# Accion_gM_gt

Emmanuel Briand

Thursday, July 02, 2015

Consideramos la representación $R : GL(2,C) \to GL(Mat_2(C))$, con $g$ actuando como $M \mapsto gMg^T$.

Introducimos:

- $g$ (elemento del grupo de Lie $GL(2,C)$),
- $dg$ (elemento de su álgebra de Lie $gl(2,C)$),
- $M$ (elemento del espacio soporte $Mat_2(C)$).

```
var('a b c d x y z t');
g  = matrix(SR,[[a,b],[c,d]])  ## elemento del grupo de Lie GL(2,C)
dg = matrix(SR,[[a,b],[c,d]])  ## elemento del[U+FFFD]lgebrade Lie gl(2,C)
M = matrix(SR,[[x,y],[z,t]])   ## elemento de Mat2(C)
print "Elemento del grupo de Lie: ", show(g)
print "Elemento del[U+FFFD]lgebrade Lie:", show(dg)
print "Elemento del espacio soporte de la representaci[U+FFFD]n:",show(M)
```

```
(a, b, c, d, x, y, z, t)
Elemento del grupo de Lie:
```

$$\left(\begin{array}{cc} a & amp; b \\ c & amp; d \end{array}\right)$$

```
None
Elemento del álgebra de Lie:
```

$$\left(\begin{array}{cc} a & amp; b \\ c & amp; d \end{array}\right)$$

```
None
Elemento del espacio soporte de la representación:
```

$$\left(\begin{array}{cc} x & amp; y \\ z & amp; t \end{array}\right)$$

```
None
```

```
def accionGrupo(g,M):
    return g*M*g.transpose().simplify_rational()
print "Imagen de M bajo la acci[U+FFFD]n de g: en la representaci[U+FFFD]n:"
show(accionGrupo(g,M))  ## F(g) (M)
```

```
Imagen de M bajo la acción de g: en la representación:
```

$$\left(\begin{array}{cc} (ax+bz)a+(bt+ay)b & amp; (ax+bz)c+(bt+ay)d \\ (cx+dz)a+(dt+cy)b & amp; (cx+dz)c+(dt+cy)d \end{array}\right)$$

Base del espacio soporte

```
u11=matrix([[1,0],[0,0]])
u12=matrix([[0,1],[0,0]])
u21=matrix([[0,0],[1,0]])
u22=matrix([[0,0],[0,1]])

Base = [u11,u12,u21,u22]
print "Base del espacio soporte:", show(Base)
LL=[(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)] ## seleccion del coeficiente en la matrix
R1 = matrix(SR,4,4,lambda i,j: accionGrupo(g,Base[i])[LL[j]])
print "El elemento siguiente del grupo de Lie:", show(g)
print "es[U+FFFD]representado por el operador de matriz", show(R1)
```

Base del espacio soporte:

$$[\begin{pmatrix} 1 & amp;0 \\ 0 & amp;0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & amp;1 \\ 0 & amp;0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & amp;0 \\ 1 & amp;0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & amp;0 \\ 0 & amp;1 \end{pmatrix}]$$

None

El elemento siguiente del grupo de Lie:

$$\begin{pmatrix} a & amp;b \\ c & amp;d \end{pmatrix}$$

None

está represenatdo por el operador de matriz

$$\begin{pmatrix} a^2 & amp;ac & amp;ac & amp;c^2 \\ ab & amp;ad & amp;bc & amp;cd \\ ab & amp;bc & amp;ad & amp;cd \\ b^2 & amp;bd & amp;bd & amp;d^2 \end{pmatrix}$$

None

En la base siguiente, las matrices $F(g)$ tienen una estructura por bloques. Hemos obtenido subespacios invariantes. %html Introducimos una nueva base, adaptada a la descomposición como suma de respresentaciones:

$$\text{MATRICES} = \text{SIMETRICAS} \oplus \text{ANTISIMETRICAS}$$

```
Base_adaptada = [u11, u22, u12+u21, u12-u21]
print "Base adaptada a la descomposici[U+FFFD]n en suma directa", show(\
    Base_adaptada)
P = matrix([[1,0,0,0],[0,0,0,1],[0,1,1,0],[0,1,-1,0]])  ## Matriz  de \
    cambio de base
R2 = P*R1*P.inverse()
print "El elemento siguiente del grupo de Lie:", show(g)
print "es[U+FFFD]representado por el operador de matriz (con respecto a la \
    base adptada)", show(R2)
```

Base adaptada a la descomposición en suma directa

$$[\begin{pmatrix} 1 & amp;0 \\ 0 & amp;0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & amp;0 \\ 0 & amp;1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & amp;1 \\ 1 & amp;0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & amp;1 \\ -1 & amp;0 \end{pmatrix}]$$

