II. Representaciones de grupos de Lie

E. Briand

30 de junio de 2015

Plano de esta lección:

- Representaciones de grupos y de álgebras de Lie.
- Reducibilidad.
- El caso de $GL(n,\mathbb{C})$ (y con el $SL(n,\mathbb{C})$, $U(n)$ y $SU(n)$): lista las representaciones irreducibles.

Representaciones

Representaciones de grupos y representaciones de grupos de Lie

Definición 1. Sea G un grupo.

Una *representación lineal compleja* de G es un morfismo de grupos $\Phi : G \to GL(V)$ donde V es un espacio vectorial complejo.

Si G es un grupo de Lie, se exige además que Φ sea diferenciable (para ser una representación "de Grupo de Lie" en vez de ser simplemente una representación de grupo).

La representación es de dimensión finita si V es de dimensión finita. Se refiere a V como *el espacio soporte de la representación*, o a veces simplemente como "la representación".

Ejemplo 1. Las matrices de permutación de orden 3 (que tienen un solo coeficiente no nulo, un "1", en cada fila y cada columna) proporcionan una representación del grupo de las permutaciones del conjunto $\{1,2,3\}$ (grupo simétrico S_3).

Otra representación de S_3 es la representación trivial, que manda σ en 1 para cualquier $\sigma \in S_3$, y tiene dimensión 1.

Ejemplo 2. Aquí están unos ejemplos de representaciones de grupos de Lie;

Sea $V = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. El grupo $GL(n,\mathbb{C})$ admite las siguientes representaciones con soporte V:

- El grupo $GL(n,\mathbb{C})$ actúa sobre $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ por conjugación: la representación asocia a $g \in GL(n,\mathbb{C})$ el endomorfismo $M \mapsto gMg^{-1}$.
- El grupo $GL(n,\mathbb{C})$ actúa sobre $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ mandando $g \in GL(n,\mathbb{C})$ sobre el endomorfismo $M \mapsto gMg^t$.
- Para cualquier k entero (incluso negativo), tenemos la representación de dimensión 1 del grupo de Lie $GL(n,\mathbb{C})$ definida por:

$$g \mapsto \det(g)^k$$

- Sea V el espacio de las funciones polinomiales en dos variables $f(x,y)$ homogéneos de grado d. Obtenemos una representación de $GL(2,\mathbb{C})$ asociando a $M \in GL(2,\mathbb{C})$ el operador $f(x,y) \mapsto f(g^{-1}(x,y))$, dónde g es la aplicación lineal de $\mathbb{C}^2$ hacia $\mathbb{C}^2$ con matriz M,
- Sea G un grupo cualquiera. La representación trivial de G es la representación de G de dimensión 1, donde todos los $g \in G$ actúan trivialmente (como la identidad).

Observación: Sea H un subgrupo de Lie de G. Si tenemos una representación de G:

$$\Phi : G \to GL(V)$$

entonces hay una representación inducida de H, obtenida componiendo con la inclusión:

$$H \hookrightarrow G \to GL(V)$$

Por tanto, a las representaciones del ejemplo anterior, vienen asociadas representaciones de $SL(n,\mathbb{C})$, $GL(n,\mathbb{R})$, $U(n)$ ...

Definición 2. Dos representaciones $\alpha : G \to GL(V)$ y $\beta : G \to GL(W)$ de un grupo G son *equivalentes* (o *isomorfas*) si existe una aplicación lineal biyectiva $\varphi : V \to W$ tal que:

$$\varphi \circ \alpha(g) = \beta(g) \circ \varphi \text{ para todo } g \in G.$$

Representaciones de álgebras de Lie

Para cualquier espacio vectorial V, el álgebra de Lie $\mathfrak{gl}(V)$ es simplemente el espacio de las aplicaciones lineales de V en V (endomorfismos de V), equipado del conmutador como corchete de Lie:

$$[f,g] = f \circ g - g \circ f \text{ para todos } f, g \text{ en } V.$$

Definición 3. Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie. Una representación lineal de $\mathfrak{g}$ es una aplicación lineal

$$F : \mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$$

en álgebra de Lie $\mathfrak{gl}(V)$ de un espacio vectorial V, que preserva el corchete de Lie:

$$F([g,h]) = [F(g),F(h)] = F(g) \circ F(h) - F(h) \circ F(g), \text{ para todos } g, h \text{ en } \mathfrak{g}$$

Una representación matricial de $\mathfrak{g}$ es una aplicación lineal $\mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (en el espacio de las matrices cuadradas de orden n) que cumple la misma condición.

Se definen los morfismos de álgebras de Lie, y la equivalencia de representaciones, como para las representaciones de grupos, *mutatis mutandi*.

