

III. Representaciones: bases

E.Briand

2 de julio

Las representaciones irreducibles de $GL(n, \mathbb{C})$ como espacios de tensores

Productos tensoriales

Definición 1. Sean

$$\alpha : G \rightarrow GL(V), \quad \beta : G \rightarrow GL(W)$$

dos representaciones del grupo G . Su representación producto tensorial es la representación $\rho : G \rightarrow GL(V \otimes W)$ definida por:

$$\rho(g)(v \otimes w) = \alpha(g)(v) \otimes \beta(g)(w) \text{ para todos } v \in V, w \in W.$$

Con notaciones más relajadas:

$$g(v \otimes w) = g(v) \otimes g(w).$$

Se generaliza de manera evidente esta definición a productos tensoriales con más de dos factores.

Sea ahora G un grupo de Lie con representaciones en V y en W ¿Cuál es la acción asociada de su álgebra de Lie \mathfrak{g} ? Sea $A \in \mathfrak{g}$, consideramos $v \in V, w \in W$. Se tiene:

$$\begin{aligned} \exp(tA)(v \otimes w) &= \exp(tA)v \otimes \exp(tA)w \\ &= (I + tA)v \otimes (I + tA)w + o(t) \\ &= v \otimes w + t(Av \otimes w + v \otimes Aw) + o(t) \end{aligned}$$

Por tanto, en la representación asociada del álgebra de Lie, $A \in \mathfrak{g}$ actúa como:

$$v \otimes w \rightarrow Av \otimes w + v \otimes Aw.$$

Para un producto tensorial de tres factores, sería:

$$u \otimes v \otimes w \rightarrow Au \otimes v \otimes w + u \otimes Av \otimes w + v \otimes u \otimes Aw.$$

Descripción de las representaciones irreducibles

Construimos la representación irreducible V_λ de $GL(n, \mathbb{C})$, de máximo peso $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$, cuando todos los λ_i son ≥ 0 .

Las otras representaciones irreducibles V_μ , con μ con algunas componentes negativas, se obtienen trivialmente a partir de estas, multiplicando por una representación "determinante a la potencia k ":

$$V_\mu = V_\lambda \otimes D^{-k} \text{ para } \lambda = \mu + (k, k, \dots, k)$$

Para k suficientemente grande, λ tendrá todas sus componentes ≥ 0 .

Sea $V = \mathbb{C}^n$ y e_1, e_2, \dots, e_n su base canónica.

Plano de esta lección:

- Bases canónicas de representaciones irreducibles, cadenas de grupos y álgebras.
- Restricción a un subgrupo.
- Productos tensoriales de representaciones.
- Coeficientes de Clebsch-Gordan.

La representación V_λ se construye como un subespacio de un espacio de tensores

$$\bigotimes^N V = V \otimes V \otimes \cdots \otimes V \text{ (producto tensorial de } N \text{ copias de } V)$$

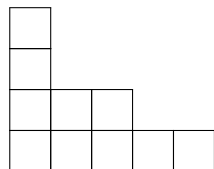
donde $N = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n$.

Introducimos el *diagrama de Young de λ* : el conjunto de los puntos a coordenadas enteras (i, j) que cumplen:

$$\begin{cases} 1 \leq j \leq n, \\ 1 \leq i \leq \lambda_j \end{cases} \text{ para todos } (i, j)$$

La j -ésima fila de este diagrama (contando desde abajo) tiene longitud λ_j . Los puntos son convenientemente sustituidos por cajas, que a continuación vamos a rellenar con datos adicionales.

Ejemplo 1. El diagrama de Young de $\lambda = (5, 3, 1, 1)$ es:



Representamos los vectores de base de $\bigotimes^N V$ por diagramas de Young rellenos por números del 1 al n (el diagrama relleno es un *tableau de Young*). Estos números $1, 2 \dots$ representan los vectores $e_1, e_2 \dots$. Leyendo el tableau (en el mismo sentido que una página de libro: de arriba hacia abajo, y en cada fila de la izquierda a la derecha) obtenemos una sucesión de vectores de base de V . Dan un vector de base de $\bigotimes^N V$.

