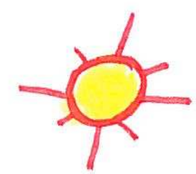
Sistemas Dinamicos ;

una introduccion a la teoria geometrica.

IMUS , Sevilla Julio 2015 

Modelos matematicos para el estudio de fenomenos de evolucion temporal.

Variables de estado: magnitudes usadas para la descripcion del sistema en todo instante.

Sistemas finito-dimensionales:

vector de estado $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \in \mathbb{R}^n$

Sistemas continuos : $t \in \mathbb{R}$

$$\frac{dx}{dt} = f(x,t) \qquad f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

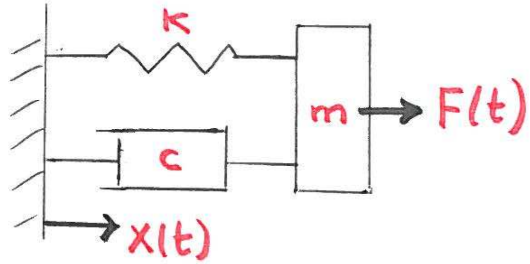
sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias, que resultan de la aplicación de leyes de evolución local.

Caso autónomo : $\dfrac{dx}{dt} = f(x) \quad f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$

→ si $x_{n+1} = t \Rightarrow \dot{x}_{n+1} = 1$, 'truco' para reducir el caso general al caso autónomo.

Un primer ejemplo:

masa-muelle-amortiguador



Ley local: inercia = fuerza

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -Kx - c\frac{dx}{dt} + F(t)$$

Defino: $x_1 = x$, $x_2 = \dot{x}$ $\Rightarrow$

$$\dot{x}_1 = \dot{x} = x_2$$

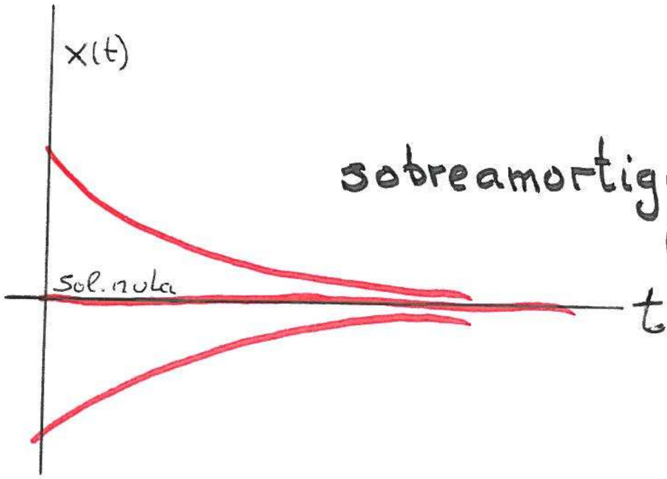
$$\dot{x}_2 = \ddot{x} = -\frac{K}{m}x - \frac{c}{m}\dot{x} + \frac{F(t)}{m}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -\frac{K}{m}x_1 - \frac{c}{m}x_2 + \frac{F(t)}{m} \end{pmatrix} = f(x_1, x_2, t)$$

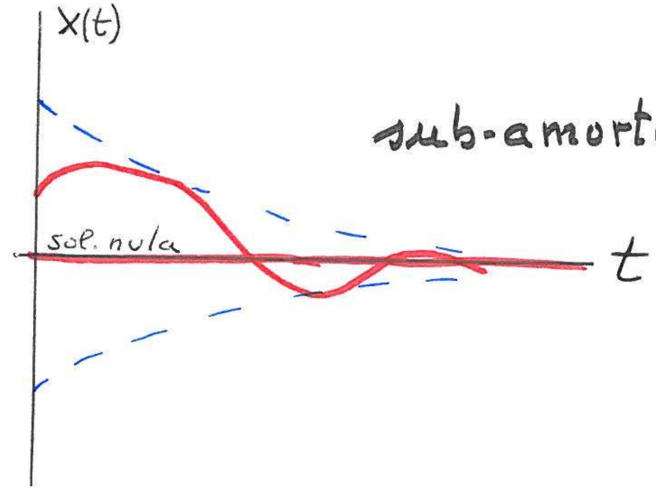
1 grado de libertad $\equiv$ 2 variables de estado.

Solucion de Euler : $e^{\lambda t}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ (autónomo $\equiv F=0$)

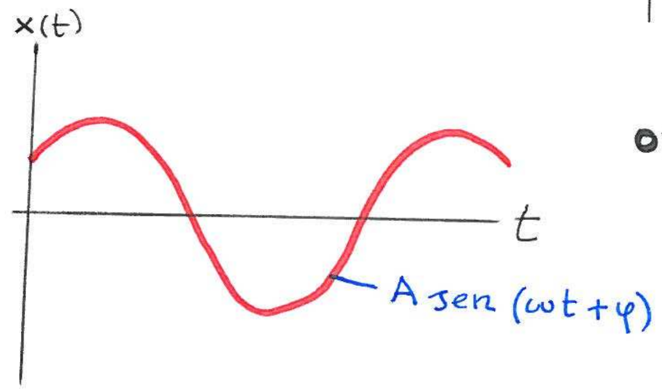
$k>0,\ c>0 \Rightarrow \mathrm{Re}\,\lambda < 0$ (¡ $k<0$; $c<0$! ; investigar)



sobreamortiguado ($\mathrm{Im}\,\lambda = 0$)



sub-amortiguado ($\mathrm{Im}\,\lambda \neq 0$)



oscilador armónico ($\mathrm{Re}\,\lambda = 0$, $\mathrm{Im}\,\lambda = \omega$)

$c = 0$; $\omega^2 = \dfrac{k}{m}$

$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$

Sistema Lineal : fuerzas dependen linealmente de la posición y la velocidad

(¡ resorte no lineal ; amortiguador no lineal ! investigar)

Representación matricial :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{F(t)}{m} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \vec{b}(t)$$

Solución de Euler $(F \equiv 0)$: $e^{\lambda t} \vec{v}$, $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$

(¿ como se calculan $\lambda, \vec{v}$; que relacion tienen con la matriz A)

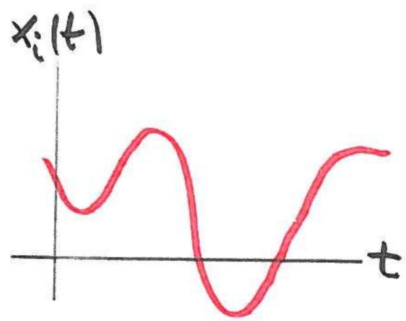
Teoria Geométrica (cualitativa; topológica)

→ NEWTON en sus PRINCIPIA (1687) toma, explícitamente, como modelo los Elementos de Euclides: diagramas, dibujos, razonamientos al estilo de la geometría euclídea.

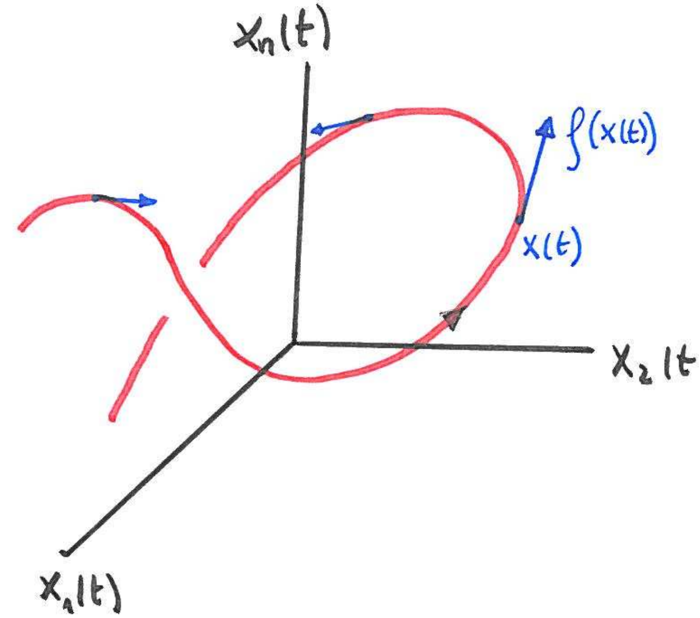
→ LAGRANGE en su MECHANIQUE ANALITIQUE (1788) afirma en el prólogo: "... el lector no encontrará ni una sola figura en esta obra..."

→ POINCARE en su serie de trabajos "Sur les courbes definies par les equations differentielles" (1881-86) resucita el punto de vista geometrico, motivado precisamente por problemas de Mecanica Celeste; introduce ideas y objetos geomètricos completamente nuevos.

La Idea: $\frac{dx}{dt} = f(x)$ $x(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$



formas de onda

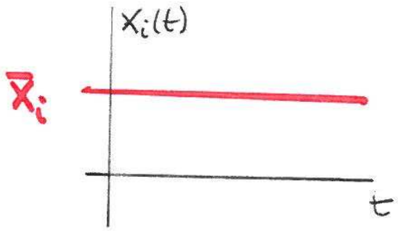


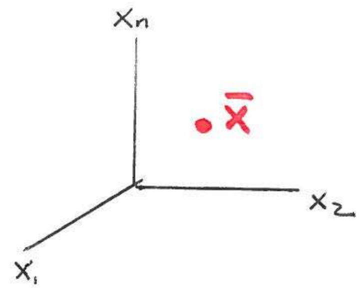
curva en el espacio de estados
$\parallel\!\!|$
orbita

$\longrightarrow$ Si $x(t)$ es solución $\Rightarrow$ $x(t+k)$ es tb. solución $\forall k \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$
Cada òrbita representa ∞ soluciones

Equilibrio ≡ solución constante : $x(t) = \bar{x} \Rightarrow \dot{x} = 0 \Rightarrow f(\bar{x}) = 0$

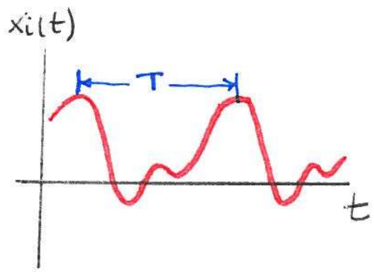
$\rightarrow$ la órbita es un punto

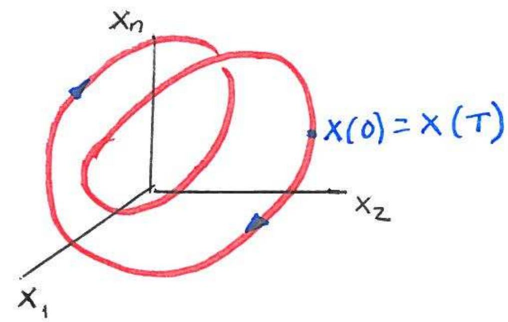




Solucion periódica : $x(t+T) = x(t) \ , \forall t \qquad T \equiv$ periodo

$\rightarrow$ la órbita es una curva cerrada





Estabilidad de equilibrios (cualitativa; local)

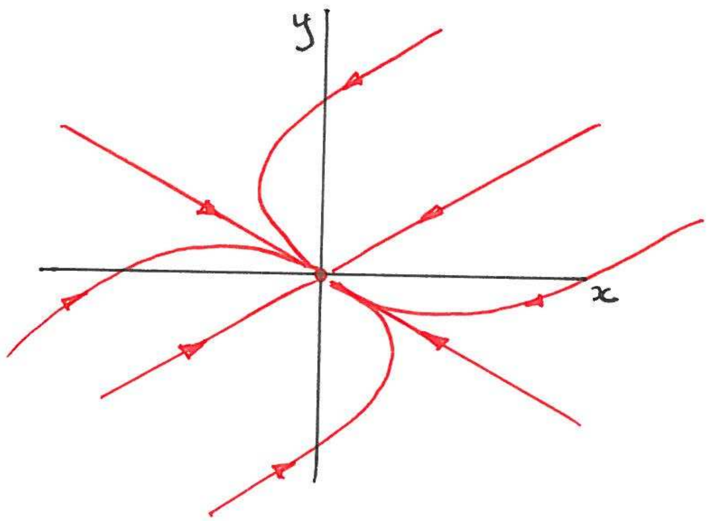
→ $\bar{x}$ es **estable** si toda solución que comienza cerca ($x(0)$ cerca de $\bar{x}$) permanece cerca ($x(t)$ cerca de $\bar{x}$ para $t>0$)

→ $\bar{x}$ es **inestable** si no es estable (!)

