carta de respuesta del 8 de febrero de 1913, Hardy catalogaba «en la clase (2)»:

Hay resultados que, hasta donde yo sé, son nuevos e interesantes, pero interesantes más por su curiosidad y dificultad aparente que por su importancia [...]

y cuya demostración le requería. Dicha fórmula es un caso particular de (4.1) cuando $a = 0$ y $n = 1/2$. La prueba no era nada trivial. Tal es así que el propio Ramanujan en 1915, ya en Inglaterra, publicó el resultado en [48, §6] sin demostración, argumentando que su propia prueba se basaba en cierta fórmula general cuya veracidad no había estudiado por completo para a continuación referirse a una prueba que Hardy presentaba usando el teorema de Cauchy en un artículo justo a continuación

13. $1 - ax + a^2x^2 - a^3x^3 + a^4x^4 - \dots$
 $= \frac{1}{1+a} + \frac{ax}{1+a} + \frac{a^2x^2}{1+a} + \frac{a^3x^3}{1+a} + \frac{a^4x^4}{1+a} + \dots$
 $D_{2n} = 1 + ax^{2n} \frac{1-x^{2n}}{1-x} + a^2x^{4n} \frac{(1-x^{2n})(1-x^{2n-1})}{(1-x)(1-x^2)} +$
 $a^3x^{6n} \frac{(1-x^{2n})(1-x^{2n-1})(1-x^{2n-2})}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)} + \dots$
 $D_{2n+1} = 1 + (ax)^2x^{2n} \frac{1-x^{2n}}{1-x} + (ax)^4x^{4n} \frac{(1-x^{2n})(1-x^{2n-1})}{(1-x)(1-x^2)} +$
 $(ax)^6x^{6n} \frac{(1-x^{2n})(1-x^{2n-1})(1-x^{2n-2})}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)} + \dots$
14. $\int_0^{\infty} \frac{\Pi(ax, a)}{x^n \Pi(x, a)} dx = \frac{\pi}{\sin \pi n} \cdot \frac{\Pi(-a, a) \Pi(-a^n, a)}{\Pi(-n, a) \Pi(-an^{-1}, a)}$

Figura 7: Fragmento de la página 191 del segundo cuaderno manuscrito de Ramanujan, donde aparece la integral (4.1) (entrada 14) [11, III, capítulo 16, pág. 29].

del suyo. La fórmula (4.1) de la integral de Ramanujan aparecía en la entrada 14 del tercero de los cuadernos de Ramanujan (ver figura 7).

Existe una forma muy elegante de encontrar el valor de (4.1) debida a R. Askey [7] cuya idea pasamos a explicar a continuación (los detalles el lector los puede encontrar en el trabajo de Askey). Definamos la función

$$f(a) = \int_0^{\infty} t^{x-1} \frac{(-at; q)_{\infty}}{(-t; q)_{\infty}} dt, \quad x > 0, \quad |a| < q^x, \quad q \in (0, 1).$$

Usando las propiedades los q -símbolos de Pochhammer se comprueba que $f(a)$ satisface la ecuación en diferencias

$$f(a) = (1-a)f(aq) + aq^{-x}f(a),$$

de donde se sigue

$$f(a) = \frac{(1-a)f(aq)}{(1-aq^{-x})} = \frac{(a; q)_{\infty}}{(aq^{-x}; q)_{\infty}} f(0). \quad (4.3)$$

El problema es calcular $f(0)$, algo no trivial. Precisamente el caso particular de $f(0)$ para $x = 1/2$ era la integral (4.2) que aparecía en la primera carta de Ramanujan a Hardy. Sin embargo, Askey toma un atajo y calcula $f(q)$, que resulta ser una integral conocida:

$$f(q) = \int_0^{\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t} dt = \frac{\pi}{\operatorname{sen}(\pi x)}.$$

Entonces, de (4.3) se tiene que

$$f(0) = \frac{(q^{1-x}; q)_{\infty}}{(q; q)_{\infty}} f(q),$$

y, por tanto,

$$f(a) = \int_0^\infty t^{x-1} \frac{(-at; q)_\infty}{(-t; q)_\infty} dt = \frac{(a; q)_\infty (q^{1-x}; q)_\infty}{(q; q)_\infty (aq^{-x}; q)_\infty}, \quad x > 0, |a| < q^x, q \in (0, 1).$$

Para el caso cuando $a = q^{x+y}$ se puede comprobar que la integral de Ramanujan toma el valor

$$\int_0^\infty t^{x-1} \frac{(-tq^{x+y}; q)_\infty}{(-t; q)_\infty} dt = \frac{\Gamma_q(y)\Gamma(x)\Gamma(1-x)}{\Gamma_q(x+y)\Gamma(x+y)},$$

por lo que es un q -análogo²² de la función beta $B(x, y)$ de Euler ya que, si tomamos $q \rightarrow 1$, esta se convierte en la expresión integral

$$\int_0^\infty \frac{t^{x-1}}{(1-t)^{x+y}} dt = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} = B(x, y).$$

El propio Askey, junto a J. A. Wilson, encontraron en 1985 [9] una extensión de la q -beta integral de Ramanujan. Definamos la función $h(x; \alpha)$ por

$$h(x; \alpha) = \prod_{k=0}^\infty (1 - 2\alpha x q^k + \alpha^2 q^{2k}) = (\alpha e^{i\theta}; q)_\infty (\alpha e^{-i\theta}; q)_\infty, \quad x = \cos \theta,$$

y sea $|q| < 1$ y a, b, c y d números complejos tales que $|abcd/q| < 1$. Entonces, si definimos la función

$$w(x; a, b, c, d | q) = \frac{h(x; 1)h(x; -1)h(x; q^{1/2})h(x; -q^{1/2})}{h(x; a)h(x; b)h(x; c)h(x; d)} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

tenemos [25, pág. 154]

$$\int_{-1}^1 w(x; a, b, c, d | q) dx = \frac{2\pi(abcd; q)_\infty}{(q; q)_\infty (ab; q)_\infty (ac; q)_\infty (ad; q)_\infty (bc; q)_\infty (bd; q)_\infty (cd; q)_\infty}.$$