Ejemplo 2. Aquí está un tableau que representa un tensor de $\bigotimes^{10} V$:

tableau	lectura	vector de base										
<table border="1" style="border-collapse: collapse; margin: auto;"> <tr><td style="padding: 2px 5px;">4</td></tr> <tr><td style="padding: 2px 5px;">4</td></tr> <tr><td style="padding: 2px 5px;">1</td><td style="padding: 2px 5px;">1</td><td style="padding: 2px 5px;">2</td></tr> <tr><td style="padding: 2px 5px;">3</td><td style="padding: 2px 5px;">4</td><td style="padding: 2px 5px;">1</td><td style="padding: 2px 5px;">2</td><td style="padding: 2px 5px;">1</td></tr> </table>	4	4	1	1	2	3	4	1	2	1	4411234121	$e_4 \otimes e_4 \otimes e_1 \otimes e_1 \otimes e_2 \otimes e_3 \otimes e_4 \otimes e_1 \otimes e_2 \otimes e_1$
4												
4												
1	1	2										
3	4	1	2	1								

Aplicamos a continuación el siguiente operador $T \mapsto X(T)$, que asocia a cada tableau de Young T un tensor $X(T)$. Los tensores $X(T)$ generarán una representación irreducible isomorfa a V_λ .

- Simetrizamos con respecto a cada fila (sustituyendo cada tableau por la suma de los tableaux obtenidos permutando las cajas de la fila).
- Luego antisimetrizamos con respecto a cada columna (sustituyendo cada tableau por la suma de los tableaux obtenidos permutando las cajas de la columna, con el signo de la permutación aplicada).

Si un tableau tiene coeficientes repetidos en una columna, su antisimetrización respecto de esta columna es 0.

Ejemplo 3. Aplicamos este proceso con el tableau siguiente:

$$T = \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 3 \\ \hline 1 & 1 & 3 \\ \hline \end{array}$$

Se obtiene el elemento (ver el detalle del calculo en el cuadro 1):

$$\begin{aligned} X(T) = & 2 \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 3 \\ \hline 1 & 1 & 3 \\ \hline \end{array} + 2 \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 2 \\ \hline 1 & 1 & 3 \\ \hline \end{array} + 2 \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 2 \\ \hline 1 & 3 & 1 \\ \hline \end{array} + 2 \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 3 \\ \hline 3 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \\ & - 2 \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & 1 & 3 \\ \hline \end{array} - 2 \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 1 & 3 \\ \hline \end{array} - 2 \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 3 & 1 \\ \hline \end{array} - 2 \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 3 \\ \hline 2 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \\ & - 2 \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 1 \\ \hline 1 & 3 & 3 \\ \hline \end{array} - 2 \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 1 \\ \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline \end{array} - 2 \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 3 \\ \hline 1 & 2 & 1 \\ \hline \end{array} - 2 \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 1 \\ \hline 3 & 3 & 1 \\ \hline \end{array} \\ & + 2 \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline 2 & 3 & 3 \\ \hline \end{array} + 2 \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline 3 & 2 & 3 \\ \hline \end{array} + 2 \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 3 & 2 & 1 \\ \hline \end{array} + 2 \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 1 \\ \hline 2 & 3 & 1 \\ \hline \end{array} \end{aligned}$$

Definición 2. Sea T un tableau de Young. Es *semi-estándar* si cumple las condiciones siguientes:

- Cada fila, leída desde izquierda hacia derecha, es débilmente creciente.
- cada columna, leída desde abajo hacia arriba, es estrictamente creciente.

Ejemplo 4. Los tableaux de Young siguientes son semi-estándar:

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 3 \\ \hline 2 & 2 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}, \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 3 \\ \hline 2 & 2 \\ \hline 1 & 1 & 2 & 3 \\ \hline \end{array},$$

y estos no los son:

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 3 \\ \hline 2 & 2 \\ \hline 1 & 1 & 2 & 1 \\ \hline \end{array}, \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 3 \\ \hline 2 & 2 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 2 \\ \hline \end{array},$$

Teorema 1. Sea $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ una sucesión decreciente de enteros ≥ 0 . Sea $N = \lambda_1 + \dots + \lambda_n$.