→ $\bar{x}$ es **asintóticamente estable** si toda solución que comienza cerca ($x(0)$ cerca de $\bar{x}$) tiende asintóticamente a $\bar{x}$ ($x(t) \to \bar{x}$ cuando $t \to +\infty$)

Sistema lineal plano : $\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$ $\quad A_{2\times 2}$

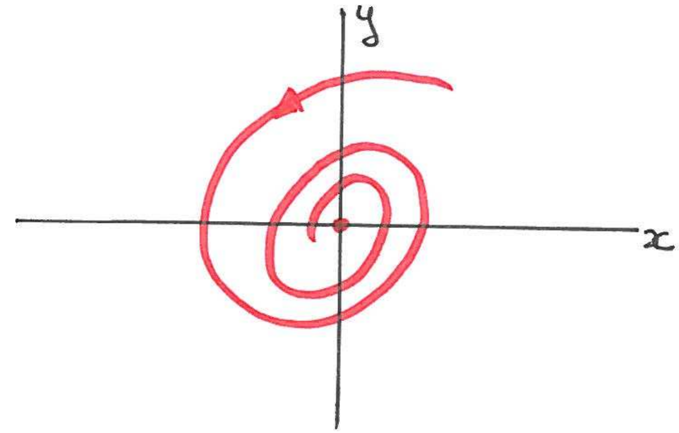
→ recordar : solución $e^{\lambda t}\vec{v}$, λ autovalor
$\vec{v}$ autovector



$\lambda_1 \in \mathbb{R}$, $\lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$

(0,0) equilibrio tipo NODO As. Est.

cfr. caso sobreamortiguado

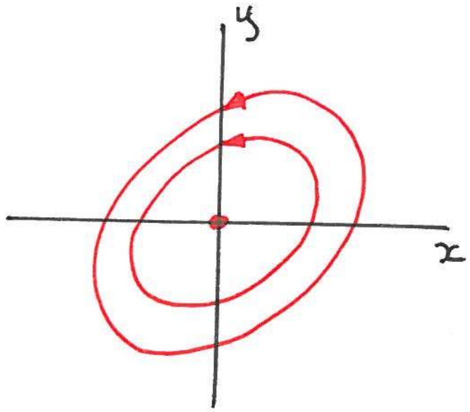


$\mathrm{Re}\,\lambda < 0$, $\mathrm{Im}\,\lambda \neq 0$ $\quad \lambda_1 = \bar{\lambda}_2$

(0,0) equilibrio tipo FOCO As. Est.

cfr. caso subamortiguado

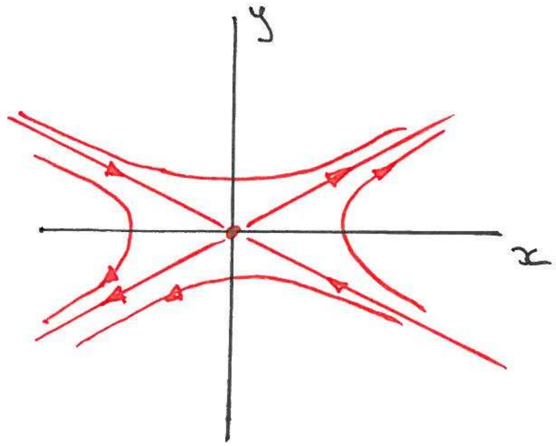
→ los casos con signos positivos corresponden a inestabilidad.



$\lambda_1 = \bar{\lambda}_2 = \omega i$

(0,0) equilibrio tipo CENTRO estable

cfr. caso oscilador armonico: $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$
$\dot{x} = y$



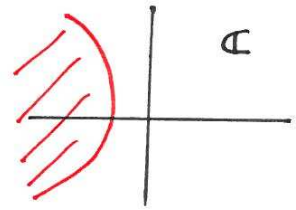
$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$

(0,0) equilibrio tipo SILLA inestable.

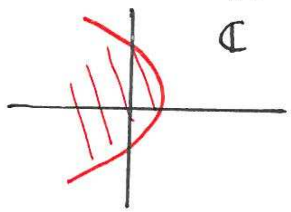
cfr. caso oscilador anarmònico: $\ddot{x} - \omega^2 x = 0$ (investigar)
$\dot{x} = y$

Estabilidad de sistemas lineales : $\dot{x} = Ax$, $x \in \mathbb{R}^n$, A $n \times n$

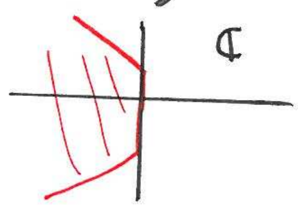
I) $\text{Re}\,\lambda < 0$, $\forall \lambda$ autovalor de A $\Rightarrow$ equilibrio en el origen es Asintoticamente Estable



II) existe λ autovalor de A con $\text{Re}\,\lambda > 0$ $\Rightarrow$ equilibrio en el origen es inestable



III) $\text{Re}\,\lambda \leq 0$, $\forall \lambda$ autovalor de A $\Rightarrow$ puede ser estable ó inestable dependiendo de la multiplicidad geomètrica de los autovalores λ_0, $\text{Re}\,\lambda_0 = 0$



(investigar en $\mathbb{R}^2$ y en $\mathbb{R}^4$ (!))

Estabilidad de equilibrios mediante aproximación lineal.

$\dot{x} = f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$; $\bar{x}$ equilibrio $\Rightarrow f(\bar{x}) = \underline{0}$

$$\dot{x} = f(x) = \underbrace{f(\bar{x})}_{\underline{0}} + \underbrace{Df(\bar{x})}_{A = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{i,j}} (x - \bar{x}) + \dots$$

$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{i,j} \to$ matriz jacobiana de $f(x)$ en $\bar{x}$

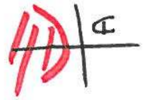
Si $y = x - \bar{x} \Rightarrow \dot{y} = \dot{x} = Ay + \dots$

estabilidad de $\bar{x}$ ~ conducta local ~ $x(t)$ cerca de $\bar{x}$ ~
~ y cerca de $\underline{0}$

Sistema linealizado : $\dot{\tilde{y}} = A\tilde{y}$ debe contener información

Teorema (Lyapunov):

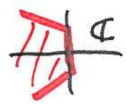
I) si $\mathrm{Re}\,\lambda < 0$, $\forall \lambda$ autovalor de A $\Rightarrow$ $\bar{x}$ es equilibrio Asintótico. Estable



II) si existe λ autovalor de A con $\mathrm{Re}\,\lambda > 0$ $\Rightarrow$ $\bar{x}$ es equilibrio Inestable

—o—

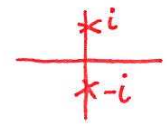
falta III) si $\mathrm{Re}\,\lambda \leq 0$, $\forall \lambda$ autovalor de A $\Rightarrow$??? caso crítico; parte lineal no basta



Investigar (¿numericamente?) $\ddot{x} + x + a\dot{x}^3 = 0$ (Rayleigh)
$a \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x - a y^3 \end{cases}$$

; parte lineal es centro estable.



Sistemas Potenciales con un grado de libertad

$$\ddot{x} + c\dot{x} + V'(x) = 0 \iff \ddot{x} = \underbrace{-V'(x)}_{\text{fuerza que deriva de la función potencial } V(x)} \underbrace{-c\dot{x}}_{\text{amortiguamiento lineal}}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -V'(x) - cy \end{cases} \qquad \text{equilibrios} \equiv \begin{bmatrix} \dot{x} = y = 0 \\ V'(\bar{x}) = 0 \end{bmatrix} \equiv (\bar{x}, 0) \quad \text{con}$$

$\bar{x}$ pto crítico del potencial

Estabilidad de $(\bar{x}, 0)$: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -V''(\bar{x}) & -c \end{pmatrix}$

si $c > 0 \Rightarrow \lambda_1 + \lambda_2 = \text{traza } A = -c < 0$

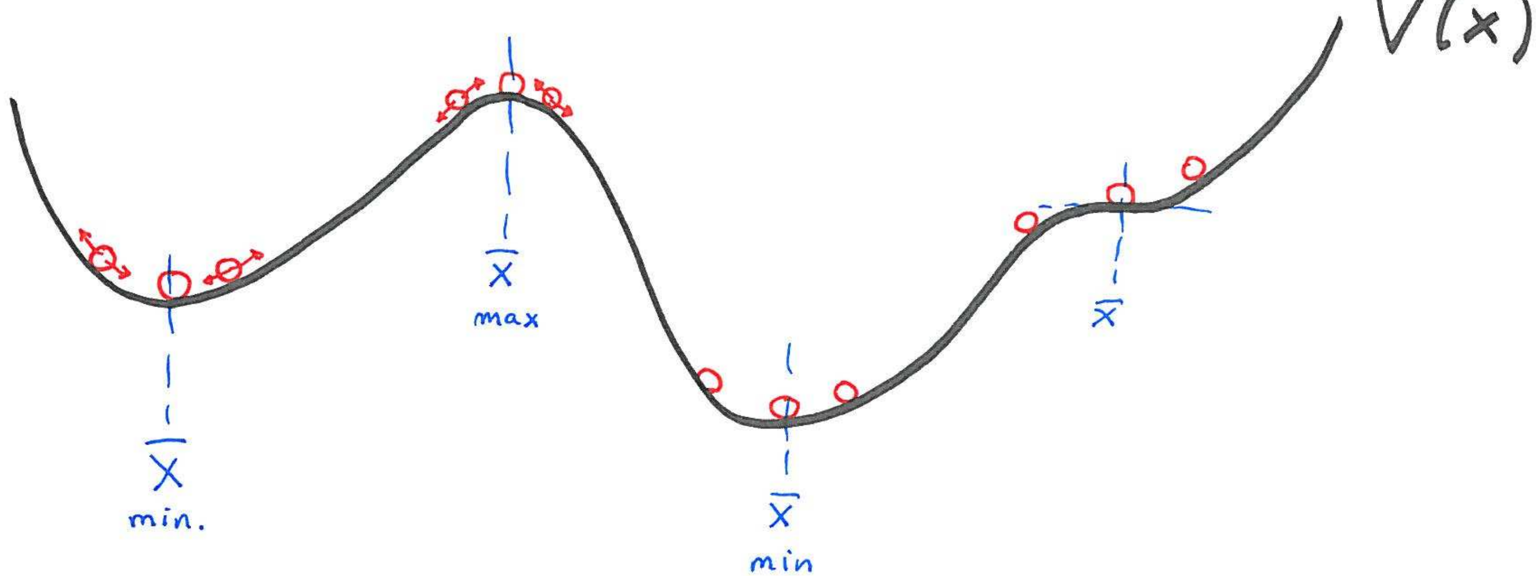
$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = \text{determinante } A = V''(\bar{x})$

Por tanto:

si $\bar{x}$: $V''(\bar{x}) > 0$ (mínimo) $\Rightarrow$ $\mathrm{Re}\,\lambda_j < 0$, $j=1,2$ $\Rightarrow$ $(\bar{x},0)$ Asint. Estable (tipo nodo ó foco)

si $\bar{x}$: $V''(\bar{x}) < 0$ (máximo) $\Rightarrow$ Det. $A < 0$ $\Rightarrow$ $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$ $\Rightarrow$ $(\bar{x},0)$ Inestable (tipo silla)

si $\bar{x}$: $V''(\bar{x}) = 0$ $\Rightarrow$ $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 < 0$ $\Rightarrow$???