La integral anterior se conoce hoy día como integral de Askey-Wilson, y juega un papel relevante dentro de la teoría de las q -series hipergeométricas básicas. En su trabajo [9], Askey y Wilson probaron que existía una familia de polinomios, hoy conocidos como polinomios de Askey-Wilson, definidos por ($x = \cos \theta$)

$$p_n(\cos \theta; a, b, c, d | q) = \frac{(ab; q)_n (ac; q)_n (ad; q)_n}{a^n} {}_4\phi_3 \left(\begin{matrix} q^{-n}, abcdq^{n-1}, ae^{-i\theta}, ae^{i\theta} \\ ab, ac, ad \end{matrix} \middle| q, q \right), \tag{4.4}$$

tales que

$$\int_{-1}^1 p_n(x; a, b, c, d | q) p_m(x; a, b, c, d | q) w(x; a, b, c, d | q) dx = d_n \delta_{m,n},$$

²²Una magnífica discusión de lo que constituye o no un q -análogo, término que ha aparecido ya varias veces, se puede encontrar en [13, §4].

donde $\delta_{m,n}$ es el símbolo de Kronecker ($\delta_{m,n} = 1$ si $n = m$ y 0 en otro caso), y

$$d_n := \frac{2\pi(q; q)_n(ab; q)_n(ac; q)_n(ad; q)_n(bc; q)_n(bd; q)_n(cd; q)_n(abcd; q)_\infty}{(q; q)_\infty(ab; q)_\infty(ac; q)_\infty(ad; q)_\infty(bc; q)_\infty(bd; q)_\infty(cd; q)_\infty(abcdq^{-1}; q)_n} \frac{(1 - abcdq^{-1})}{(1 - abcdq^{2n-1})}.$$

Es decir, los polinomios de Askey-Wilson son polinomios ortogonales con respecto a la función peso $w(x; a, b, c, d | q)$. Esta familia de polinomios ortogonales constituye la familia más general de lo que hoy se denominan q -polinomios hipergeométricos clásicos (ver, e.g., [1], [40]).

Es interesante hacer notar que los polinomios de Askey-Wilson (4.4) satisfacen una ecuación en diferencias que se obtiene de la ecuación hipergeométrica (3.18) al discretizarla en una *red uniforme*. El lector interesado en el tema puede consultar [1, §5] o [44, §3]. Para más detalles sobre los polinomios ortogonales consultar, por ejemplo, [1], [15], [40] o [44].

5. LA SUMA ${}_1\psi_1$ DE RAMANUJAN

En este apartado vamos a considerar otro tipo de series algo más complicadas que las q -hipergeométricas básicas: las q -series bilaterales básicas definidas como sigue:

$${}_r\psi_p \left(\begin{matrix} a_1, a_2, \dots, a_r \\ b_1, b_2, \dots, b_p \end{matrix} \middle| q, x \right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(a_1; q)_n \cdots (a_r; q)_n}{(b_1; q)_n \cdots (b_p; q)_n} \left[(-1)^n q^{\frac{n(n-1)}{2}} \right]^{p-r} x^n, \quad (5.1)$$

donde, como antes, los $(a; q)_n$ son los q -análogos de los símbolos de Pochhammer (3.4) para $n \geq 0$, y

$$(a; q)_{-n} = \frac{(-q/a)^n q^{\frac{n(n-1)}{2}}}{(q/a; q)_n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

cuando en $(a; q)_n$ la n es un entero negativo. Usando la expresión anterior la serie (5.1) se puede reescribir como

$$\begin{aligned} {}_r\psi_p \left(\begin{matrix} a_1, a_2, \dots, a_r \\ b_1, b_2, \dots, b_p \end{matrix} \middle| q, x \right) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1; q)_n \cdots (a_r; q)_n}{(b_1; q)_n \cdots (b_p; q)_n} \left[(-1)^n q^{\frac{n(n-1)}{2}} \right]^{p-r} x^n \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(q/b_1; q)_n \cdots (q/b_p; q)_n}{(q; q)_n (1/a_1; q)_n \cdots (q/a_r; q)_n} \left[\frac{b_1 \cdots b_p}{a_1 \cdots a_r x} \right]^n. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Lo primero que conviene saber sobre estas series es que las condiciones de convergencia son bastante más complicadas que las de las q -series básicas (3.14). Nosotros nos vamos a restringir al caso particular $r = p$ y $q \in (0, 1)$. En este caso se puede comprobar que la serie ${}_p\psi_p$ converge para $\left| \frac{b_1 \cdots b_p}{a_1 \cdots a_p} \right| < |x| < 1$, condición que asumiremos en adelante. Nótese también que si alguno de los b_i es igual a q para algún i , entonces la segunda serie en (5.2) se anula y la primera se convierte en la q -serie básica.

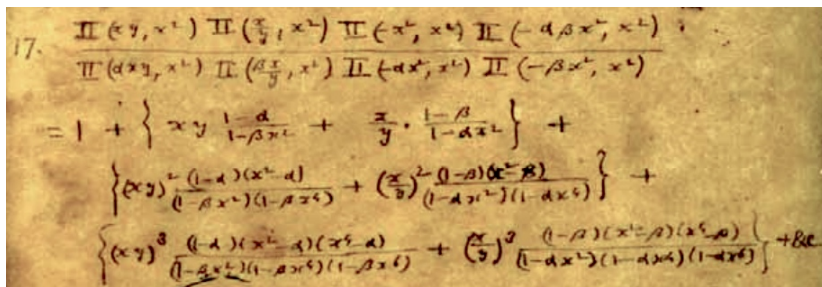


Figura 8: Fragmento de la página 192 del segundo cuaderno manuscrito de Ramanujan, donde aparece su fórmula para la serie ${}_1\psi_1$ (entrada 17) [11, III, capítulo 16, pág. 32].