1. Los tensores $X(T)$ para T tableau de Young de forma λ , relleno con ocurrencias de $1, 2, \dots, n$, cuando no son nulos, son vectores de peso. El peso de $X(T)$ es $(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$ donde μ_i es el numero de ocurrencias de i en el tableau T .
2. Generan un subespacio de $\otimes^N V$ invariante bajo la acción de $GL(n, \mathbb{C})$.
3. Este subespacio es la representación irreducible V_λ (la representación irreducible de máximo peso λ).

Tableau inicial:

$$T = \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 3 \\ \hline 1 & 1 & 3 \\ \hline \end{array}$$

Cuadro 1: Cálculo del simetrizador de Young para

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 3 \\ \hline 1 & 1 & 3 \\ \hline \end{array}$$

(Ejemplo 3)

1. Simetrización con respecto a la primera fila (6 permutaciones, pero dan dos veces la misma cosa):

$$2 \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 3 \\ \hline 1 & 1 & 3 \\ \hline \end{array} + 2 \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 3 \\ \hline 1 & 3 & 1 \\ \hline \end{array} + 2 \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 3 \\ \hline 3 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}$$

2. Simetrización con respecto a la segunda fila (2 permutaciones):

$$2 \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 3 \\ \hline 1 & 1 & 3 \\ \hline \end{array} + 2 \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 2 \\ \hline 1 & 1 & 3 \\ \hline \end{array} + 2 \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 3 \\ \hline 1 & 3 & 1 \\ \hline \end{array} + 2 \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 2 \\ \hline 1 & 3 & 1 \\ \hline \end{array} + 2 \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 3 \\ \hline 3 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} + 2 \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 2 \\ \hline 3 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}$$

3. Antisimetrización con respecto a la primera columna (2 permutaciones):

$$2 \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 3 \\ \hline 1 & 1 & 3 \\ \hline \end{array} + 2 \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 2 \\ \hline 1 & 1 & 3 \\ \hline \end{array} + 2 \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 3 \\ \hline 1 & 3 & 1 \\ \hline \end{array} + 2 \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 2 \\ \hline 1 & 3 & 1 \\ \hline \end{array} + 2 \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 3 \\ \hline 3 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \left(+2 \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 2 \\ \hline 3 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \right)$$

$$-2 \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & 1 & 3 \\ \hline \end{array} - 2 \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 1 & 3 \\ \hline \end{array} - 2 \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & 3 & 1 \\ \hline \end{array} - 2 \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 3 & 1 \\ \hline \end{array} - 2 \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 3 \\ \hline 2 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \left(-2 \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 2 \\ \hline 3 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \right)$$

(los dos términos más a la derecha se cancelan)

4. Antisimetrización con respecto a la segunda columna:

$$2 \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 3 \\ \hline 1 & 1 & 3 \\ \hline \end{array} + 2 \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 2 \\ \hline 1 & 1 & 3 \\ \hline \end{array} \left(+2 \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 3 \\ \hline 1 & 3 & 1 \\ \hline \end{array} \right) + 2 \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 2 \\ \hline 1 & 3 & 1 \\ \hline \end{array} + 2 \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 3 \\ \hline 3 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}$$

$$-2 \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & 1 & 3 \\ \hline \end{array} - 2 \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 1 & 3 \\ \hline \end{array} \left(-2 \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & 3 & 1 \\ \hline \end{array} \right) - 2 \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 3 & 1 \\ \hline \end{array} - 2 \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 3 \\ \hline 2 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}$$

$$-2 \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 1 \\ \hline 1 & 3 & 3 \\ \hline \end{array} - 2 \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 1 \\ \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline \end{array} \left(-2 \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 3 \\ \hline 1 & 3 & 1 \\ \hline \end{array} \right) - 2 \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 3 \\ \hline 1 & 2 & 1 \\ \hline \end{array} - 2 \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 1 \\ \hline 3 & 3 & 1 \\ \hline \end{array}$$