Caso conservativo : $c=0$ (sin amortiguamiento)

sea $H(x,y) = \frac{y^2}{2} + V(x) = \underbrace{\frac{\dot{x}^2}{2}}_{\text{E. cinètica}} + \underbrace{V(x)}_{\text{E. potencial}}$ = Energia mecànica

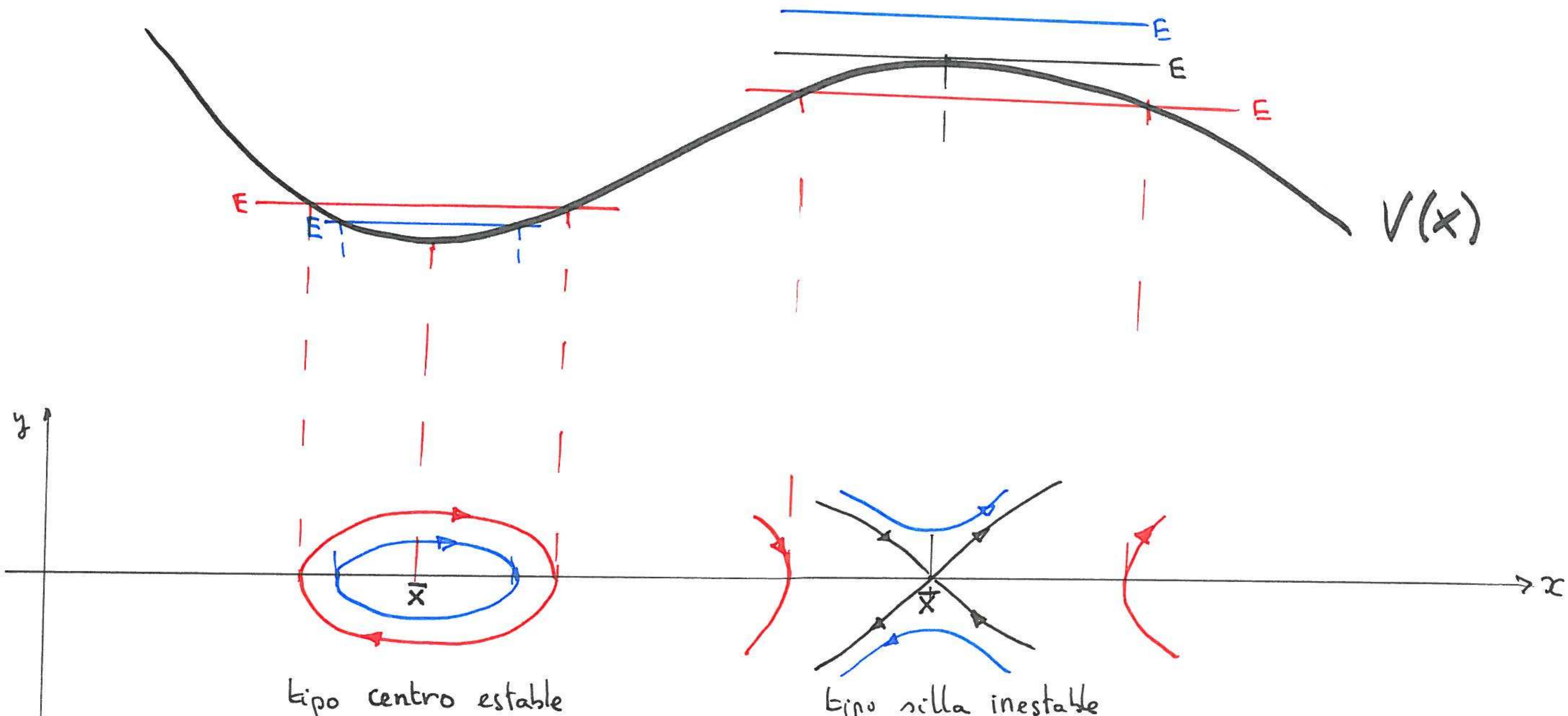
sea $h(t) = H(x(t), y(t)) \Longrightarrow$

$$\frac{dh}{dt} = y \cdot \dot{y} + V'(x)\dot{x} = y(-V'(x)) + V'(x) \cdot y = 0 \Rightarrow h(t) = cte$$

$\Rightarrow \quad H(x,y) = y^2/2 + V(x) = E$ (Energia Mecànica constante)

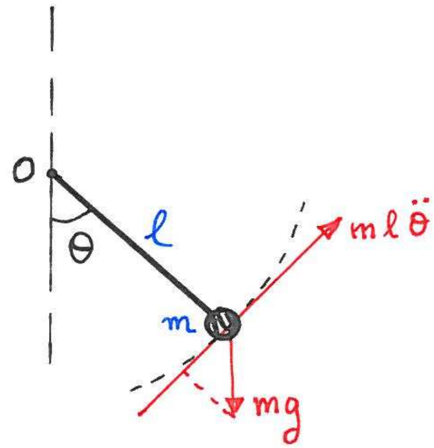
dicho de otro modo : las òrbitas en el plano (x,y) son las curvas de nivel de la función $H(x,y)$

'Despejamos' "y" : $\quad y = \pm\sqrt{2}\cdot\left(E - V(x)\right)^{1/2}$



→ efecto de añadir un 'poco' de rozamiento: $\epsilon > 0$, $|\epsilon| \ll 1$.

Un segundo ejemplo: Pendulo simple (pedigrí)



$$\cancel{m}\ell\ddot\theta = -\cancel{m}g\,\text{sen}\,\theta \quad\Rightarrow\quad \ddot\theta + \omega^2\,\text{sen}\,\theta = 0$$

$$\omega^2 = g/\ell$$

$$V(\theta) = \omega^2(1-\cos\theta) \quad\Rightarrow\quad \ddot\theta + V'(\theta) = 0$$

$$\begin{matrix} x = \theta \\ y = \dot\theta \end{matrix} \quad\Rightarrow\quad \begin{cases} \dot x = y \\ \dot y = -V'(x) = -\omega^2\,\text{sen}\,x \end{cases}$$

$(x,y) \in S^1 \times \mathbb{R}$ cilindro

equilibrios: $\left.\begin{cases} \dot\theta = y = 0 \\ \text{sen}\,\theta = \text{sen}\,x = 0 \end{cases}\right\}$ $x = 0, \pm\pi \Rightarrow$ $(0,0)$ centro estable

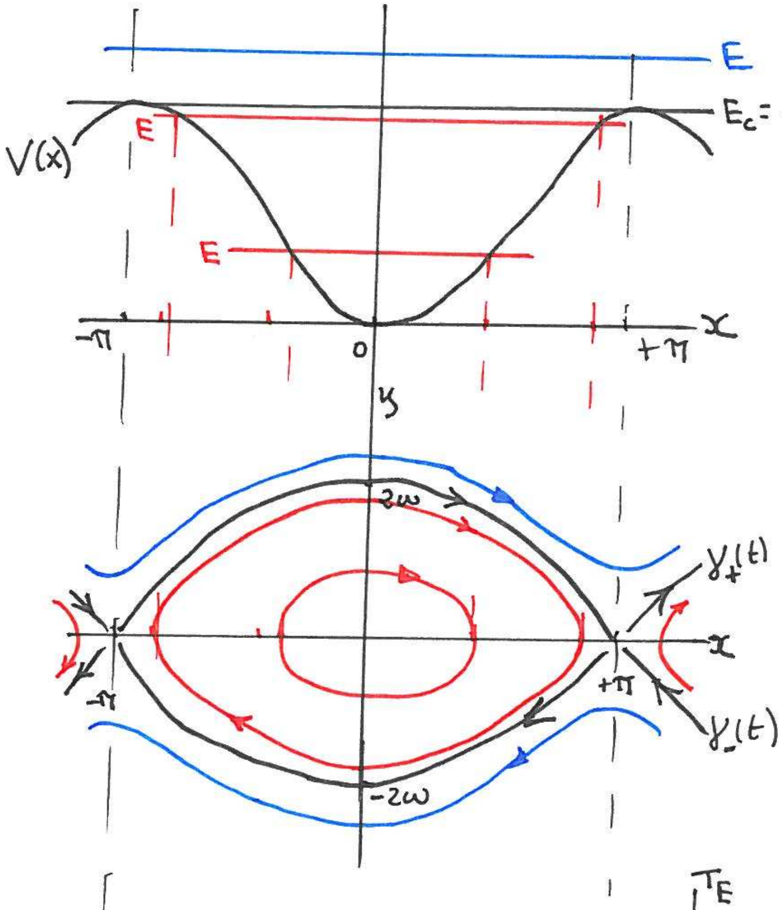
$(\pi,0)$ silla inestable (pendulo invertido)

$$\underbrace{\frac{y^2}{2}}_{\text{cinética}} + \underbrace{\omega^2(1-\cos x)}_{\text{potencial}} = E$$

; linealizacion en $\theta = 0 \to \ddot{\tilde\theta} + \omega^2\tilde\theta = 0$

osc. armónico (isócrono)

$\omega = \sqrt{g/\ell}$



$E > 2\omega^2$ órbitas periódicas de rotación (cerradas en $S^1 \times \mathbb{R}$)

$$\theta(t+T_E) = \theta(t) + 2\pi$$
$$\dot\theta(t+T_E) = \dot\theta(t)$$

$E = 2\omega^2$ péndulo invertido $\theta = \pm\pi,\ \dot\theta = 0$

separatriz $\gamma_\pm(t)$: $\gamma_\pm(0) = 0$

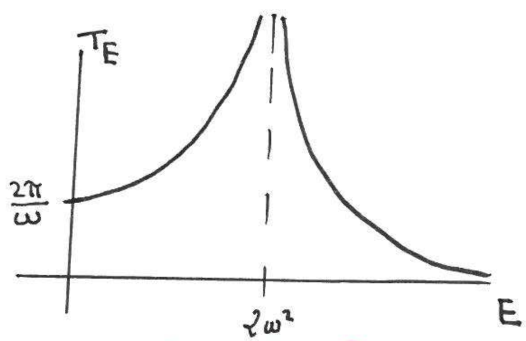
$$\dot\gamma_\pm(0) = \pm 2\omega$$

$\lim \gamma_\pm(t) = \pm\pi$ con $t \to +\infty$

$\lim \gamma_\pm(t) = \mp\pi$ con $t \to -\infty$

$0 < E < 2\omega^2$ órbitas periódicas de libración

$$\theta(t+T_E) = \theta(t)$$
$$\dot\theta(t+T_E) = \dot\theta(t)$$



¡¡No Isócrono!!

¿y los relojes de péndulo? ¡Investigar...!

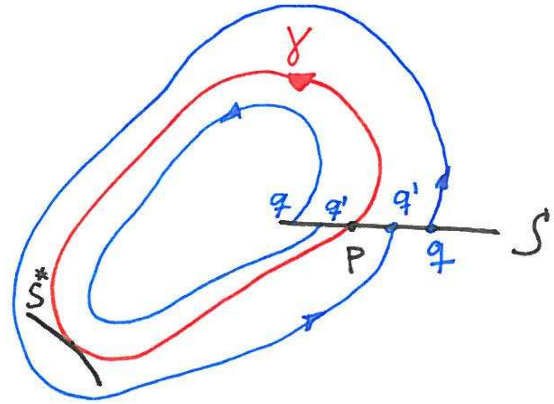
Orbitas cerradas ≡ Soluciones periodicas

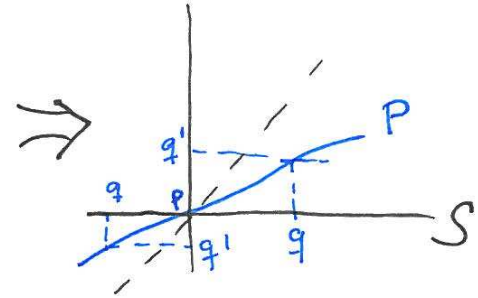
$\dot{x} = f(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$ $\quad \gamma(t)$, solución T-periodica: $\gamma(t+T) = \gamma(t)$ $\forall t$

$\Rightarrow$ orbita cerrada $\gamma \subseteq \mathbb{R}^n$

$\rightarrow$ para su estudio local Poincaré introduce la sección transversal y la aplicación de primer retorno y la correspondiente dinamica discreta

Caso plano.