¿Por qué nos interesan estas series? La razón fundamental tiene que ver otra vez con lo que hoy se conoce como la *suma bilateral* ${}_1\psi_1$ de Ramanujan:

$${}_1\psi_1\left(\begin{matrix} a \\ b \end{matrix} \middle| q, x\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(a; q)_n}{(b; q)_n} x^n = \frac{(q; q)_{\infty} (b/a; q)_{\infty} (ax; q)_{\infty} (q/(ax); q)_{\infty}}{(b; q)_{\infty} (q/a; q)_{\infty} (x; q)_{\infty} (b/(ax))_{\infty}}, \quad (5.3)$$

válida para $|b/a| < |x| < 1$ y $|q| < 1$.

Dicha fórmula aparece en la entrada 17 del capítulo 16 del tercer cuaderno de Ramanujan [11] (una foto de dicha entrada se puede ver en la figura 8) sin ninguna prueba o indicación, como era costumbre en Ramanujan. Este importante teorema fue publicado por primera vez por Hardy en [31, cap. 12, pág. 122, ec. (12.12.2)] donde lo anunciaba como «una notable fórmula [de Ramanujan] con muchos parámetros», y aunque no la probaba afirmaba que era consecuencia del q -análogo del teorema del binomio (3.23).

En la actualidad se conocen un sinnúmero de pruebas de este resultado, siendo probablemente la más sencilla la mencionada por Hardy. Los primeros en probarla (prácticamente al mismo tiempo y de forma independiente) fueron W. Hahn en 1949 y M. Jackson en 1950.²³ Una prueba muy sencilla usando el q -análogo del teorema del binomio se puede consultar en [41, pág. 57] y otra, muy parecida a la prueba del teorema del binomio que vimos anteriormente, en [25, pág. 179].

Como corolarios de la fórmula de Ramanujan (5.3) se tienen, por un lado, el q -análogo del teorema del binomio (3.23) (basta poner $b = 1$ en (5.3)) y, por el otro, la fórmula del producto triple de Jacobi (3.11). Para obtener esta última podemos hacer lo siguiente [25, pág. 140]: primero sustituimos $a \mapsto 1/a$ y $x \mapsto ax$ en (5.3), obteniéndose que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(1/a; q)_n}{(b; q)_n} (ax)^n = \frac{(q; q)_{\infty} (ab; q)_{\infty} (x; q)_{\infty} (q/x; q)_{\infty}}{(b; q)_{\infty} (aq; q)_{\infty} (ax; q)_{\infty} (b/x)_{\infty}},$$

²³El artículo de Hahn fue publicado en el volumen 2 de la *Mathematische Nachrichten* y tiene acuse de recibo del 20 de junio de 1949. La prueba de Jackson fue publicada en el volumen 25 del *Journal of the London Mathematical Society* de 1950 y su fecha de recepción es del 31 de agosto de 1949.

con $|b| < |x| < |1/a|$. A continuación escogemos $b = 0$ y cambiamos q por q^2 y x por xq , lo que nos conduce a la expresión

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} (1/a; q^2)_n a^n q^n x^n = \frac{(q^2; q^2)_{\infty} (qx; q^2)_{\infty} (q/x; q^2)_{\infty}}{(aq; q)_{\infty} (ax; q)_{\infty}}.$$

Si ahora tomamos el límite $a \rightarrow 0$ y usamos que $\lim_{a \rightarrow 0} (1/a; q^2)_n a^n = (-1)^n q^{n(n-1)}$, se obtiene (3.12).

La suma ${}_1\psi_1$ de Ramanujan es la identidad más usada a la hora de trabajar con series bilaterales; es, en palabras de Hardy, una *fórmula notable* cuya importancia es equiparable al q -análogo del teorema del binomio. Su uso ha sido intensivo a la hora de probar gran cantidad de resultados en la teoría analítica de números (ver, e.g., [12]).

6. LAS IDENTIDADES DE ROGERS-RAMANUJAN

Otro de los sorprendentes resultados de Ramanujan está relacionado con las fracciones continuas. Por ejemplo, en su primera carta a Hardy, Ramanujan le escribe dos resultados altamente no triviales

$$\frac{e^{-2\pi/5}}{1 + \frac{e^{-2\pi}}{1 + \frac{e^{-4\pi}}{1 + \frac{e^{-6\pi}}{1 + \dots}}}}} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}} - \frac{\sqrt{5}+1}{2}, \quad \frac{e^{-\pi/5}}{1 - \frac{e^{-\pi}}{1 + \frac{e^{-2\pi}}{1 - \frac{e^{-3\pi}}{1 + \dots}}}}} = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}} - \frac{\sqrt{5}-1}{2} \quad (6.1)$$

que Hardy vuelve a catalogar como problemas «de tipo (2)» (ver sección 4). Tras recibir la respuesta de Hardy a su primera carta, Ramanujan le envía una nueva carta aclarando algunas cuestiones y agregando nuevos teoremas. Entre ellos figuraba una fracción continua todavía más desconcertante:

$$\frac{e^{-2\pi/\sqrt{5}}}{1 + \frac{e^{-2\pi\sqrt{5}}}{1 + \frac{e^{-4\pi\sqrt{5}}}{1 + \dots}}} = \frac{\sqrt{5}}{1 + \sqrt[5]{5^{3/4} \left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{5/2}} - 1} - \frac{\sqrt{5}+1}{2}. \quad (6.2)$$

Años más tarde, en su libro [31, pág. 9], Hardy describió su reacción al leerlas²⁴:

Las fórmulas (1.10) a (1.13) son de un nivel muy diferente y obviamente difíciles y profundas. [...] (1.10) a (1.12) me derrotaron completamente. Nunca había visto nada como ellas. Una simple mirada era suficiente para mostrar que sólo podían haber sido escritas por un matemático de la categoría más alta. Debían ser ciertas, puesto que, si no lo fueran, nadie tendría la imaginación para inventarlas.