$$+2 \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline 2 & 3 & 3 \\ \hline \end{array} + 2 \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline 3 & 2 & 3 \\ \hline \end{array} \left(+2 \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & 3 & 1 \\ \hline \end{array} \right) + 2 \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 3 & 2 & 1 \\ \hline \end{array} + 2 \begin{array}{|c|c|} \hline 3 & 1 \\ \hline 2 & 3 & 1 \\ \hline \end{array}$$

(los términos entre paréntesis se cancelan).

5. La antisimetrización con respecto a la tercera columna es trivial.

4. Una base de este subespacio es proporcionada por los $X(T)$ con T tableau de Young semi-estándar de forma λ .

Ejemplo 5. Consideramos la representación $V_{(3,2)}$ de $GL(2, \mathbb{C})$. Se obtiene como el subespacio de $\otimes^5(\mathbb{C}^2)$ con base:

$$X \left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 2 & \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \right), \quad X \left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 2 & \\ \hline 1 & 1 & 2 \\ \hline \end{array} \right)$$

Son vectores de peso, con peso respectivamente $(3, 2)$ y $(2, 3)$.

Ejercicio 1. Demostrar que para las representaciones de $GL(n, \mathbb{C})$,

- la representación $V_{(1,1,1,\dots,1,0,0,\dots,0)}$ con N ocurrencias de "1", es de dimensión $\binom{n}{N}$, y su soporte es el espacio de los tensores antisimétricos.
- la representación $V_{(N,0,0,\dots,0)}$ donde $\lambda_1 = N, \lambda_2 = \lambda_3 = \dots = \lambda_n = 0$ es de dimensión $\binom{n+N-1}{n}$, y su soporte es el espacio de los tensores simétricos.

Para acabar la descripción de V_λ , haría falta describir la acción de los generadores infinitesimales del grupo de Lie (=generadores del álgebra de Lie). Lo vamos a hacer a continuación con $SL(2, \mathbb{C})$.

Ejercicio 2. Estudiar las representaciones $V_{(1,0)}$, $V_{(2,0)}$, $V_{(1,1)}$ y de $GL(2, \mathbb{C})$:

1. hallar explícitamente las matrices que representan los generadores infinitesimales (generadores del álgebra de Lie $\mathfrak{gl}(2, \mathbb{C})$) en estas representaciones.
2. ¿Como actúa, por ejemplo, el elemento $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ del grupo de Lie en estas representaciones?

Representaciones de $SL(2, \mathbb{C})$

Las representaciones irreducibles no equivalentes de $SL(2, \mathbb{C})$ son las representaciones $V_{N,0}$ con $N \geq 0$. Una base de $V_{N,0}$ es proporcionada por los tensores $X(T(k|N-k))$ con $T(k|N-k)$ tableau de una sola fila, de longitud N , rellenado por k ocurrencias de 1 seguidas de $N-k$ ocurrencias de 2.

A continuación consideramos el caso $N = 3$. Una base de $V_{(3,0)}$ es formada por:

$$\begin{aligned} X \left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \right) &= 6 \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \\ X \left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 \\ \hline \end{array} \right) &= 2 \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 \\ \hline \end{array} + 2 \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 1 \\ \hline \end{array} + 2 \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \\ X \left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 2 \\ \hline \end{array} \right) &= 2 \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 2 \\ \hline \end{array} + 2 \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 2 & 1 \\ \hline \end{array} + 2 \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 1 & 2 \\ \hline \end{array} \\ X \left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 2 & 2 \\ \hline \end{array} \right) &= 6 \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 2 & 2 \\ \hline \end{array} \end{aligned}$$

Para determinar la representación $V_{N,0}$ de $SL(2, \mathbb{C})$, basta determinar la acción de sus generadores infinitesimales (una base del

álgebra de Lie). Podemos elegir, como lo hacen los físicos, los siguientes generadores:

$$J_+ = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad J_- = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad J_z = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

a los cuales añadimos, si pretendemos estudiar $V_{(N,0)}$ como representación de $GL(2, \mathbb{C})$,

$$\frac{1}{2}I = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sea $V = \mathbb{C}^2$. En vez de notar e_1, e_2 los vectores de la base canónica de V , encontraremos beneficio en notarlos x e y .