$p = \gamma(0) = \gamma(T)$

$T > 0$, periodo minimo.

S seccion transversal a γ en p ; $\dim S = 1$

Dado $q \in S$, próximo a p, la correspondiente solución que arranca en q cortarà a la sección S, pasado un tiempo cercano a T, en un punto q'.

Definimos la aplicación de primer retorno $P : S \to S$, $P(q) = q'$

es claro que $P(p) = p$

es decir "p" es pto. fijo de P.

Obtenemos, localmente, una dinámica discreta (unidimensional)

$$q_{k+1} = P(q_k) \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$$

Sistemas discretos : $t \in \mathbb{Z}$

$$x(k+1) = F(x(k)) \qquad F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \text{ función de iteración.}$$

$$x(k) = (x_1(k), \dots, x_n(k)) \in \mathbb{R}^n \quad , \; k \in \mathbb{Z} \;\; (\text{ó } k \in \mathbb{N})$$

$x(0),\ x(1) = F(x(0)),\ x(2) = F(x(1)), \dots\dots \equiv$ órbita hacia adelante de $x(0)$

si existe F^{-1} : $\quad x(0),\ x(-1) = F^{-1}(x(0)),\ x(-2) = F^{-1}(x(-1)), \dots \equiv$ órbita hacia atrás

Como surgen:

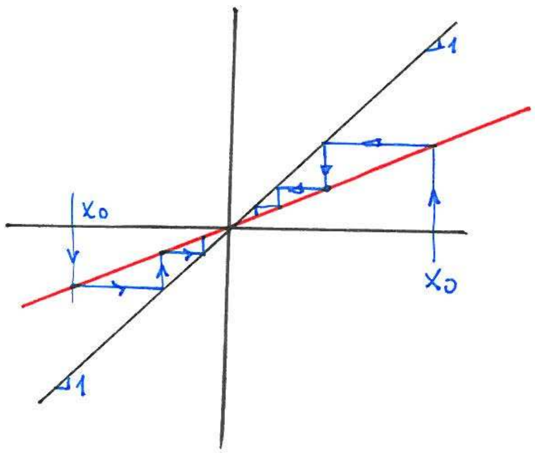
- a partir de sistemas continuos: discretizando el tiempo para esquemas numéricos; "muestreando" el estado (vid. caso anterior)
- al modelar fenómenos específicos; v.g. dinámica poblacional.

Iteración unidimensional. Caso lineal: $x_{k+1} = \lambda x_k$, $x_k \in \mathbb{R}$

- el origen es pto fijo.
- la orbita (solución) es una sucesión (progresión) geométrica:

$$x_k = \lambda^k x_0$$

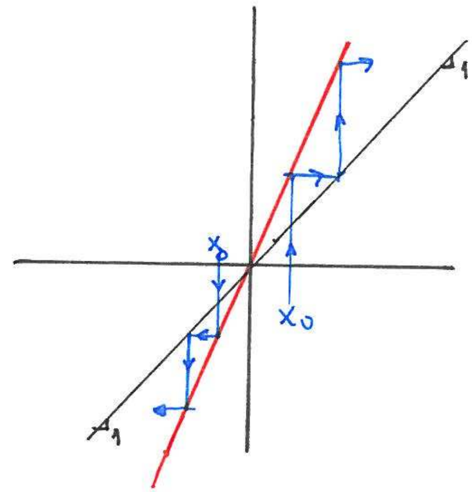
- Graficamente:



$0 < \lambda < 1$

$x_k \to 0$ con $k \to +\infty$

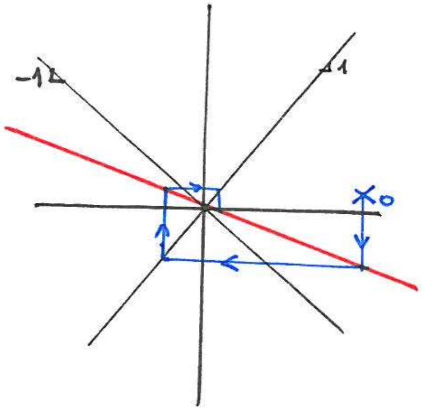
monotonamte.



$1 < \lambda$

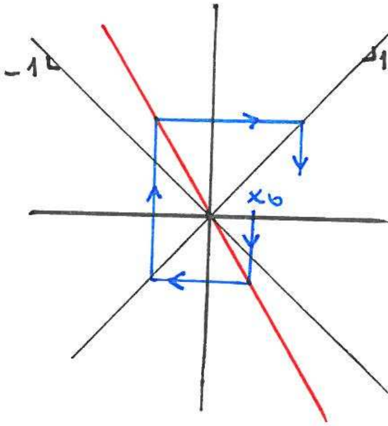
$|x_k| \to \infty$ con $k \to +\infty$

monotonamte.



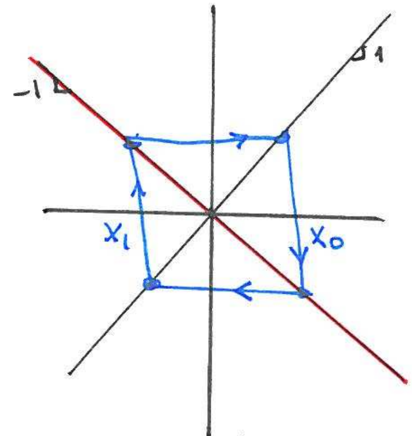
$-1 < \lambda < 0$

$x_k \to 0$ con $k \to +\infty$
oscilatoriate.



$\lambda < -1$

$|x_k| \to \infty$ con $k \to +\infty$
oscilatoriate.



$\lambda = -1$

$\{x_0, x_1, x_0, x_1, \dots\}$
orbitas 2-periódicas

Conclusión: $0 < |\lambda| < 1 \Rightarrow 0$ es pto. fijo atractivo (asint. est.)

$|\lambda| > 1 \Rightarrow 0$ es pto. fijo repulsivo (inest.)

Iteración unidimensional. Puntos fijos.

$x_{k+1}=F(x_k)$, $\quad x_k\in\mathbb{R}$: $\bar{x}$ pto fijo $\Leftrightarrow F(\bar{x})=\bar{x}$

(analogo a equilibrio)

análisis local mediante linealización:

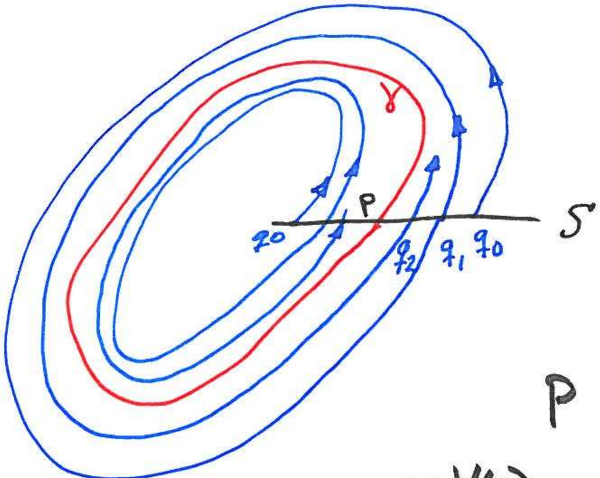
$$x_{k+1}-\bar{x}+\bar{x} = F(x_k-\bar{x}+\bar{x}) = \underset{\bar{x}}{\underset{\shortparallel}{F(\bar{x})}} + F'(\bar{x})(x_k-\bar{x})+\dots$$

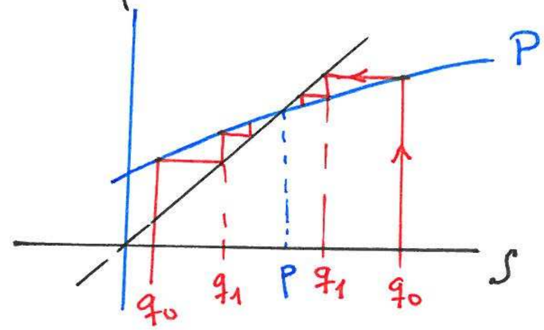
$y_k = x_k-\bar{x} \;\Rightarrow\; y_{k+1}=\lambda\, y_k+\dots \qquad \lambda = F'(\bar{x})$

→ cerca de $\bar{x}$, la iteración lineal $\tilde{y}_{k+1}=\lambda\tilde{y}_k$ debe proporcionar información:

- si $0<|\lambda|<1 \Rightarrow \bar{x}$ es pto. fijo ATRACTIVO (asint. est.)
- si $|\lambda|>1 \Rightarrow \bar{x}$ es pto. fijo REPULSIVO (inest.)
- si $\lambda=\pm 1 \Rightarrow$?? caso crítico.

Retornemos a las órbitas periódicas en el plano...





P aplicación de retorno sobre sección S

$p = \gamma(0)$, pto fijo $P(p) = p$; computamos $\lambda = P'(p)$

→ Si p es pto fijo aislado ⇒ γ es órbita periódica aislada ≡

CICLO LIMITE

→ Ya que las orbitas no pueden cortarse ⇒ P monótona creciente

$$\Rightarrow \quad P'(q) > 0, \quad q \in S$$

→ La dinámica continua 'cerca' de γ viene representada por la dinámica discreta de P 'cerca' de su pto. fijo p.

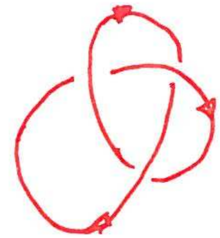
Estabilidad de orbitas periódicas.

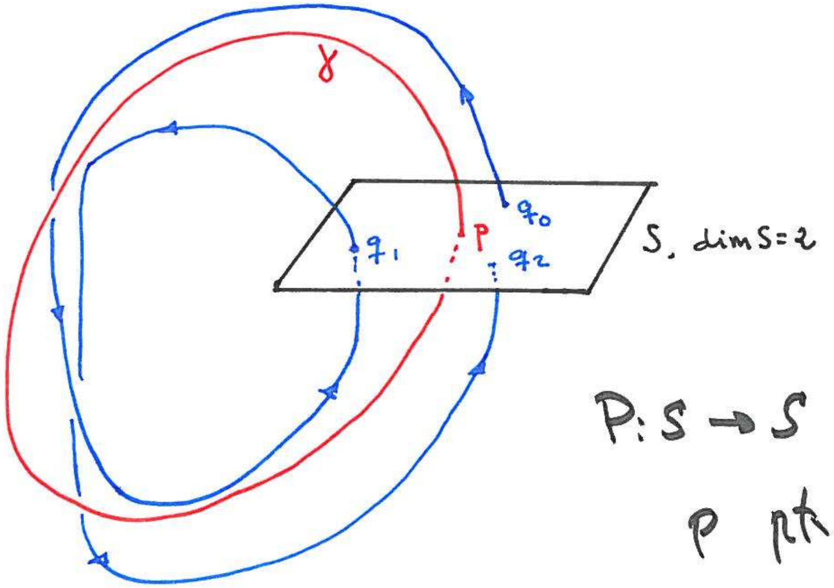
→ sea $\lambda = P'(p)$, $\lambda > 0$; $\lambda \equiv$ multiplicador caracteristico de γ

- si $\lambda < 1 \Rightarrow \gamma$ es orbitalmente asintotic. estable $\equiv$
  ciclo limite estable
- si $\lambda > 1 \Rightarrow \gamma$ es orbitalmente asintotic. inestable $\equiv$
  ciclo limite inestable

→ Los ciclos limites estables representan las oscilaciones periódicas de interès en las aplicaciones: amplitud y periodo definidos y robustez frente a perturbaciones. Son las auto-oscilaciones generadas por los dispositivos electronicos (RELOJES)

Orbitas periódicas en 3-D .