²⁴Las ecuaciones (1.11) y (1.12) a las que se refiere Hardy en [31, pág. 9] son ecuación de la izquierda en (6.1) y la ecuación (6.2), respectivamente.

Las fórmulas anteriores son casos particulares de lo que hoy se denomina fracción continua de Rogers-Ramanujan. Antes de ahondar en esta cuestión conviene hacer algunas aclaraciones para el lector desconocedor del tema.

Una fracción continua es una expresión de la forma

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \frac{a_3}{b_3 + \dots}}} = b_0 + \frac{a_1}{b_1 +} \frac{a_2}{b_2 +} \frac{a_3}{b_3 +} \dots, \tag{6.3}$$

donde $(a_n)_n$ y $(b_n)_n$ son, en general, sucesiones de números complejos (la expresión de la derecha la escogeremos por razones de espacio).

Las fracciones continuas pueden ser finitas o infinitas. Por ejemplo, si $a_n = b_n = 0$ para todo $n \geq N$, entonces tendremos que la expresión anterior «termina»

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1 +} \frac{a_2}{b_2 +} \frac{a_3}{b_3 +} \dots \frac{a_N}{b_N} = \frac{P_N}{Q_N}.$$

Dada una fracción continua infinita (6.3), denominaremos N -ésima fracción parcial al cociente P_N/Q_N definido mediante la fórmula anterior. Diremos que la fracción continua (6.3) converge si existe el $\lim_{N \rightarrow \infty} P_N/Q_N$. Se puede comprobar, e.g. [12, pág. 154], que las sucesiones P_n y Q_n satisfacen las relaciones

$$P_n = b_n P_{n-1} + a_n P_{n-2} \quad \text{y} \quad Q_n = b_n Q_{n-1} + a_n Q_{n-2}, \quad n \geq 0,$$

$P_{-1} = 0, Q_{-1} = 1, P_0 = b_0$ y $Q_0 = 1$. Las relaciones anteriores permiten calcular de forma rápida y eficientes las fracciones parciales de la correspondiente fracción continua infinita.

Dos ejemplos clásicos de fracciones continuas son

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2+} \frac{1}{2+} \frac{1}{2+} \frac{1}{2+} \dots, \quad \frac{\sqrt{5} + 1}{2} = 1 + \frac{1}{1+} \frac{1}{1+} \frac{1}{1+} \frac{1}{1+} \dots.$$

Para *probar* las fórmulas anteriores podemos hacer lo siguiente: Denotemos por x a la primera de las dos fracciones continuas anteriores; entonces $x = 1 + 1/(1 + x)$, de donde se tiene que $x^2 = 2$ y, por tanto, $x = \sqrt{2}$ (la raíz negativa queda descartada pues obviamente todas las fracciones parciales son positivas luego su límite no puede ser negativo). Análogamente, para la segunda se obtiene la ecuación $x = 1 + 1/x$, de donde se sigue el resultado. Para más información sobre las fracciones continuas el lector puede consultar [51, §5].

Ya estamos en condiciones de escribir la fracción continua de Rogers-Ramanujan

$$R(q) := \frac{q^{1/5}}{1+} \frac{q}{1+} \frac{q^2}{1+} \frac{q^3}{1+} \dots.$$

Dicha fracción continua la introdujo y estudió J. L. Rogers en 1894 [50], aunque la mayoría de los resultados sobre la misma se deben a Ramanujan (por ejemplo, en su

cuaderno perdido hay un sinnúmero de resultados sobre ella, ver [4, cap. 1–5]). En particular, Rogers probó que

$$R(q) = q^{1/5} \frac{(q; q^5)_\infty (q^4; q^5)_\infty}{(q^2; q^5)_\infty (q^3; q^5)_\infty}. \quad (6.4)$$

Ramanujan, en su segunda carta a Hardy, también menciona una fracción continua más general, la hoy conocida como fracción continua generalizada de Rogers-Ramanujan

$$R(q, a) := \frac{1}{1+} \frac{aq}{1+} \frac{aq^2}{1+} \frac{aq^3}{1+} \cdots, \quad |q| < 1.$$

Hardy, en varias cartas, le insistió a Ramanujan que le enviara una prueba entendible de sus resultados acerca de las fracciones continuas anteriores, algo que Ramanujan nunca hizo (ni siquiera durante su estancia en Inglaterra). Tuvieron que ser otros matemáticos los que finalmente probaran los muchos resultados sobre la misma que dejó Ramanujan en sus cuadernos.

La prueba de la fórmula de Rogers-Ramanujan (6.4) precisa de dos identidades: las identidades de Rogers-Ramanujan probadas por primera vez por L. J. Rogers en 1894 [50], y que a su vez había descubierto Ramanujan independientemente (son las entradas 38 (i) y (ii) del tercer cuaderno), que aparecen a continuación:

$$G(q) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2}}{(q; q)_n} = \frac{(q^2; q^5)_\infty (q^3; q^5)_\infty (q^5; q^5)_\infty}{(q; q)_\infty}, \quad (6.5)$$

$$H(q) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2+n}}{(q; q)_n} = \frac{(q; q^5)_\infty (q^4; q^5)_\infty (q^5; q^5)_\infty}{(q; q)_\infty}. \quad (6.6)$$

Rogers en [50] prueba que

$$R(q) = q^{1/5} \frac{H(q)}{G(q)},$$

de donde se sigue (6.4). Existen varias pruebas de este resultado, por ejemplo la incluida en la reedición del tercer cuaderno de Ramanujan [11, entrada 15, pág. 30], en [12, §7.3]. Como anécdota curiosa cabe mencionar que las identidades de Rogers-Ramanujan (6.5) y (6.6) pasaron desapercibidas durante mucho tiempo. Cuenta Hardy en [31, pág. 91] que Ramanujan debía haberlas encontrado antes de 1913 (casi veinte años después de Rogers), pero que no tenía ninguna demostración (y era consciente de ello), y al parecer ninguno de los matemáticos a los que Hardy preguntó conocían alguna. Curiosamente, el propio Ramanujan en 1917, hurgando en viejos volúmenes de los *Proceedings of the London Mathematical Society*, encontró el artículo de Rogers con la prueba de las mismas. Según Hardy, Ramanujan quedó