Cualquier elemento A de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ actúa sobre $\otimes^3 V$ de la manera siguiente:

$$A(u \otimes v \otimes w) = (Au) \otimes v \otimes w + u \otimes (Av) \otimes w + u \otimes v \otimes Aw$$

Esta regla nos recuerda la de la derivación de un producto (regla de Leibniz),

Por otra parte, J_+ actúa sobre V (con base $x = e_1, y = e_2$) de la manera siguiente:

$$J_+x = 0, \quad J_+y = x$$

Vemos que el operador J_+ se comporta absolutamente como $x \frac{\partial}{\partial y}$

Esto sugiere introducir la aplicación lineal que asocia a cada elemento de base $u \otimes v \otimes w$ de $\otimes^3 V$ (donde cada uno de u, v, w es o bien x o bien y) el producto uvw (un monomio de grado 3 en x e y). Esta aplicación lineal manda, por tanto, $x \otimes x \otimes y$ en x^2y , $x \otimes y \otimes x$ también, $x \otimes x \otimes x$ va en $x^3 \dots$ y $X(T(k|N-k))$ está mandado en un múltiplo de $x^k y^{3-k}$. Precisamente,

$$\begin{aligned} X \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \right) &= 6 \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \mapsto 6x^3 \\ X \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \right) &= 2 \left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \right) \mapsto 6x^2y, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Esta aplicación es evidentemente un isomorfismo de espacios vectoriales entre $V_{(3,0)}$ y el espacio de los polinomios generado por x^3, x^2y, xy^2, y^3 . Además, la acción de J_+ se traduce en el mundo de los polinomios, como lo hemos observado, a la acción del operador $x \frac{\partial}{\partial y}$. Más generalmente, ya que hay también una acción de $\mathfrak{gl}(2, \mathbb{C})$,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ actúa sobre los polinomios como } \begin{matrix} x \frac{\partial}{\partial x}, \\ \\ y \frac{\partial}{\partial x}, \\ \\ x \frac{\partial}{\partial y}, \\ \\ y \frac{\partial}{\partial y}. \end{matrix}$$

Por tanto, para los generadores considerados,

$$\begin{aligned} J_- & \text{ actúa como } y \frac{\partial}{\partial x} \\ J_z & \text{ " } \frac{1}{2} \left(x \frac{\partial}{\partial x} - y \frac{\partial}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} I & \text{ " } \frac{1}{2} \left(x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

Extrapolando, enunciamos:

Teorema 2. El espacio de los polinomios homogéneos de grado N en dos variables x e y (es decir, de los polinomios cuyos únicos monomios son de la forma $x^k y^{N-k}$ con $0 \leq k \leq N$) es una representación del álgebra de Lie $\mathfrak{gl}(2, \mathbb{C})$ (y por tanto de $(2, \mathbb{C})$) donde:

$$A \cdot P(x, y) = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} P(x, y)$$

Es equivalente a la representación irreducible $V_{(N,0)}$ de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$.

Ejercicio 3. Encontrar una representación simple de $GL(2, \mathbb{C})$, que induce la representación de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{C})$ del teorema.

Es mucho más cómodo trabajar con polinomios que con tableaux.