$\dot{x} = f(x)$, $x \in \mathbb{R}^3$

$\gamma(t)$ T-periódica,

$p = \gamma(0)$

$P: S \to S$; $q_{k+1} = P(q_k)$ $k \in \mathbb{N}$

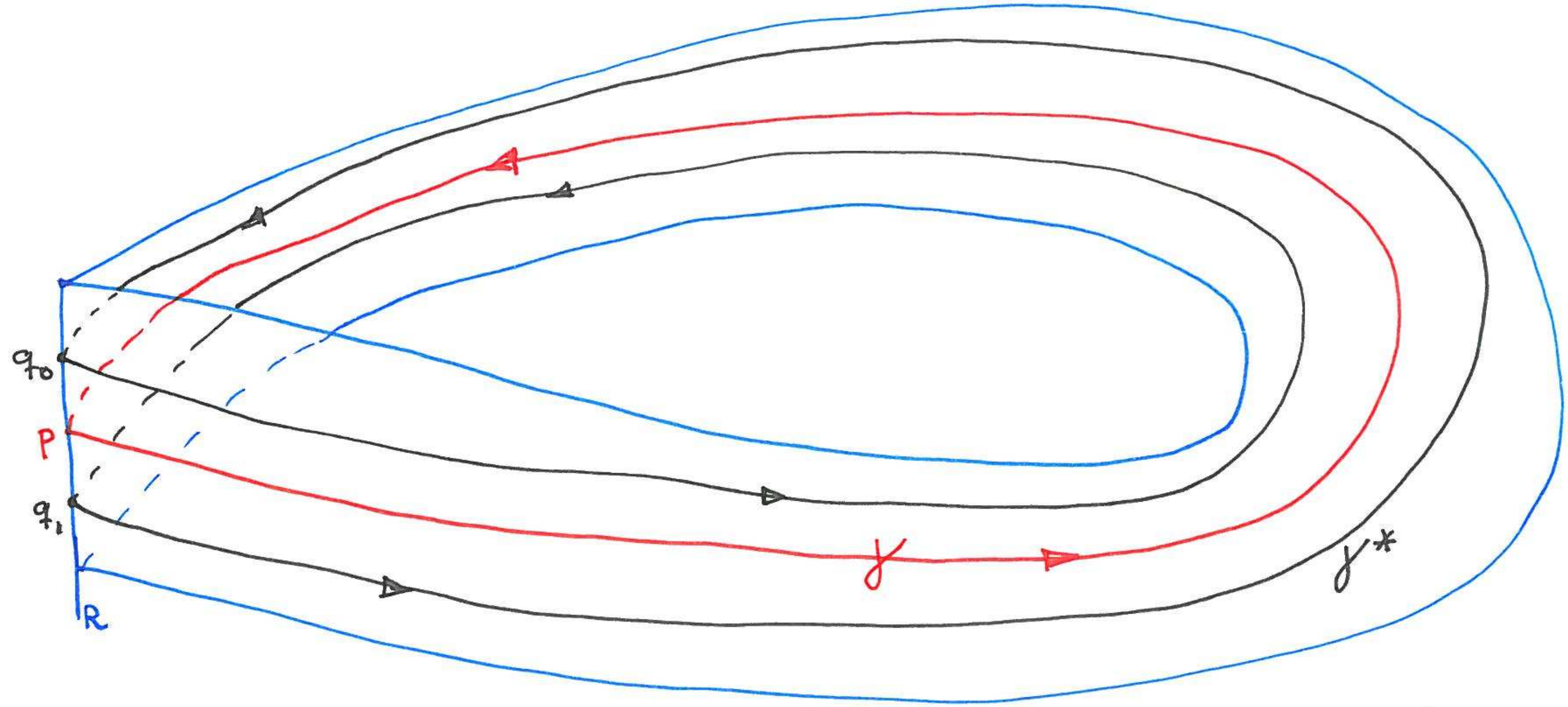
p pto fijo : $P(p) = p$

linealización $\Rightarrow$ $DP(p)$ 2×2 ;

se prueba que $\det DP(p) > 0$ $\Rightarrow$ P conserva la orientación como aplicación del plano en el plano

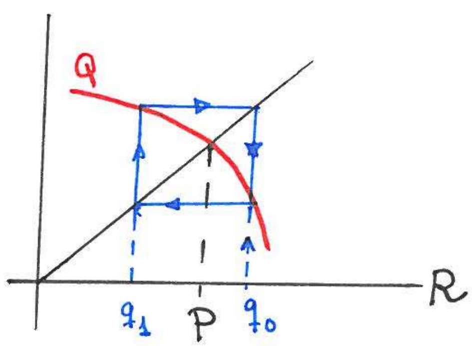
si λ_1, λ_2 autovalores de $DP(p)$ $\Rightarrow$ $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$,

¡pero pueden ser $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$!



$\gamma \subseteq S^1 \# \mathbb{R} \equiv$ banda de Möbius ; y la suponemos invariante.

tomamos seccion R y la aplicación de retorno sobre ella φ, <u>no</u> conserva la orientacion.



$q_1 = \varphi(q_0)$, $q_0 = \varphi(q_1)$; $\{q_0, q_1\}$ orbita discreta 2-periódica

$\Rightarrow$ γ^* orbita periodica de periodo $\sim 2T$

(sub-armonica)

Cómo generamos ciclos límites estables.

- nos limitaremos al caso plano.
- si queremos ser realistas tenemos que tener en cuenta la disipación de energía...
- y por tanto tenemos que considerar sistemas no lineales y que reciban energía...
- la oscilación periódica observada será, pues, el resultado de un balance ....

Un escenario simple (... quizás el más simple...)

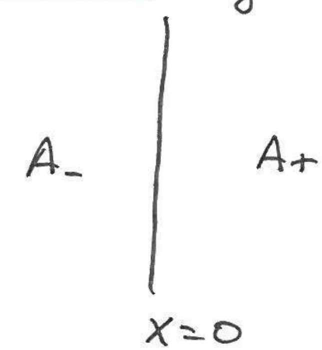
- sistemas lineales a trozos: las funciones lineales a trozos proporcionan buenas aproximaciones a las características no lineales de componentes electrónicos (diodos, transistores, amplificadores operacionales, ...) y, por tanto, son usadas con frecuencia en el modelado de circuitos.

- $\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = F_{\pm}(x,y)$ sistema continuo y con 2 zonas

$$F_-(x,y) = A_- \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + b \ , \quad x \leq 0$$

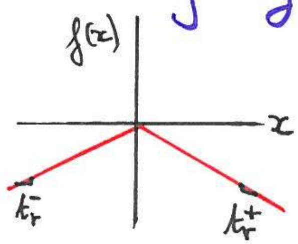
$$F_+(x,y) = A_+ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + b, \quad x \geq 0$$

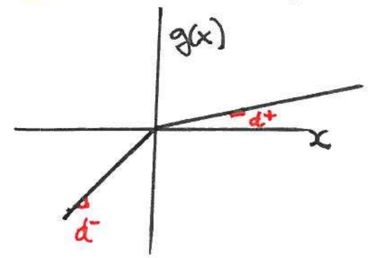
$$A_{\pm} = \begin{pmatrix} a_{11}^{\pm} & a_{12} \\ a_{21}^{\pm} & a_{22} \end{pmatrix} \ ; \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$



En condiciones genéricas $a_{12} \neq 0$ (evitar el desacople) y mediante un cambio lineal de variables, obtenemos la forma canónica de Liènard:

$$\dot{x} = f(x) - y = t_r^{\pm} x - y \quad , \quad t_r^{\pm} = \text{traza de } A_{\pm}$$
$$\dot{y} = g(x) - a = d^{\pm} x - a \quad , \quad d^{\pm} = \text{determinante de } A_{\pm}$$





equilibrios: $x_+ = a/d^+$, $y_+ = t_r^+ x_+$ real si $x_+ > 0$
virtual si $x_+ < 0$

$x_- = a/d^-$, $y_- = t_r^- x_-$ real si $x_- < 0$
virtual si $x_- > 0$

Un primer resultado: si existe un ciclo límite entonces $tr^+ \cdot tr^- < 0$

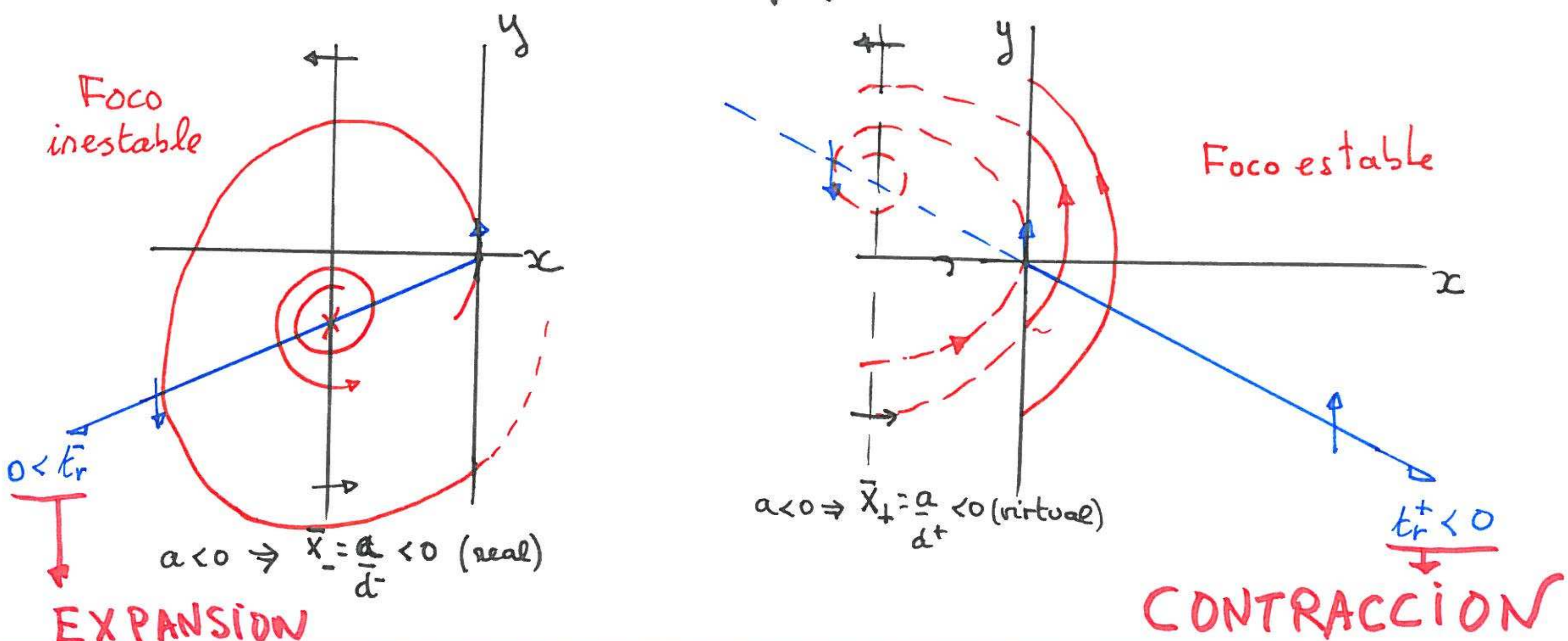
- es decir en una zona la dinámica tiene que ser expansiva (traza > 0) y en la otra tiene que ser contractiva (traza < 0); recordemos que $tr^+ = \operatorname{div} F^+$, $tr^- = \operatorname{div} F^-$

Una segunda condición: las órbitas cerradas de los sistemas planos contienen al menos un equilibrio en su interior.