Toda representación $G \to GL(V)$ de un grupo de Lie G induce una representación de su álgebra de Lie $\mathfrak{g} \to \mathfrak{gl}(V)$: es simplemente su aplicación lineal tangente en la identidad (su aproximación lineal).

Ejemplo 3. Consideremos la acción de $GL(n,\mathbb{C})$ sobre $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ (primer caso del ejemplo 2) en la cuál $g \in GL(n,\mathbb{C})$ actúa por:

$$M \longmapsto gMg^t$$

Para determinar como actúa $A \in \mathfrak{gl}(n,\mathbb{C})$ consideramos $g = \exp(uA)$ donde u es un parámetro. Actúa como:

$$M \longmapsto \exp(uA)M\exp(uA)^t.$$

Tenemos

$$\exp(uA) = I + uA + o(u), \qquad \exp(uA)^t = I + uA^t + o(u)$$

Por tanto

$$\exp(uA)M\exp(uA)^t = (I + uA)M(I + uA^t) + o(u) = M + u(AM + MA^t) + o(u)$$

Por tanto A actúa por:

$$M \longmapsto AM + MA^t$$

Ejercicio 1. Hallar, de la misma manera, las representaciones de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ y $\mathfrak{gl}(2, \mathbb{C})$ asociadas a las representaciones del segundo y del tercer caso del ejemplo 2, con $n = 2$ para el segundo, y $d = 3$ para el tercero (polinomios).

De las representaciones de álgebras de Lie a las representaciones de grupos de Lie

Toda representación de un grupo de Lie induce una representación de su álgebra de Lie. Recíprocamente, si tenemos una representación del álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ de un grupo de Lie G, ¿Viene de una representación de G? No, hay una condición topológica sobre G.

Teorema 1. *Si el grupo de Lie de G es conexo y simplemente conexo, entonces toda representación lineal de dimensión finita de su álgebra de Lie $\mathfrak{g}$ es obtenida como la aplicación lineal tangente de una representación lineal de dimensión finita de G.*

Una variedad es *simplemente conexa* cuando todo lazo trazado en la variedad puede ser retractado en un punto. El grupo de Lie $SO(2)$ no es simplemente conexo, ya que es un círculo. El grupo $SU(2)$ es simplemente conexo, ya que se identifica a una esfera de dimensión 3.

Ejemplo 4. Los grupos $SU(2)$ y $SO(3)$ tienen la misma álgebra de Lie. El grupo $SU(2)$ es simplemente conexo, el grupo $SO(3)$ no los es. Toda representación de $\mathfrak{su}(2)$ viene de una representación de $SU(2)$. Ciertas representaciones de $\mathfrak{su}(2)$ vienen de representaciones de $SO(3)$, otras no.

Reducibilidad

Representaciones irreducibles, representaciones indescomponibles

Definición 4. Sea $\rho : G \to GL(V)$ una representación lineal de un grupo G. Un subespacio vectorial $W \subset V$ es *invariante bajo G* si $\rho(g)(W) \subset W$ para todos $g \in G$.

La representación ρ es:

- *irreducible* si V no contiene ningún subespacio vectorial invariante bajo G, excepto los subespacios triviales $\{0\}$ y V.

- *indescomponible* si V no puede descomponerse como suma directa $V_1 \oplus V_2$ de dos subespacios invariantes bajo G.

Se definen de la misma manera los subespacios invariantes las representaciones irreducibles y indescomponibles de las álgebras de Lie.

Un subespacio invariante es, a su turno, una representación de G.

Ejemplo 5. La dos primeras representación en el ejemplo 2, son descomponibles. Para la primera, tenemos la descomposición en subespacios invariantes:

$$V = \text{ matrices simétricas } \oplus \text{ matrices antisimétricas.}$$

y para la segunda:

$$V = \text{ matrices de traza nula } \oplus \mathbb{C}\,\mathrm{id}$$

Teorema 2. *Sea G un grupo de Lie, y $\mathfrak{g}$ su álgebra de Lie.*
Sea V una representación de G. Sea W un subespacio de V.
Si G es conexo, entonces:

- *W es invariante bajo G si y solo si W es invariante bajo $\mathfrak{g}$.*
- *por tanto, V es irreducible para la acción de G si y solo si lo es para la acción de $\mathfrak{g}$.*

Reducibilidad completa

Definición 5. Sea V una representación de un grupo de Lie o de un álgebra de Lie. Es *completamente reducible* si es suma directa de representaciones irreducibles.