Para $N = 3$ calculamos:

$$J_+ x^3 = 0, \quad J_+ x^2 y = x^3, \quad J_+ x y^2 = 2 x y, \quad J_+ y^3 = 3 x y^2$$

Por tanto la matriz del operador que representa J_+ en esta representación, con respecto a la base

$$x^3, x^2 y, x y^2, y^3$$

es

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La matriz que representa J_- es su traspuesta. La matriz que representa J_z es la matriz diagonal

$$\begin{bmatrix} 3/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3/2 \end{bmatrix}$$

La matriz que representa $\frac{1}{2} I$ es la matriz escalar

$$\begin{bmatrix} 3/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3/2 \end{bmatrix}$$

Podemos representar estos datos en una figura (Figura 1). Los operadores J_+ y J_- se llaman "operadores escaleras".

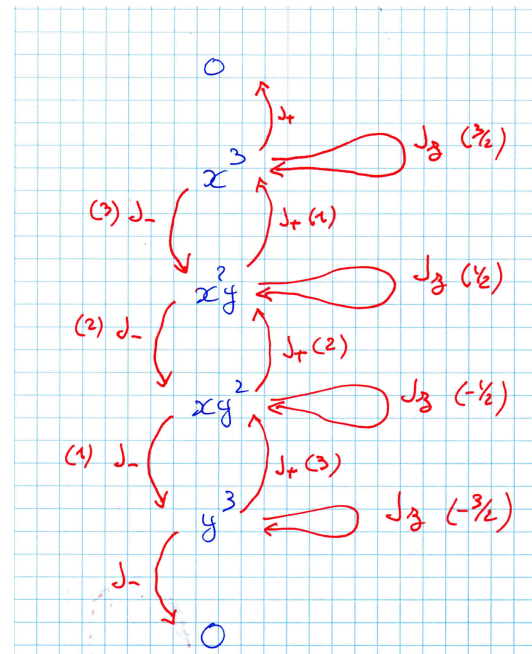


Figura 1: La representación $V_{3,0}$ de $SL(2, \mathbb{C})$, realizada por medio de polinomios.

Representación de espín j

A los parámetros N (de la representación irreducible $V_{N,0}$ de $SL(2, \mathbb{C})$) y k (el número de "1" en el tableau de una sola fila de longitud k), los físicos prefieren j y m , donde $j = N/2$ (es, por tanto, un entero o un medio-entero) y $m = k - N/2$ (un entero cuando j es entero, un medio entero cuando j es un medio entero, siempre entre $-j$ y j), ya que aparecen como autovalores de operadores hermíticos:

$$\begin{aligned} J_z \cdot X(T(k|N-k)) &= m \cdot X(T(k|N-k)), \\ \frac{1}{2}I \cdot X(T(k|N-k)) &= j \cdot X(T(k|N-k)). \end{aligned}$$

La representación $V_{N,0}$ de $SL(2, \mathbb{C})$ se restringe en una representación, también irreducible, de $SU(2)$, conocida como "representación de espín j de $SU(2)$ ".

El espacio $V = \mathbb{C}^2$ es equipado de su producto escalar usual. El producto tensorial $\otimes^N V$ es equipado del producto escalar que cumple:

$$\langle u_1 \otimes \cdots \otimes u_N | v_1 \otimes \cdots \otimes v_N \rangle = \langle u_1 | v_1 \rangle \langle u_2 | v_2 \rangle \cdots \langle u_N | v_N \rangle$$

de manera que la base canónica de $\otimes^N V$ es ortonormal.

Entonces la base de los $X(T(k|N-k))$ es ortogonal, pero no ortonormal. Es deseable trabajar con una base ortonormal, porque en muchas situaciones se requieren representaciones *unitarias* de $SU(2)$. Basta normalizar los $X(T(k|N-k))$. Los elementos de la base ortonormal obtenida se notan: $|j(m)\rangle$. El j indica la representación irreducible considerada, el m es el número del elemento de base de este espacio.

Ejemplo 6. Para $N = 3$ tenemos $j = 3/2$. Determinamos fácilmente que $X\left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}\right)$ es de norma 6 (es 6 veces un elemento de la base canónica de $\otimes^3 V$).

El elemento $X\left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 \\ \hline \end{array}\right)$ es de norma $2\sqrt{3}$, ya que es dos veces la suma de tres elementos de la base canónica.