None

El elemento siguiente del grupo de Lie:

$$\begin{pmatrix} a & amp;b \\ c & amp;d \end{pmatrix}$$

None

está representado por el operador de matriz (con respecto a la base adptada)

$$\left(\begin{array}{rrrr} a^{2} & amp; c^{2} & amp; ac & amp; 0 \\ b^{2} & amp; d^{2} & amp; bd & amp; 0 \\ 2\,ab & amp; 2\,cd & amp; bc + ad & amp; 0 \\ 0 & amp; 0 & amp; 0 & amp; -bc + ad \end{array}\right)$$

None

```
%html
Veamos ahora la acci[U+FFFD]n del [U+FFFD]lgebra de Lie
```

Veamos ahora la acción del álgebra de Lie

```
def accionAlgebra(dg, M):
    return dg*M + M*dg.transpose()

A1 = matrix(SR,4,4,lambda i,j: accionAlgebra(dg,Base[i])[LL[j]])
A2 = P*A1*P.inverse()
print "El elemento siguiente del [U+FFFD]lgebra de Lie:", show(dg)
print "est[U+FFFD] representado por el operador de matriz", show(A1)
print "y en la base adaptada", show(A2)
```

El elemento siguiente del álgebra de Lie:

$$\left(\begin{array}{rr} a & amp; b \\ c & amp; d \end{array}\right)$$

None

está representado por el operador de matriz

$$\left(\begin{array}{rrrr} 2\,a & amp; c & amp; c & amp; 0 \\ b & amp; a + d & amp; 0 & amp; c \\ b & amp; 0 & amp; a + d & amp; c \\ 0 & amp; b & amp; b & amp; 2\,d \end{array}\right)$$

None

y en la base adaptada

$$\left(\begin{array}{rrrr} 2\,a & amp; 0 & amp; c & amp; 0 \\ 0 & amp; 2\,d & amp; b & amp; 0 \\ 2\,b & amp; 2\,c & amp; a + d & amp; 0 \\ 0 & amp; 0 & amp; 0 & amp; a + d \end{array}\right)$$

None

```
## Generadores del algebra de Lie
Jmas      = matrix([[0,1],[0,0]])  ## Matrices triangualres superiores \
   estrictas
Jmenos    = matrix([[0,0],[1,0]])  ## ... inferiores estrictas

Jdiag     = matrix([[a,0],[0,d]]) # Diagonales
show(Jmas, Jmenos, Jdiag)
```

$$\left(\begin{array}{rr} 0 & amp; 1 \\ 0 & amp; 0 \end{array}\right) \left(\begin{array}{rr} 0 & amp; 0 \\ 1 & amp; 0 \end{array}\right) \left(\begin{array}{rr} a & amp; 0 \\ 0 & amp; d \end{array}\right)$$

Los vectores de máximo peso de las componentes irreducibles (con sus combinaciones lineales) son las soluciones de $J_+M = 0$

```
accionAlgebra(Jmas,M)
```

```
[y + z     t]
[    t     0]
```

Son las matrices con $z = -y$ y $t = 0$.

```
show(M)
```

$$\left(\begin{array}{rr} x & amp; y \\ z & amp; t \end{array}\right)$$

Los vectores de máximo peso forman un subespacio de dimension 2: por tanto hay dos componentes irreducibles.

Introducimos $v_1$, $v_2$: base del subespacio de los vectores de máximo peso

```
v1 = matrix([[1,0],[0,0]])
v2 = matrix([[0,1],[-1,0]])
show(v1, v2)
show(accionAlgebra(Jdiag, v1), accionAlgebra(Jdiag, v2))
```

$$\left(\begin{array}{rr} 1 & amp; 0 \\ 0 & amp; 0 \end{array}\right) \left(\begin{array}{rr} 0 & amp; 1 \\ -1 & amp; 0 \end{array}\right)$$
$$\left(\begin{array}{rr} 2\,a & amp; 0 \\ 0 & amp; 0 \end{array}\right) \left(\begin{array}{rr} 0 & amp; a + d \\ -a - d & amp; 0 \end{array}\right)$$

$v_1$ es un vector de peso $(2, 0)$, $v_2$ es un vector de peso $(1, 1)$.

```

v20 = v1
v11 = v2
```

La representación se descompone en $V_{2,0} \oplus V_{1,1}$.

Buscamos una base de cada una de las representaciones obtenida aplicando $J_-$ a los vectores de máximo peso.

```
v20_2 = accionAlgebra(Jmenos,v20)
show(v20_2)
```

$$\left(\begin{array}{rr} 0 & amp; 1 \\ 1 & amp; 0 \end{array}\right)$$

```
v20_3 = accionAlgebra(Jmenos,v20_2)
show(v20_3)
```

$$\left(\begin{array}{rr} 0 & amp; 0 \\ 0 & amp; 2 \end{array}\right)$$

```
accionAlgebra(Jmenos, v20_3)
```

```
[0 0]
[0 0]
```

$V_{2,0}$ es el espacio de las matrices simétricas.

```
accionAlgebra(Jmenos, v11)
```

```
[0 0]
[0 0]
```