Ejemplo 6. Consideramos el grupo de Lie de las matrices de la forma

$$\begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

con su representación estándar

$$\begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

No es completamente reducible, ya que contiene solamente tres subespacios invariantes: los dos espacios triviales $\mathbb{C}^2$ y $\{0\}$, y la recta R dirigida por $(1;0)$. Entre ellos, $\mathbb{C}^2$ no es irreducible, ya que contiene R como subespacio invariante. Por tanto, contiene solamente dos subespacios que son representaciones irreducibles: R y $\{0\}$. No basta para descomponer el espacio como suma directa de irreducibles.

Si una representación es completamente reducible, [su espacio soporte] se descompone en suma directa de subespacios que son irreducibles no nulos. Agrupando las representaciones equivalentes (=isomorfas) podemos escribir la descomposición en suma directa como:

$$\bigoplus_\alpha m_\alpha V_\alpha$$

donde $m_\alpha V_\alpha$ significa: " la suma directa de m_α representaciones equivalentes a V_α", y donde V_α y $V_{\alpha'}$ son no equivalentes si $\alpha \neq \alpha'$.

Por ejemplo, escribimos una descomposición de la forma $V_1 \oplus V_1 \oplus V_2$, con V_1 y V_2 representaciones no equivalentes, como $2\,V_1 \oplus V_2$.

Llamamos m_α: "multiplicidad de la representación irreducibles V_α en V" y el subespacio $m_\alpha V_\alpha$ "componente isotípica de tipo V_α".

Se demuestra que si V es una representación compleja, de dimensión finita, completamente reducible, de un grupo o de un álgebra de Lie, entonces dadas dos descomposiciones:

$$V = \bigoplus_\alpha m_\alpha V_\alpha = \bigoplus_\alpha m'_\alpha V_\alpha$$

con los V_α dos a dos no equivalentes, entonces:

- las multiplicidades coinciden: $m_\alpha = m'_\alpha$ para cualquier α,
- las componentes isotípicas de cada tipo coinciden.

Es en este sentido que la descomposición es única.

Muchos grupos y álgebra de Lie tienen todas sus representaciones complejas de dimensión finita completamente reducibles:

- Los grupos finitos.
- Los grupos compactos (y por tanto los grupos de Lie compactos y sus álgebras de Lie).
- Las álgebras de Lie "semisimples".

Recordamos que ser "compacto" es una propiedad de los espacios topológicos. En un espacio vectorial real o complejo de dimensión finita, los subconjuntos compactos son los subconjuntos cerrados (toda sucesión convergente de elementos del subconjunto tiene su limite en el subconjunto) y acotados. Por tanto, podemos decir que $GL(n, \mathbb{C})$ (no cerrado en $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, no acotado) y $SL(n, \mathbb{C})$ (no acotado) no son compactos, pero $O(n)$, $SO(n)$, $U(n)$, $SU(n)$ sí lo son.

Los grupos compactos tienen una propiedad más de reducibilidad completa, muy relevante para esta semana de cursos (contexto del curso de Renato).

Teorema 3. *Sea G un grupo de Lie compacto y $\rho : G \to \mathcal{H}$ una representación unitaria (es decir, para cualquier g, $\rho(g)$ es un operador unitario) en un espacio de Hilbert complejo $\mathcal{H}$,*

Entonces $\mathcal{H}$ se descompone como suma directa ortogonal de representaciones irreducibles de dimensión finita.

Es (una parte de) el "teorema de Peter–Weyl".

Representaciones de $GL(n, \mathbb{C})$

Teorema 4. *El grupo $GL(n, \mathbb{C})$ tiene la propiedad de reducibilidad completa de las representaciones.*

¿Se puede hacer la lista de sus representaciones irreducibles?

La lista de las representaciones irreducibles de $GL(n, \mathbb{C})$

Las representaciones irreducibles de $GL(n, \mathbb{C})$ son indexadas por las sucesiones decrecientes de n enteros:

$$V_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n}, \qquad \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n.$$

Sea D^k la representación "multiplicación por $\det^k$ de $GL(n, \mathbb{C})$. Es la representación con soporte $\mathbb{C}$ (representación de dimensión 1) definida por $g \mapsto \det(g)^k$. Si $\rho : GL(n, \mathbb{C}) \to GL(V)$ es una representación de $GL(n, \mathbb{C})$, notamos $V \otimes D^k$ la representación con mismo soporte V definida por:

$$g \mapsto \det(g)^k \rho(g).$$

Se tiene la descomposición:

$$V_{\lambda_1+k, \lambda_2+k, \ldots, \lambda_n+k} \equiv V_{\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n} \otimes D^k.$$

Notemos G para $GL(n, \mathbb{C})$, H para su subgrupo de las matrices diagonales regulares, B para su subgrupo de las matrices triangulares superiores regulares. Tenemos las inclusiones: $H \subset B \subset G$.