Por tanto tenemos la correspondencia siguiente:

$$\begin{aligned} |3/2(3/2)\rangle &= \frac{1}{6} X\left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}\right) = x^3 \\ |3/2(1/2)\rangle &= \frac{1}{2\sqrt{3}} X\left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 \\ \hline \end{array}\right) = \sqrt{3}x^2y \\ |3/2(-1/2)\rangle &= \frac{1}{2\sqrt{3}} X\left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 2 \\ \hline \end{array}\right) = \sqrt{3}xy^2 \\ |3/2(-3/2)\rangle &= \frac{1}{6} X\left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 2 & 2 \\ \hline \end{array}\right) = y^3 \end{aligned}$$

Determinamos fácilmente, a partir de los cálculos realizados anteriormente con los polinomios, como es representada J_+

$$J_+ \mapsto \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La matriz J_- es tiene una representación muy similar, y la representación de J_z no cambia (con respecto a la representación obtenida con la base de los monomios).

En general, para todo j , los coeficientes no nulos de la matriz que representa J_+ son los $\sqrt{j(j+1) - m(m+1)}$. O sea:

$$J_+ |j(m)\rangle = \sqrt{j(j+1) - m(m+1)} |j, m+1\rangle.$$

Coefficientes de Clebsch–Gordan

Utilizaremos la notación alternativa $S(j)$ para la representación de espín j . Claro, $S(j) = V_{2j,0}$. Se plantea el problema siguiente: descomponer $S(j_1) \otimes S(j_2)$ en irreducibles.

Tenemos el teorema:

Teorema 3 (Serie de Clebsch–Gordan para $SU(2)$).

$$S(j_1) \otimes S(j_2) = \bigoplus_j S(j)$$

donde la suma es sobre todos los j que cumplen: $|j_1 - j_2| \leq j \leq j_1 + j_2$, con j entero si $j_1 + j_2$ es entero, medio entero si $j_1 + j_2$ es medio entero.

Ejemplo 7.

$$\begin{aligned} S(1/2) \otimes S(1/2) &= S(0) \oplus S(1), \\ S(1/2) \otimes S(1) &= S(1/2) \oplus S(3/2), \\ S(1) \otimes S(1) &= S(0) \oplus S(1) \oplus S(2), \\ S(2) \otimes S(3/2) &= S(1/2) \oplus S(3/2) \oplus S(5/2) \oplus S(7/2). \end{aligned}$$

Observese que la descomposición es “sin multiplicidad” (cada multiplicidad vale 1).

Se plantea un nuevo problema: tenemos ahora dos bases ortonormales de $S(j_1) \otimes S(j_2)$:

- La base–producto de los $|j_1(m_1)\rangle \otimes |j_2(m_2)\rangle$.
- La base obteniendo las bases de las componentes en la descomposición en irreducibles: $|j(m)\rangle$.

¿Cuales son las formulas de cambio de base?

Ejemplo 8. Para $j_1 = j_2 = 1/2$, las dos bases son:

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \right) \right\rangle \otimes \left| \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \right) \right\rangle, \quad \left| \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} \right) \right\rangle \otimes \left| \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \right) \right\rangle, \\ \left| \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \right) \right\rangle \otimes \left| \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} \right) \right\rangle, \quad \left| \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} \right) \right\rangle \otimes \left| \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} \right) \right\rangle, \end{aligned}$$

y

$$|0(0)\rangle, |1(-1)\rangle, |1(0)\rangle, |1(1)\rangle.$$

Los coeficientes de las matrices de cambio de base son los *coeficientes de Clebsch–Gordan*.

Ejercicio 4. Calcular los coeficientes de Clebsch–Gordan que corresponden a $j_1 = j_2 = 1/2$.

Bases canónicas (Bases de Gelfand–Tseitlin). Cadenas de subgrupos.