L. J. Rogers

sorprendido y admirado por el trabajo de Rogers. Tras su descubrimiento, y gracias a la intervención de Hardy, tanto Rogers como Ramanujan publicaron demostraciones alternativas (y mucho más simples) de los resultados originales de Rogers. Dichas pruebas se pueden encontrar en los *Collected Papers* de Ramanujan [34], la de Ramanujan en la página 214 (ver [49]) y la de Rogers en la página 345. La historia completa sobre el artículo de Ramanujan [49] se puede encontrar en [34, pág. 344].

Para terminar este apartado vamos a comentar una de las pruebas más *simples* de las identidades de Rogers-Ramanujan debida al matemático inglés George N. Watson.

Con el objetivo de probar las fórmulas (6.5) y (6.6), Watson en [53] obtiene una fórmula que es capaz de echar atrás al más intrépido de los matemáticos: la fórmula de transformación de Watson para series ${}_8\phi_7$ finitas *muy bien equilibradas*²⁵

$$\begin{aligned}
 {}_8\phi_7 \left(\begin{matrix} a, qa^{1/2}, -qa^{1/2}, b, c, d, e, q^{-n} \\ a^{1/2}, -a^{1/2}, aq/b, aq/c, aq/d, aq/e, aq^{n+1} \end{matrix} \middle| q, \frac{a^2 q^{n+2}}{bcde} \right) \\
 = \frac{(aq, aq/(de); q)_n}{(aq/d, aq/e; q)_n} {}_4\phi_3 \left(\begin{matrix} aq/(bc), d, e, q^{-n} \\ aq/b, aq/c, deq^{-n}/a \end{matrix} \middle| q, q \right).
 \end{aligned}
 \tag{6.7}$$

Para poder entender en su total plenitud el porqué de la afirmación anterior basta echar un vistazo a la definición (3.14). Fórmulas como esta, e incluso más intimidatorias, las podéis encontrar en [25], por ejemplo.

Establecida la fórmula (6.7) la prueba de las identidades anteriores es relativamente sencilla (ver e.g. [10, §8.6, pág. 70] o [25, §2.7, pág. 44]), y consiste, primero, en tomar el límite $b, c, d, e \rightarrow \infty$ en (6.7) para, a continuación, en la expresión obtenida, hacer tender $n \rightarrow \infty$. Por supuesto hay que justificar todos los límites, especialmente el último (el primero es obvio pues es una suma finita). Tras el último límite, la serie resultante se puede sumar gracias al producto triple de Jacobi (3.11).

7. EPÍLOGO

En su magnífico ensayo de 1947 *The Mathematician* [43], J. von Neumann reflexionaba sobre las matemáticas, su papel, y su interacción con las demás ciencias. Al final del mismo hace una reflexión que es muy apropiada para concluir nuestra historia. Decía von Neumann

Creo que es una aproximación relativamente buena a la verdad —que es demasiado complicada para permitir algo más que aproximaciones—, que las ideas matemáticas se originan de la experiencia, aunque la genealogía a veces es larga y oscura. Pero, una vez concebidas, estas comienzan a

²⁵El término original en inglés es: *Watson's transformation formula for a terminating very-well-poised ${}_8\phi_7$ series*. El término «*terminating*» indica que las series *terminan*, es decir, dejan de ser series infinitas y se convierten en sumas finitas de elementos. Ello es consecuencia, como ya mencionamos antes, de que uno de los parámetros del numerador en (3.14), y por tanto en (6.7), es de la forma q^{-n} con $n = 0, 1, 2, \dots$ (ver (3.5)).

vivir una vida peculiar propia, gobernadas por motivaciones casi totalmente estéticas, y es mejor compararlas a lo creativo que con cualquier otra cosa y, en particular, con una ciencia empírica.



J. von Neumann

Podemos tomar como ejemplo la teoría de números o la geometría. Nadie pone en duda hoy día que aprendimos a contar por razones totalmente prácticas, y tampoco que la geometría surgió de la necesidad de estimar el área de las tierras (especialmente las del entorno del Nilo, en el antiguo Egipto) —un magnífico libro que cuenta estas historias y muchas más es el ya mencionado [17]—, pero luego estas cobraron vida propia. Basta admirar tratados como el de Euclides para cerciorarse de ello. Este tema siempre ha generado un debate tremendo entre los matemáticos: hay que hacer matemáticas puras (digamos que *por amor al arte*), o aplicadas (esas que están

directamente relacionadas con el mundo que nos rodea). A lo largo de la historia los matemáticos se han alineado en uno y otro bandos.

Por ejemplo, Joseph Fourier, en su influyente tratado *Théorie analytique de la chaleur* de 1822, afirmaba

El estudio profundo de la naturaleza es el campo más fértil para los descubrimientos matemáticos. Ese estudio ofrece no sólo la ventaja de un objetivo bien definido, sino también la de excluir cuestiones vagas y cálculos inútiles. Es un medio para construir el análisis en sí mismo y para descubrir qué ideas importan verdaderamente y cuáles debe preservar la ciencia. Las ideas fundamentales son aquellas que representan los acontecimientos naturales.