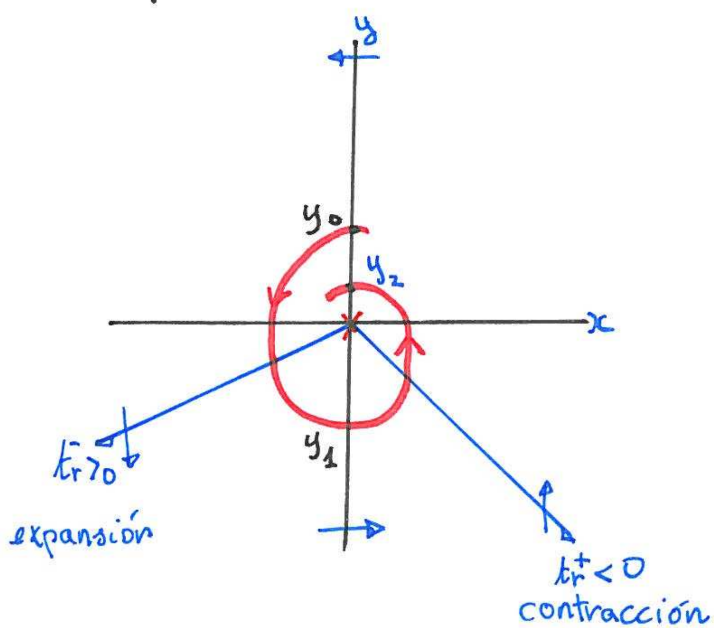
Tenemos a nuestra disposición varias combinaciones; elegimos la dinámica foco en ambas zonas.

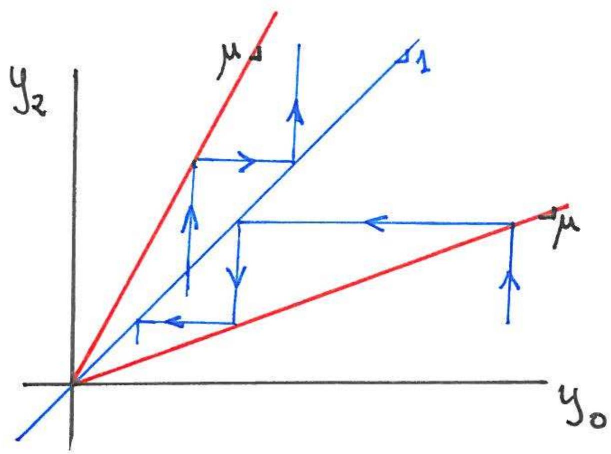
$$0 < \frac{(t_r^{\pm})^2}{4} < d^{\pm} \Rightarrow \lambda = \frac{t_r^{\pm}}{2} \pm (\omega^{\pm})i \quad \text{autovalores de } A_{\pm}$$

con $(\omega^{\pm})^2 = d^{\pm} - (t_r^{\pm})^2/4$. (recordar $\lambda^2 - \text{traza}\cdot\lambda + \text{determ.} = 0$)



El último 'ingrediente' que necesitamos es una medida del balance entre contracción y expansión. Para ello estudiamos el caso homogéneo, $a=0 \Rightarrow$ equilibrio en $(0,0)$





$$y_2 = \mu\, y_0$$

$$\mu = e^{\left(\frac{t_r^+}{\omega^+} + \frac{t_r^-}{\omega^-}\right)\frac{\pi}{2}}$$

sea $\rho = \dfrac{t_r^+}{\sqrt{d^+}} + \dfrac{t_r^-}{\sqrt{d^-}}$

Si $\rho < 0 \Rightarrow \mu < 1 \Rightarrow$ contraccion global (Foco est.)

Si $\rho = 0 \Rightarrow \mu = 1 \Rightarrow$ centro global

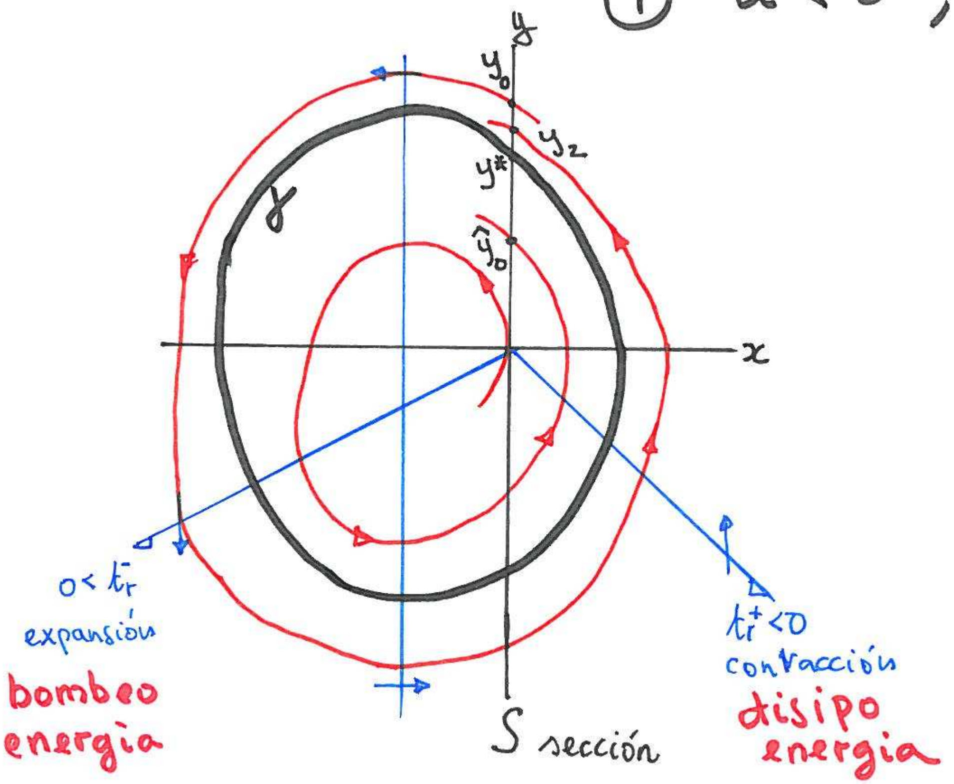
Si $\rho > 0 \Rightarrow \mu > 1 \Rightarrow$ expansion global (Foco inest.)

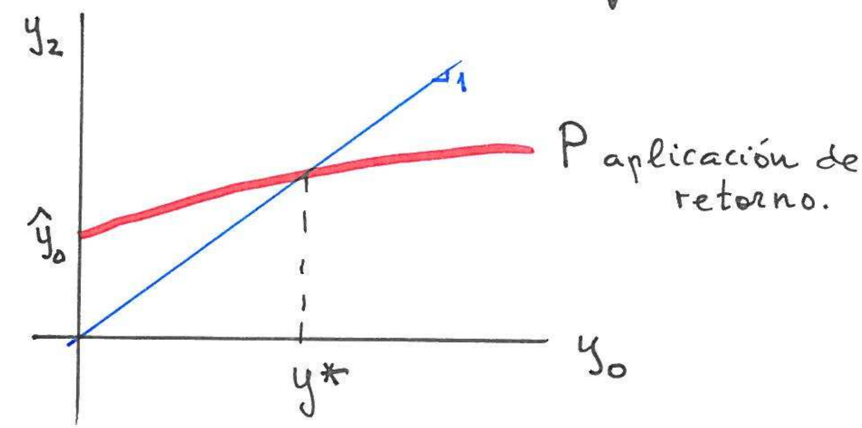
La receta :

① $t_r^+ < 0$, $t_r^- > 0$ ② $(t_r^\pm)^2/4 < d^\pm$ foco-foco

③ $\dfrac{t_r^+}{\sqrt{d^+}} + \dfrac{t_r^-}{\sqrt{d^-}} < 0$, contracción global

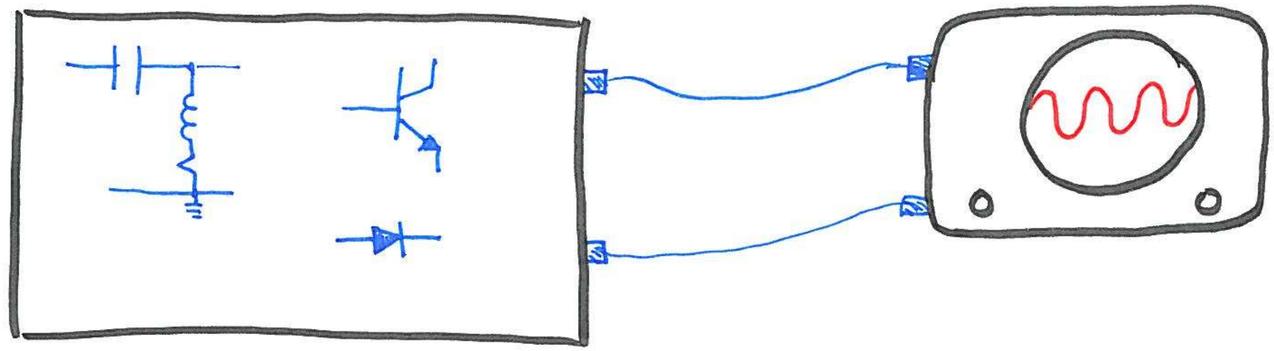
④ $a < 0$, equilibrio real en $x < 0$ es foco inest.





al aplicar la 'receta' obtenemos un único ciclo límite estable γ

* investigar otras combinaciones: foco-nodo, foco-silla, ... (!)



¿Que falta?

Bifurcaciones en sistemas parametrizados.

$\dot{x} = f(x, \mu)$ $\quad x \in \mathbb{R}^n$ espacio de estados

$\qquad\qquad\qquad \mu \in \mathbb{R}^k$ espacio de parámetros (de control)

bifurcación $\equiv$ cambio en la conducta dinámica al variar los parámetros

→ La situación más simple considera los cambios en el número y estabilidad de los equilibrios.

→ Abordaremos el caso de los sistemas potenciales con 1 grado de libertad.

Tenemos $V(x,\mu)$ $x \in \mathbb{R}$, $\mu \in \mathbb{R}$ familia uniparamétrica de funciones potenciales. Recordemos:

$\bar{x}$ equilibrio $\Rightarrow$ $V'(\bar{x},\bar{\mu}) = 0$ (pto crítico)
para $\bar{\mu}$

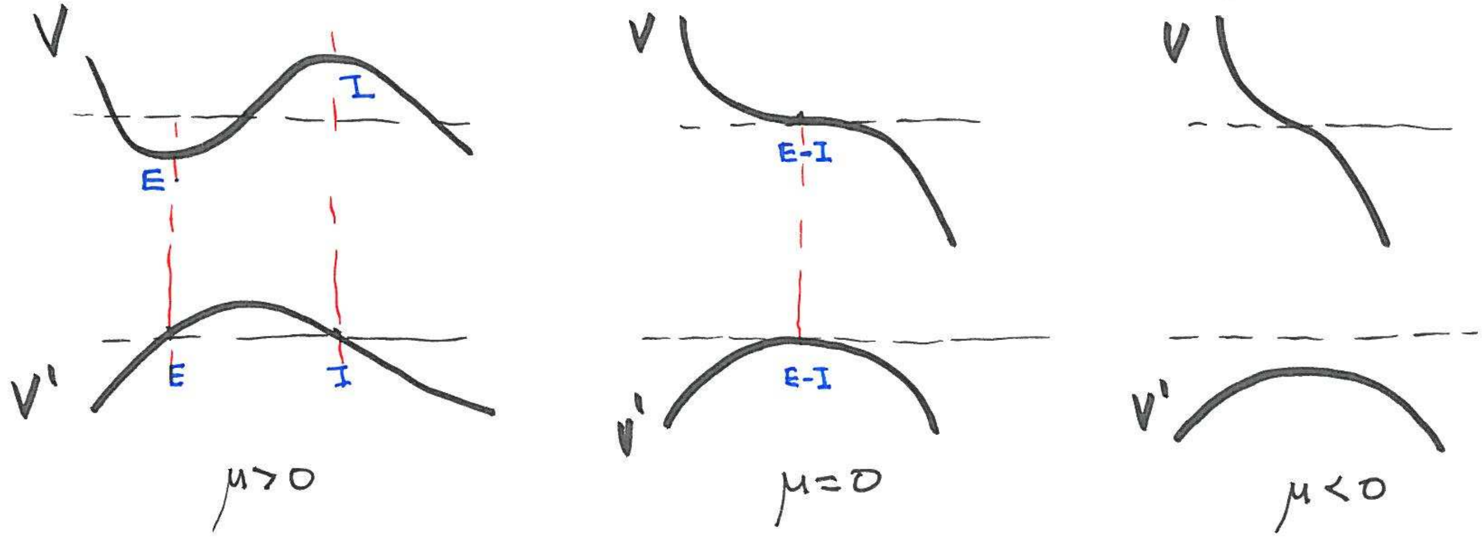
y además si $V''(\bar{x},\bar{\mu}) > 0 \Rightarrow \bar{x}$ estable (mínimo)

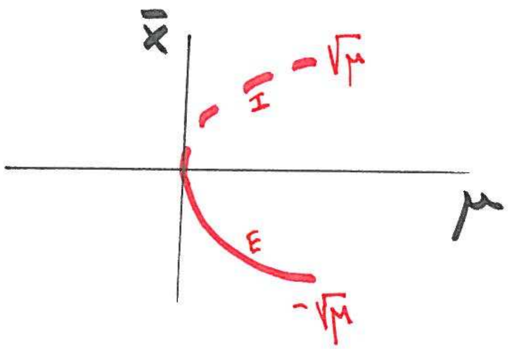
$V''(\bar{x},\bar{\mu}) < 0 \Rightarrow \bar{x}$ inestable (máximo)

Veamos un par de escenarios y sus correspondientes aplicaciones.