Para $n > 2$, las bases de las representaciones irreducibles de $SL(n, \mathbb{C})$ formadas a partir de los tableaux de Young no son, en general, ortogonales. Otro enfoque permite construir bases ortogonales. Está basado en la idea de las “cadenas de subgrupos”. El grupo $GL(n-1, \mathbb{C})$ se incluye en $GL(n, \mathbb{C})$, representando $M \in GL(n-1, \mathbb{C})$ por la matriz por bloques

$$\begin{bmatrix} M & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Por ejemplo para $n = 4$, una matriz

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \in GL(3, \mathbb{C})$$

se identifica con

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \in GL(4, \mathbb{C})$$

Repitiendo el proceso, tenemos una cadena de subgrupos

$$GL(1, \mathbb{C}) \subset GL(2, \mathbb{C}) \subset GL(3, \mathbb{C}) \subset GL(4, \mathbb{C}).$$

Teorema 4. *La representación $V_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n}$ de $GL(n, \mathbb{C})$ se restringe, como representación de $GL(n-1, \mathbb{C})$, en una suma sin multiplicidades de irreducibles:*

$$\bigoplus V_{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{n-1}}$$

donde la suma es sobre todos los vectores μ a coeficientes enteros que cumplen:

$$\lambda_1 \geq \mu_1 \geq \lambda_2 \geq \mu_2 \geq \dots \geq \mu_{n-1} \geq \lambda_n.$$

Por tanto, por ejemplo, la representación V_{321} de $GL(3, \mathbb{C})$ se descompone como representación de $GL(2, \mathbb{C})$ en:

$$V_{32} \oplus V_{31} \oplus V_{21} \oplus V_{22}$$

Cada uno de estas representaciones se descompone como representación de $GL(1, \mathbb{C})$, lo que da:

$$(V_3 \oplus V_2) \oplus (V_3 \oplus V_2 \oplus V_1) \oplus (V_2 \oplus V_1) \oplus V_2$$

Observamos que algunas representaciones irreducibles de $GL(1, \mathbb{C})$ se repiten. Es conveniente guardar la traza de las representaciones ambientes de $GL(2, \mathbb{C})$ y $GL(3, \mathbb{C})$:

$$V \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \lambda_3 & \\ & \mu_1 & & \mu_2 \\ & & \nu_1 & \end{pmatrix}$$

significará: la representación irreducible V_{ν_1} de $GL(1, \mathbb{C})$ que se encuentra dentro de la representación irreducible V_{μ_1, μ_2} de $GL(2, \mathbb{C})$, ella misma subrepresentación de la representación $V_{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3}$ de $GL(3, \mathbb{C})$. El diagrama que aparece en índice de V es un *patrón de Gelfand–Tseitlin*.

Así, V_{321} se decompone como:

$$\begin{aligned} & V \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ & 3 & 2 \\ & & 3 \end{pmatrix} \oplus V \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ & 3 & 2 \\ & & 2 \end{pmatrix} \oplus V \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ & 3 & 1 \\ & & 3 \end{pmatrix} \oplus V \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ & 3 & 1 \\ & & 2 \end{pmatrix} \\ \oplus & V \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ & 3 & 1 \\ & & 1 \end{pmatrix} \oplus V \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ & 2 & 1 \\ & & 2 \end{pmatrix} \oplus V \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ & 2 & 1 \\ & & 1 \end{pmatrix} \oplus V \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ & 2 & 2 \\ & & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Utilizamos este otro teorema:

Teorema 5. *Cualquier representación irreducible (dimensión finita, compleja) de un grupo conmutativo es de dimensión 1.*

La descomposición obtenida gracias a la cadena de subgrupos es, por tanto, una descomposición como suma directa de rectas. Se elige en cada una de estas rectas un vector director de norma 1. Es la *base canónica de la representación*.

Ejercicio 5. La dimensión de V_λ es, por una parte, el número de tableaux de Young semi-estándar de forma λ rellenos con números hasta n , y, por otra parte el número de patrones de Gelfand–Tseitlin de primera fila λ .

Hallar una biyección simple y explícita entre el conjunto de los tableaux de Young semi-estándar de forma λ rellenos con números hasta n , y el conjunto de los patrones de Gelfand–Tseitlin de primera fila λ .