No era de extrañar la posición de Fourier, quien sería lo que hoy llamamos un *matemático aplicado*, ya que a él se debe el descubrimiento de la ecuación que modela la transmisión del calor, así como el método más general para resolverla que seguimos usando hoy día (ver a ese respecto el magnífico trabajo [16]). Sin embargo, no todos los matemáticos estaban de acuerdo con Fourier. Carl G. J. Jacobi, en una carta a Adrien-Marie Legendre fechada el 2 de julio de 1830, escribió

Es cierto que Fourier piensa que el objeto prioritario de la matemática es la utilidad pública y la explicación de los fenómenos naturales; pero un científico como él debería saber que el único objeto de la ciencia es rendir honor al espíritu humano y, sobre esta base, una cuestión de teoría de números es tan importante como una cuestión acerca del sistema del mundo.

Ya vimos algunos de los resultados de Jacobi en este trabajo, resultados tremendamente teóricos que, en apariencia (y sólo en apariencia), nada tienen que ver con el mundo real. De hecho, la aversión a unas matemáticas aplicadas tiene su cumbre en Hardy, quien escribió al final de su libro *Apología de un matemático* (Cambridge University Press, 1940)

*No he hecho nunca nada «útil». Ningún descubrimiento mío ha producido, o va a hacerlo directa o indirecta, para bien o para mal, la menor diferencia en el bienestar del mundo.*²⁶

La predicción sobre la posibilidad de que un descubrimiento a día de hoy no vaya a servir de nada en el futuro es un poco arriesgada. Hardy debía saber, cuando escribió su *Apología* en 1940, que las geometrías no euclidianas «*inventadas*» en el siglo XIX por Nikolái Lobachevski, entre otros, y que en apariencia no tenían ningún interés práctico y sólo servirían probablemente para engrandecer el *espíritu humano*, eran las matemáticas de la Teoría General de la Relatividad de Einstein (y, por tanto, las Matemáticas que explican el funcionamiento de nuestro Universo a gran escala). Precisamente a Lobachevski se le atribuye la siguiente reveladora frase:

No hay rama de la Matemática, por abstracta que sea, que no se aplique algún día a los fenómenos del mundo real.

Pero volvamos a von Neumann, quien continuaba su ensayo de esta forma:

*Cuando una disciplina está durante una segunda y tercera generación inspirada sólo indirectamente por las ideas que proceden de la realidad, está **amenazada por graves peligros**. Se convierte cada vez más en el «arte por el arte». Esto no es necesariamente malo si la disciplina está bajo la influencia de hombres con un criterio extraordinariamente bien desarrollado.*

El mejor ejemplo de lo anterior lo tenemos en Ramanujan. Su influencia fue tan grande, y dejó tal número de interrogantes sin resolver (en sus cuadernos había más de 3000 entradas, muchas de las cuales eran resultados desconocidos y sin probar), que ha mantenido ocupados a decenas de matemáticos de los últimos cien años. De hecho, su trabajo en teoría de números, análisis clásico (y la interacción de ambas, lo que hoy denominamos *teoría analítica de números*) y, sobre todo, su tremenda intuición a la hora de lidiar con las series infinitas ha inspirado, y aún lo sigue haciendo, a muchos matemáticos.

La mejor descripción de lo que significó Ramanujan para las matemáticas las expuso el físico teórico y matemático Freeman Dyson,²⁷ que en su conferencia *A walk through Ramanujan's Garden* del 2 de junio de 1987 en la *Ramanujan Centenary Conference* en la Universidad de Illinois expresó:

Cuando comencé mi paseo por el jardín de Ramanujan hace 47 años, sólo los «Collected Papers» [de Ramanujan] estaban disponibles. Un año después de haber elegido la «Teoría de los números» de Hardy y Wright (Oxford, Clarendon Press, 1938) como premio escolar, gané otro premio. Para el segundo premio, elegí los «Collected Papers» de Ramanujan. Los «Collected Papers» han viajado conmigo desde Inglaterra a América y

²⁶En inglés en el original: *I have never done anything "useful". No discovery of mine has made, or is likely to make, directly or indirectly, for good or ill, the least difference to the amenity of the world.* La traducción está tomada de la primera edición de la Editorial Nivola de 1999.

²⁷Durante el proceso de preparación del presente artículo se conoció la triste noticia del fallecimiento del Prof. Dyson (28 de febrero de 2020).

todavía están tan frescos hoy como en 1940. Cada vez que estoy enojado o deprimido, saco los «Collected Papers» del estante y doy un tranquilo paseo por el jardín de Ramanujan. Recomiendo esta terapia a todos los que sufren dolores de cabeza o de los nervios. Y los artículos de Ramanujan no sólo son una buena terapia para los dolores de cabeza, sino que también están llenos de hermosas ideas que pueden ayudarlos a hacer matemáticas más interesantes.

¿Qué ocurriría no obstante si, según von Neumann, en las matemáticas no se encontrasen dichos *hombres con un criterio extraordinariamente bien desarrollado*? Entonces habría que retornar a la fuente. En palabras del *bueno* de Johnny:

Pero existe un grave peligro de que la materia evolucione a lo largo de la línea de mínima resistencia. A gran distancia de su origen empírico, o después de muchas reproducciones «abstractas», un tema matemático está en peligro de degeneración. Siempre que se alcance este punto, me parece que el único remedio es el retorno rejuvenecedor a la fuente, la reinyección de ideas más o menos directamente empíricas.



F. Dyson

Me gustaría terminar este artículo sobre q -series con las palabras de Etingof, Frenkel y Kirillov, quienes en el prólogo de su libro [19] escribieron

En ese momento, los tres ya estábamos gravemente afectados por la « q -enfermedad», una peligrosa enfermedad matemática cuya primera víctima fue Euler, pero que fue diagnosticada por primera vez por Richard Askey. Los matemáticos que trabajan en prácticamente todos los campos, ya sea álgebra, geometría, análisis, ecuaciones diferenciales —el que se os ocurra— son vulnerables a su encanto seductor. El primer síntoma de la q -enfermedad es que un día te das cuenta de que la mayoría de los resultados obtenidos o adquiridos durante tu vida matemática admiten una deformación q . La segunda etapa está indicada por la idea de que el caso q es mucho más interesante.