Bifurcación tipo pliegue o pto. límite (fold):

$V(x,\mu) = \mu x - x^3/3$ (forma canónica)



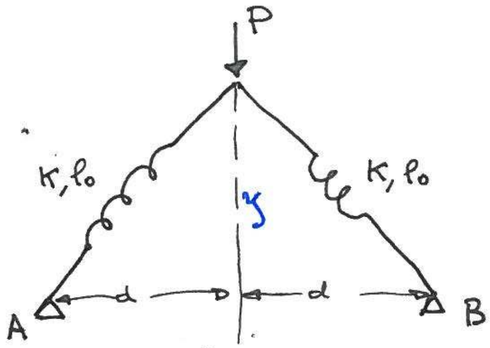


$V' = \mu - x^2 \rightarrow \mu - \bar{x}^2 = 0$

$\rightarrow \bar{x}_{\pm} = \pm\sqrt{\mu} \quad \mu > 0$

2 equilibrios, uno estable y otro inestable se unen para el valor crítico del parámetro y desaparecen

Modelo simple de un arco cargado.



$$\left.\begin{array}{l} V(y) = 2 \cdot \frac{K}{2}(\ell-\ell_0)^2 + Py \\ \ell^2 = y^2 + d^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{adimensionar}$$

$$\frac{V}{2K\ell_0^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\ell}{\ell_0}-1\right)^2 + \frac{P}{2K\ell_0}\cdot\frac{y}{\ell_0} \quad ; \quad \hat{\ell} = \frac{\ell}{\ell_0} \; ; \; \tilde{y} = \frac{y}{\ell_0} \; ; \; \mu = \frac{P}{2K\ell_0} \; ; \; \boxed{\rho = \frac{d}{\ell_0} < 1}$$

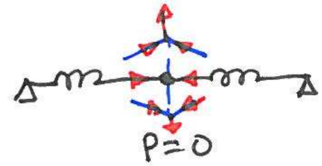
$$\tilde{\ell}^2 = \tilde{y}^2 + \rho^2 \Rightarrow \hat{\ell}(y) \quad ; \quad 2\,\hat{\ell}\,\frac{d\tilde{\ell}}{d\tilde{y}} = 2\tilde{y}$$

$$\Rightarrow \quad \tilde{V}(\tilde{y},\mu,\rho) = \frac{1}{2}\left(\tilde{\ell}(y)-1\right)^2 + \mu\tilde{y}$$

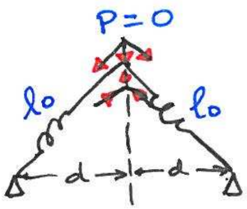
$$\frac{\partial\tilde{V}}{\partial\tilde{y}} = \left(\tilde{\ell}(y)-1\right)\cdot\frac{d\hat{\ell}}{d\tilde{y}} + \mu = \left(\hat{\ell}(y)-1\right)\frac{\hat{y}}{\hat{\ell}} + \mu = \tilde{y} - \frac{\tilde{y}}{\sqrt{\rho^2+\tilde{y}^2}} + \mu$$

equilibrios $\frac{\partial\tilde{V}}{\partial\tilde{y}} = 0 \Rightarrow \boxed{\mu = -\tilde{y} + \frac{\tilde{y}}{\sqrt{\rho^2+\tilde{y}^2}}}$ curva en el plano $\mu - \tilde{y}$

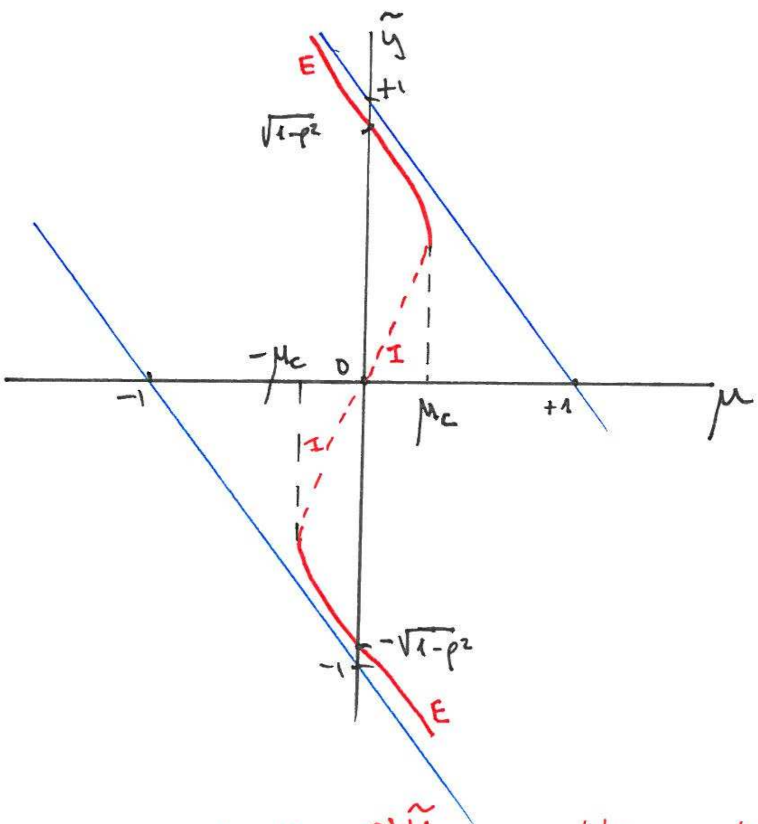
A ojo, sin matemáticas ... : $d < l_0$



Equilibrio inestable en $y=0$, $P=0$ $(\tilde{y}=0, \mu=0)$

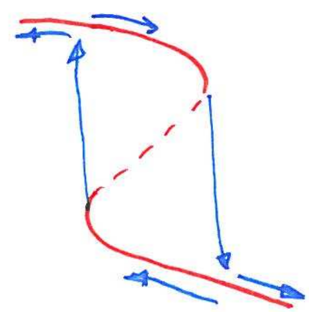


Equilibrio estable en $y = \pm\sqrt{l_0^2 - d^2}$, $P=0$ $\left(\tilde{y} = \pm\sqrt{1-\rho^2}, \mu=0\right)$



* en μ_c y $-\mu_c$ se producen bifurcaciones tipo pliegue

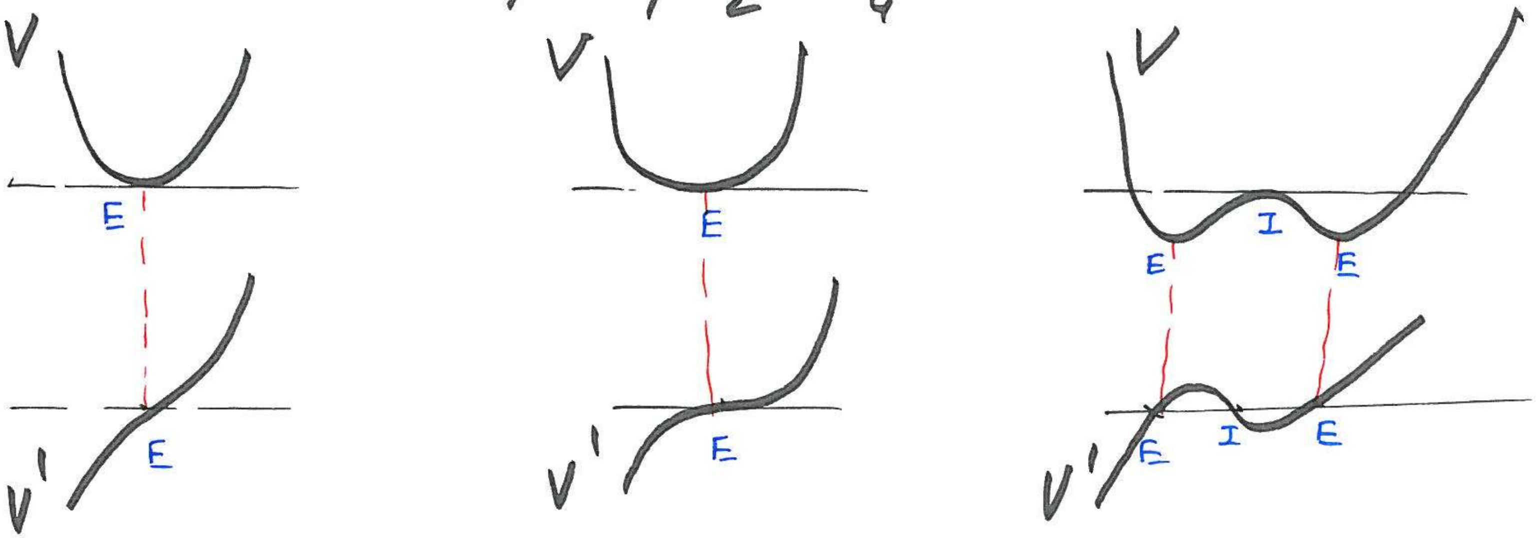
* globalmente tendríamos un doble pliegue y la consiguiente de histéresis



Tareas: calcular $\dfrac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial \tilde{y}^2}$ para obtener estabilidad; calcular μ_c ; y el caso $l_0 < d$?

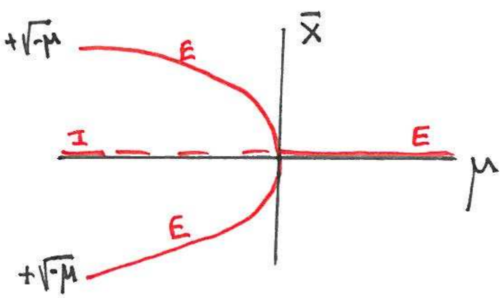
Bifurcación tipo tridente (pitchfork)

$$V(x,\mu) = \mu \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4}$$ (par en x) (simetría $x \to -x$)



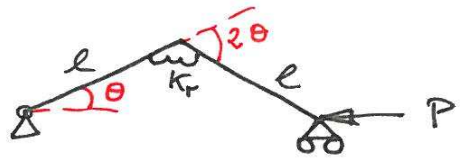
$\mu > 0$ $\qquad$ $\mu = 0$ $\qquad$ $\mu < 0$

$$V' = \mu x + x^3 = 0 \Rightarrow \bar{x}(\mu + \bar{x}^2) = 0$$



el equilibrio en el origen pasa de ser estable ($\mu > 0$) a ser inestable ($\mu < 0$) y aparecen 2 equilibrios estables y simétricos.