Sea V una representación de $GL(n, \mathbb{C})$. Un *vector de peso* $v \in V$ es un autovector común a todos los elementos de H:

$$h \cdot v = \chi(h) v \text{ para cualquier } h \in H.$$

El autovalor χ es una función de $h \in H$. Es necesariamente de la forma:

$$\chi(h) = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}$$

donde

$$h = \begin{bmatrix} x_1 & & & \\ & x_2 & & \\ & & \ddots & x_n \end{bmatrix}$$

y $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^n$ es el *peso* de v.

1. Toda representación V de $GL(n, \mathbb{C})$ admite una base de vectores de peso.

2. Una representación irreducible de $GL(n, \mathbb{C})$ contiene un único vector de peso con peso máximo (único solamente modulo escalar), donde "máximo" se refiere al orden sobre los pesos definido por:

   $\alpha \geq \beta$ cuando $\alpha_1 + \cdots + \alpha_k \geq \beta_1 + \cdots + \beta_k$ para todo k entre 1 y n (es un orden parcial).

3. Si V y W son dos representaciones irreducibles, no equivalentes, de $GL(n, \mathbb{C})$, sus vectores de peso máximo tienen pesos distintos. Utilizamos, por tanto, el peso máximo como etiqueta de las representaciones irreducibles de G: V_λ es la representación irreducible con peso máximo λ.

4. Si V es una representación irreducible de $GL(n, \mathbb{C})$, su vector de peso máximo es el único vector (modulo multiplicación por un escalar) estabilizado por el subgrupo B de las matrices triangulares superiores:
$$Bv = \mathbb{C}^* v$$

Al nivel de las álgebras de Lie: sea $\mathfrak{h}$ el álgebra de Lie de las matrices diagonales, y $\mathfrak{b}$ el álgebra de Lie de las matrices triangulares superiores estrictas.

- Los vectores de peso son los autovectores comunes a todas las matrices diagonales. El vector v es un vector de peso α entonces si y solo si para cualquier matriz diagonal, $D = \begin{bmatrix} x_1 & & & \\ & x_2 & & \\ & & \ddots & x_n \end{bmatrix}$, se tiene
$$D \cdot v = (\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n) v$$
- El cada representación irreducible, el vector de peso máximo es el único vector (modulo escalar) cancelado por $\mathfrak{b}$.

Ejercicio 2. Utilizar estos resultados en los ejemplos 2, para $n = 2$, y **??** para $d = 3$. En todos estos casos tenemos una acción de $GL(2, \mathbb{C})$. El subespacio de las matrices triangulares superiores $\mathfrak{b}$ es generado por el único elemento
$$J_+ := \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Hallar los vectores de peso, las componentes irreducibles y identificar los pesos máximos y los vectores de máximo peso.

Describir también la representación de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$. Basta dar las matrices que representan los generadores infinitesimales:
$$J_+ = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad J_- = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad J_z = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad I.$$

¿Como se puede describir la representación de $GL(n, \mathbb{C})$?

Representaciones irreducibles de $SL(n, \mathbb{C})$, $U(n)$, $SU(n)$

Recordamos que si G es un grupo de Lie y H un subgrupo, cada representación de G ($G \to GL(V)$) proporciona una representación de H "por restricción": $H \hookrightarrow G \to GL(V)$.

En general, si V es una representación irreducible para G, no tiene porque ser lo para su subgrupo H. Las restricciones de $GL(n, \mathbb{C})$ a $SL(n, \mathbb{C})$, $U(n)$ y $SU(n)$ tienen, sin embargo, esta buena propiedad.

Teorema 5.

- *Los grupos $SL(n,\mathbb{C})$, $U(n)$, $SU(n)$ y sus álgebras de Lie tienen la propiedad de reducbilidad completa de las representaciones.*
- *Las representaciones irreducibles de $SL(n,\mathbb{C})$ son exactamente las restricciones de las representaciones irreducibles de $GL(n,\mathbb{C})$.*
- *Dos representaciones irreducibles de V_λ y V_μ de $GL(n,\mathbb{C})$ inducen representaciones isomorfas de $SL(n,\mathbb{C})$ si y solo si existe k tal que $\lambda = \mu + (k, k, \ldots, k)$.*
- *Las representaciones irreducibles de $U(n)$ son exactamente las restricciones de las representaciones irreducibles de $GL(n,\mathbb{C})$, y representaciones irreducibles non–isomorfas de $GL(n,\mathbb{C})$ se restringen como representaciones irreducibles non–isomorfas de $U(n)$.*
- *Las representaciones irreducibles de $SU(n)$ son exactamente las restricciones de las representaciones irreducibles de $SL(n,\mathbb{C})$, y representaciones irreducibles non–isomorfas de $SL(n,\mathbb{C})$ se restringen como representaciones irreducibles non–isomorfas de $SU(n)$.*