Espero que tras leer este breve trabajo el lector quede, aunque sea levemente, afectado por la q -enfermedad.

AGRADECIMIENTOS: El autor quiere agradecer a Antonio Durán (U. de Sevilla) su invitación a dar la conferencia que ha sido la semilla del presente trabajo durante las *Jornadas del año Ramanujan* organizadas por el Instituto de Matemáticas de la Universidad de Sevilla y la Facultad de Matemáticas de la Universidad de Sevilla en febrero de 2020. También quiere agradecer a Guillermo Curbera (U. de Sevilla), José

Carlos Petronilho (U. de Coimbra, Portugal), Juan Luis Varona (U. de La Rioja), Gustavo R. Collado Romero y Antonio J. García Palomo su cuidadosa lectura y los muchos comentarios que me han permitido mejorar el texto. Este trabajo ha sido parcialmente financiado por los proyectos PGC2018-096504-B-C31 (FEDER-EU y Agencia Estatal de Investigación del Ministerio de Ciencia e Innovación), FQM-262 y Feder-US-1254600 (FEDER (EU) y Junta de Andalucía).

REFERENCIAS

- [1] R. ÁLVAREZ-NODARSE, *Polinomios hipergeométricos clásicos y q -polinomios*, Monografías del Seminario Matemático “García de Galdeano”, Vol. 26, Universidad de Zaragoza, Zaragoza, 2003 (versión electrónica disponible en <https://euler.us.es/~renato/q-libro/>).
- [2] G. E. ANDREWS, *The theory of partitions*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Vol. 2, Addison-Wesley, Reading, 1976.
- [3] G. E. ANDREWS, R. ASKEY Y R. ROY, *Special functions*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 71, Cambridge University Press, Cambridge, 1999.
- [4] G. E. ANDREWS Y B. C. BERNDT, *Ramanujan’s Lost Notebook. Part I*, Springer, New York, 2005.
- [5] G. E. ANDREWS Y B. C. BERNDT, *Ramanujan’s Lost Notebook, Part II*, Springer, New York, 2009.
- [6] ARQUÍMEDES, *Obras escogidas*, editado por A. J. Durán, Real Sociedad Matemática Española, International Congress of Mathematicians (Madrid, 2006) y Patrimonio Nacional, 2 vols. (facsimil y edición crítica), Madrid, 2006.
- [7] R. ASKEY, *Ramanujan’s extensions of the gamma and beta functions*, *Amer. Math. Monthly* **87** (1980), no. 5, 346–359.
- [8] R. A. ASKEY, Preface, *Special functions: group theoretical aspects and applications* (R. A. Askey, T. H. Koornwinder y W. Schempp, eds.), Mathematics and its Applications, Reidel Publishing, Dordrecht, 1984.
- [9] R. ASKEY Y J. A. WILSON, *Some basic hypergeometric orthogonal polynomials that generalize Jacobi polynomials*, *Mem. Amer. Math. Soc.* **54**, no. 319, 1985.
- [10] W. N. BAILEY, *Generalized Hypergeometric Series*, Cambridge University Press, Cambridge, 1935. Reimpresión: Stechert-Hafner, New York, 1964.
- [11] B. C. BERNDT, *Ramanujan’s Notebooks, Part I, II & III*, Springer Verlag, New York, 1985, 1989, 1991.
- [12] B. C. BERNDT, *Number theory in the spirit of Ramanujan*, Student Mathematical Library, 34, American Mathematical Society, Providence, RI, 2006.
- [13] B. C. BERNDT, What is a q -series?, *Ramanujan Rediscovered: Proceedings of a Conference on Elliptic Functions, Partitions, and q -Series in memory of K. Venkatachaliengar* (Bangalore, 2009, N. D. Baruah, B. C. Berndt, S. Cooper, T. Huber y M. J. Schlosser, eds.), 31–51, Ramanujan Mathematical Society, Mysore, 2010.

- [14] H. CHAN, *An invitation to q -series. From Jacobi's triple product identity to Ramanujan's "most beautiful identity"*, World Scientific Publishing, Hackensack, NJ, 2011.
- [15] T. S. CHIHARA, *An Introduction to Orthogonal Polynomials*, Gordon and Breach Science Publishers, New York, 1978.
- [16] F. J. DUOANDIKOETXEA, 200 años de convergencia de las series de Fourier, *La Gaceta de la RSME* **10** (2007), no. 3, 651–677.
- [17] A. J. DURÁN, *Crónicas matemáticas. Una breve historia de la ciencia más antigua y sus personajes*, Editorial Crítica, Barcelona, 2018.
- [18] A. ERDÉLYI, *Asymptotic expansions*, Dover, New York, 1956.
- [19] P. I. ETINGOF, I. FRENKEL Y A. A. KIRILLOV, *Lectures on Representation Theory and Knizhnik-Zamolodchikov Equations*, Am. Math. Soc., Providence, USA, 1998.
- [20] EUCLIDES, *Elementos* (Libros V–IX), traducción y notas de M. L. Puertas Castaños, Gredos, Madrid, 1994.
- [21] L. EULER, Evolutio producti infiniti $(1-x)(1-xx)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6)$ in seriem simplicem, *Acta Academiae Scientiarum Petropolitanae* **1780** (impreso en 1783), part I, pp. 47–55. Reimpreso en *Opera Omnia*, Series 1, Vol. 3, 472–479.
- [22] L. EULER, De termino generali serierum hypergeometricarum, *Nova Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae* **7** (1793), 42–63. Reimpreso en *Opera Omnia*, Series 1, Vol. 16, 139–162.
- [23] L. EULER, Specimen transformationis singularis serierum, *Nova Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae* **12** (1794, impreso en 1801), 58–70. Reimpreso en *Opera Omnia*, Series 1, Vol. 16, 41–55.
- [24] L. EULER, *Introductio in analysin infinitorum* (Introducción al análisis de los infinitos), editado por A. J. Durán y F. J. Pérez, 2 vols. (facsimil y edición crítica), SAEM Thales y Real Sociedad Matemática Española, Sevilla, 2000.
- [25] G. GASPER Y M. RAHMAN, *Basic hypergeometric series. With a foreword by Richard Askey*, segunda edición, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 96, Cambridge University Press, Cambridge, 2004.
- [26] C. F. GAUSS, *Summatio quarundam serierum singularium*, Dieterich, Göttingae, 1808. Reimpreso en *Werke*, segunda edición, Vol. II, 9–46, Cambridge University Press, 1876.
- [27] C. F. GAUSS, Disquisitiones generales circa seriem infinitam. . . , *Werke*, Vol. III, 123–162, Königl. Ges. Wiss., Göttingen, 1866.
- [28] C. F. GAUSS, Determinatio seriei nostrae per aequationem differentialem secundi ordinis, *Werke*, Vol. III, 207–229, Königl. Ges. Wiss., Göttingen, 1866.
- [29] C. F. GAUSS, Zur Theorie der neuen Transscendenten, II, *Werke*, Vol. III, 436–445, Königl. Ges. Wiss., Göttingen.
- [30] J. GUILLERA, Historia de las fórmulas y algoritmos para π , *La Gaceta de la RSME* **10** (2007), no. 1, 159–178.