Modelo simple de pandeo



$$V(\theta) = \frac{1}{2}\, k_r (2\theta)^2 + P \cdot 2l \cos\theta \quad \Rightarrow \text{adim.}$$

$$\frac{V}{4k_r} = \frac{\theta^2}{2} + \frac{P \cdot l}{2k_r} \cos\theta \quad \Rightarrow \quad \mu = \frac{Pl}{2k_r}$$

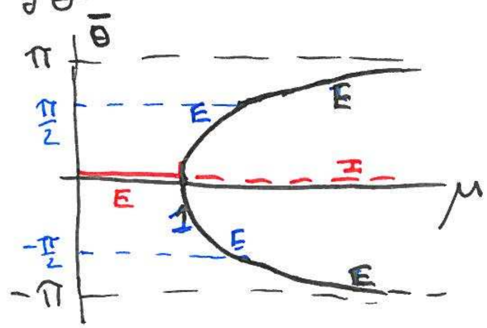
$$\hat{V}(\theta,\mu) = \frac{\theta^2}{2} + \mu \cos\theta \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \hat{V}}{\partial \theta} = \theta - \mu \,\text{sen}\,\theta$$

equilibrios : $\bar{\theta} - \mu \,\text{sen}\,\bar{\theta} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mu = \dfrac{\bar{\theta}}{\text{sen}\,\bar{\theta}} \qquad -\pi < \theta < \pi$

$\bar{\theta} = 0$, para todo μ

$$\frac{\partial^2 \hat{V}}{\partial \theta^2}(\theta,\mu) = 1 - \mu \cos\theta$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2}(0,\mu) = 1 - \mu \quad \begin{cases} \mu < 1 & \text{estable} \\ \mu > 1 & \text{inestable} \end{cases}$$



para $P > \dfrac{2k_r}{l}$ la estructura pandea

¿a cual de los dos equilibrios simetr.?

(investigar 'imperfección')

Bifurcaciones dinámicas. Bifurcación de Hopf.

→ Acabamos de ver bifurcaciones estáticas, que sólo involucraban equilibrios y su estabilidad. Las llamadas bifurcaciones dinámicas involucran, además de las soluciones de equilibrio, soluciones más complejas. Vamos a limitarnos a la llamada bifurcación de Hopf, en la que asociada a la pérdida de estabilidad del equilibrio aparece una órbita periódica.

Bifurcación de Hopf en el plano.

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F(x,y,\mu) \\ G(x,y,\mu) \end{pmatrix} \quad , \mu \in \mathbb{R}$$

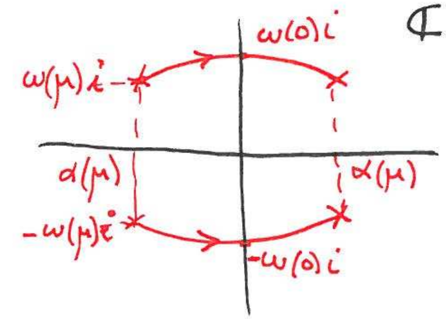
Hay una solución de equilibrio para todo valor de μ que supondremos situada en el origen:

$$F(0,0,\mu)=0$$
$$G(0,0,\mu)=0$$

Linealizamos : $A(\mu) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} \end{pmatrix}_{(0,0)}$

La primera hipótesis es sobre el espectro de $A(\mu)$:

(H1) $\lambda, \bar{\lambda}(\mu) = \alpha(\mu) \pm \omega(\mu) i$



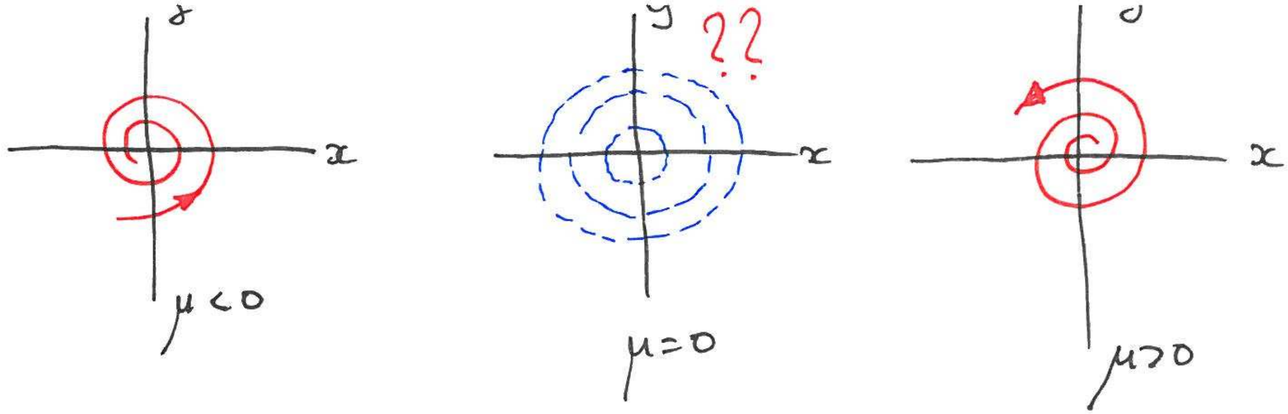
$\alpha(\mu) < 0$, $\mu < 0$

$\alpha(0) = 0$

$\alpha(\mu) > 0$, $\mu > 0$

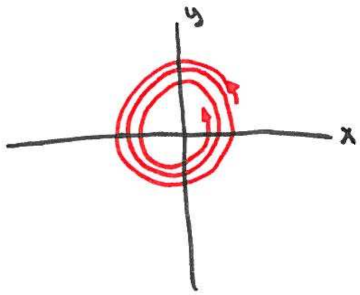
con $\alpha'(0) > 0$, $\omega(\mu) > 0$

es decir el equilibrio pasa de ser un foco estable para $\mu < 0$, a un foco inestable para $\mu > 0$. Notemos que en el valor crítico $\mu = 0$ la linealización produce un centro pero no sabemos cuál es la conducta local (recordar caso crítico del Teorema de Lyapunov)



La siguiente hipótesis hace referencia, precisamente, a la dinámica local para $\mu=0$; su determinación, como veremos más adelante depende de los términos cuadráticos y cúbicos del desarrollo de F, G en $(0,0,0)$.

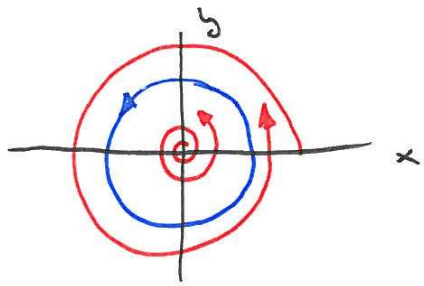
(H2) para $\mu=0$ el equilibrio en el origen es tipo <u>foco débil atractivo</u>:

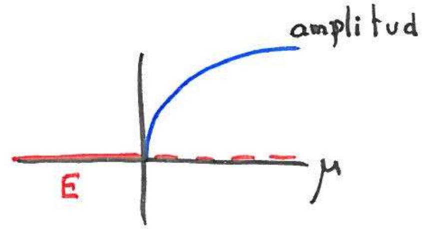


el término débil alude a que las órbitas, aunque son espirales, no son logarítmicas como en el caso lineal y así el radio polar se 'contrae' en cada vuelta de manera bien distinta (vid. infra)

Bajo las hipótesis (H1), (H2) se prueba:

existe para $\mu > 0$ ciclo límite estable cuya amplitud crece con $\sqrt{\mu}$ y cuyo periodo es aproximado por $\frac{2\pi}{\omega(0)}$





Este sencillo mecanismo de generación de oscilaciones periódicas observables es muy utilizado tanto en el diseño de sistemas osciladores como en la ingeniería de control (para evitarlas)

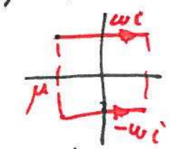
El ejemplo canónico:

$$\begin{pmatrix}\dot x\\ \dot y\end{pmatrix} = \mu\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-y\\ x\end{pmatrix}\omega - a(x^2+y^2)\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

; está preparado; en polares

$\dot r = \mu r - a r^3$; $\dot\theta = \omega > 0$; parte lineal $A(\mu) = \begin{pmatrix}\mu & -\omega\\ \omega & \mu\end{pmatrix} \Rightarrow$ H1

$\lambda, \bar\lambda = \mu \pm i\omega$



$(\mu - ar^2)\cdot r = 0 \Rightarrow r = 0$ equilibrio $(0,0)$

$\bar r = (\mu/a)^{1/2}$ $\quad \mu>0,\ a>0 \Rightarrow$ $\tilde x = \bar r \cos\omega t$, $\tilde y = \bar r\,\mathrm{sen}\,\omega t$ solución $\frac{2\pi}{\omega}$-periódica

→ para $a=0$ $\quad \dot r = -ar^3$, $\dot\theta = \omega$ $\quad a>0 \Rightarrow \dot r < 0 \Rightarrow r\downarrow \Rightarrow (0,0)$ foco débil atractivo H2

* Notar la diferente conducta de las espirales para $\mu \neq 0$ $\left(\frac{dr}{d\theta} \approx \frac{\mu}{\omega} r\right)$ y para $\mu = 0$ $\left(\frac{dr}{d\theta} = \frac{-a}{\omega} r^3\right)$

Tarea: ¿qué pasa cuando $a<0$?

Un ejemplo más realista:

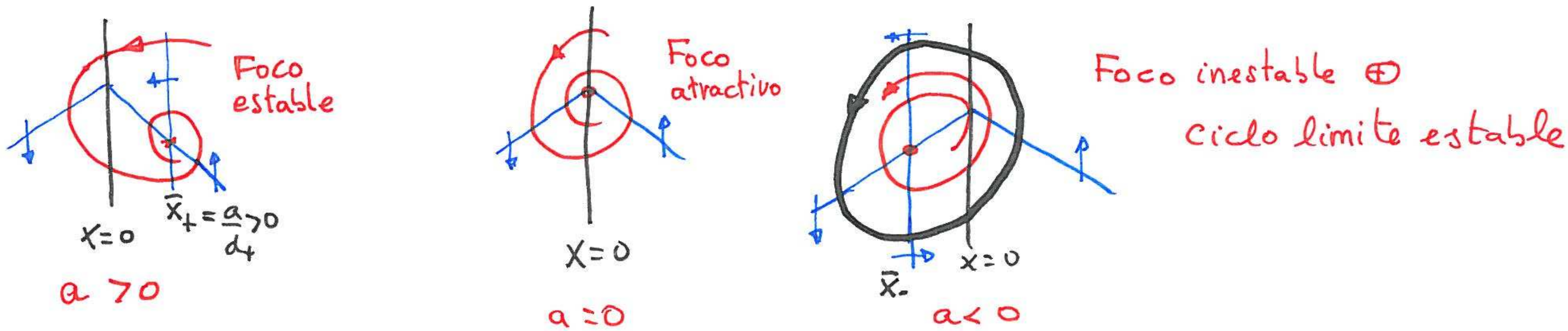
nuestro sistema plano lineal a trozos y continuo en forma de Liénard:

$$\dot{x} = t_r^{\pm} x - y$$
$$\dot{y} = d^{\pm} x - a$$

recordemos la receta : $t_r^- > 0$, $t_r^+ < 0$; Foco - Foco ;
expansión contracción

y $\dfrac{t_r^+}{\sqrt{d^+}} + \dfrac{t_r^-}{\sqrt{d^-}} < 0$ (contracción global ó el origen es foco atractivo en el caso homogéneo $a = 0$)

Si tomamos "a" como parámetro de bifurcación (de control)



¿ como varian la amplitud y el periodo con el parámetro "a" ?