- [31] G. H. HARDY, *Ramanujan. Twelve lectures on subjects suggested by his life and work*, Cambridge University Press, Cambridge (England) & Macmillan Company, New York, 1940.
- [32] G. H. HARDY, *Divergent Series*, Oxford University Press, 1973.
- [33] G. H. HARDY Y S. RAMANUJAN, Asymptotic formulae in combinatory analysis, *Proc. Lond. Math. Soc. (2)* **17** (1918), 75–115
- [34] G. H. HARDY, P. V. SESHU AIYAR Y B. M. WILSON (EDS.), *Collected papers of Srinivasa Ramanujan*, AMS Chelsea Publ., Providence, RI, 2000.
- [35] E. HEINE, Über die Reihe. . . , *J. Reine Angew. Math.* **32** (1846), 210–212; Untersuchungen über die Reihe. . . , *J. Reine Angew. Math.* **34** (1847), 285–328.
- [36] M. D. HIRSCHHORN, *The power of q . A personal journey*, Developments in Mathematics, 49, Springer, Cham, 2017.
- [37] C. G. J. JACOBI, *Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum*, Bornträger, 1829.
- [38] J. JIMÉNEZ URROZ, De Partitione Numerorum, *La Gaceta de la RSME* **5** (2002), no. 2, 443–454.
- [39] V. KAC Y P. CHEUNG, *Quantum calculus*, Universitext, Springer-Verlag, New York, 2002.
- [40] R. KOEKOEK, P. A. LESKY Y R. F. SWARTTOUW, *Hypergeometric orthogonal polynomials and their q -analogues*, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2010.
- [41] J. MC LAUGHLIN, *Topics and methods in q -series. With a foreword by George E. Andrews*, Monographs in Number Theory, 8, World Scientific Publishing, Hackensack, NJ, 2018.
- [42] E. MAOR, *To Infinity and Beyond. A Cultural History of the Infinite*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1991.
- [43] J. VON NEUMANN, The Mathematician, *Collected Works*, Vol. 1, 1–9, 1961. Originalmente en R. B. Heywood (Ed.), *The Works of the Mind*, 180–196, University of Chicago Press, Chicago, 1947.
- [44] A. F. NIKIFOROV, S. K. SUSLOV Y V. B. UVAROV, *Classical Orthogonal Polynomials of a Discrete Variable*, Springer Series in Computational Physics, Springer-Verlag, Berlin, 1991.
- [45] F. W. J. OLVER, D. W. LOZIER, R. F. BOISVERT Y C. W. CLARK (EDS.), *NIST Handbook of Mathematical Functions*, Cambridge University Press and National Institute of Standards and Technology, 2010.
- [46] H. RADEMACHER, On the partition function $p(n)$, *Proc. London Math. Soc.* **43** (1937), 241–254.
- [47] S. RAMANUJAN, Modular equation and approximations to π , *Quarterly Journal of Mathematics* **45** (1914), 350–372. Reimpreso en *Collected papers of Srinivasa Ramanujan*, 23–39, AMS Chelsea Publ., Providence, RI, 2000.
- [48] S. RAMANUJAN, Some definite integrals, *Messenger Math.* **44** (1915), 10–18. Reimpreso en *Collected papers of Srinivasa Ramanujan*, 53–58, AMS Chelsea Publ., Providence, RI, 2000.

- [49] S. RAMANUJAN, Proof of certain identities in combinatory analysis, *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **19** (1919), 214–216. Reimpreso en *Collected papers of Srinivasa Ramanujan*, 214–215, AMS Chelsea Publ., Providence, RI, 2000.
- [50] L. J. ROGERS, Second memoir on the expansion of certain infinite products, *Proc. London Math. Soc.* **25** (1893/94), 318–343.
- [51] J. L. VARONA, *Recorridos por la Teoría de Números*, segunda edición, Ediciones Electolibris y Real Sociedad Matemática Española, Murcia, 2019.
- [52] J. L. VARONA, En recuerdo de Srinivasa Ramanujan (1887–1920). ¿De cuántas formas podemos sumar 176 votos?, *La Gaceta de la RSME* **23** (2020), no. 1, 134.
- [53] G. N. WATSON, A new proof of the Rogers-Ramanujan identities, *J. London Math. Soc.* **4** (1929), 4–9.

RENATO ÁLVAREZ-NODARSE, IMUS & DEPARTAMENTO DE ANÁLISIS MATEMÁTICO, UNIVERSIDAD DE SEVILLA, c/ TARFIA s/n, 41012 SEVILLA

Correo electrónico: ran@us.es

Página web: <https://euler.us.es/~renato/>