**CÁLCULO INFINITESIMAL (GRADO EN MATEMÁTICAS) GRUPO C.**

**PRIMERA PRUEBA, SEGUNDO CUATRIMESTRE 16/04/2015.**

1.- [1,5 puntos] Demostrar la *Condición de integrabilidad de Riemann*:

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ acotada.

$$f \in \mathcal{R}[a, b] \iff \forall \varepsilon > 0,\ \exists P \in \mathcal{P}[a, b] \text{ tal que } U(f, P) - L(f, P) < \varepsilon.$$

2.- Indicar si los siguientes enunciados son VERDADEROS o FALSOS, justificando la respuesta.

(a) [0,5 puntos] Las funciones $F(x) = \frac{x}{1+x^4}$ y $G(x) = \frac{x-1}{1+x^4}$ son primitivas de una misma función.

(b) [0,5 puntos] Toda función continua en $[0, 2)$ es uniformemente continua en $[0, 1]$.

(c) [0,5 puntos] Sea $f$ una función acotada en $[0, 1]$ tal que $f^2 \in \mathcal{R}[0, 1]$; entonces $f \in \mathcal{R}[0, 1]$.

3.- (a) [1,5 puntos] Calcular el área de la región del plano limitada por las curvas $y = \operatorname{sen}^3 x$ e $y = \operatorname{sen}^2 x$ en el intervalo $[0, \pi]$.

(b) [0,5 puntos] Calcular el área de la región del plano limitada por las curvas anteriores en el intervalo $[0, 2\pi]$, sin hacer nuevos cálculos y utilizando argumentos de simetría.

4.- [1 punto] Hallar, usando el cálculo integral, el volumen de un tronco de cono de altura $h = 3\,\text{cm}$ y radios de las bases $r = 2\,\text{cm}$ y $R = 4\,\text{cm}$.

5.- [1 punto] La base de un sólido es un círculo de radio 1 m. Calcular el volumen de dicho sólido sabiendo que las secciones perpendiculares a un diámetro fijo de la base son cuadrados.

6.- Calcular:

(a) [1 punto] $\displaystyle\int \frac{1}{1 + \cos x}\, dx.$ (b) [1 punto] $\displaystyle\int \frac{x}{\cos^2 x}\, dx.$ (c) [1 punto] $\displaystyle\int \frac{x + 1}{x^2 - 3x + 3}\, dx.$

---

**TIEMPO** : 2 horas

---

**CÁLCULO INFINITESIMAL (GRADO EN MATEMÁTICAS) GRUPO C.**

**SEGUNDA PRUEBA, SEGUNDO CUATRIMESTRE 09/06/2015.**

1.- [1,5 puntos] Demostrar el *Criterio general de convergencia de Cauchy*:

Una sucesión de números reales es convergente si y sólo si es de Cauchy.

2.- Indicar si los siguientes enunciados son VERDADEROS o FALSOS, justificando la respuesta.

(a) [0,5 puntos] Una sucesión no acotada no puede tener límites de oscilación finitos.

(b) [0,5 puntos] Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es una serie absolutamente convergente, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ es convergente.

(c) [0,5 puntos] Para cada $z \in \mathbb{C}$, se tiene que $\sqrt[4]{z^2} = \sqrt{z}$.

3.- Dada la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n^2-1)p^n}{(n+p)2^{n+p}}$, se pide

(a) [1 punto] Estudiar el carácter de dicha serie según los valores de $p > 0$.

(b) [1 punto] Sumarla, si se puede, para $p = 1$.

(c) [0,5 puntos] ¿Es convergente para $p = -1$?

4.- Demostrar, usando algún criterio, que las siguientes series son convergentes y hallar su suma.

(a) [0,75 puntos] $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{(n+4)!}$. (b) [0,75 puntos] $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{3^n - 2^n}{\pi^n}$

5.- [1 punto] Calcular el límite superior e inferior, si existen, de la sucesión cuyo término general es $a_n = \cos \frac{n\pi}{2}$. Estudiar la convergencia de la sucesión.

6.- (a) [0,5 puntos] El producto de dos números complejos $z$ y $w$ es $z \cdot w = (2\sqrt{2})_{7\pi/12}$. Sabiendo que $z = \sqrt{3} - i$, hallar $w$.

(b) [0,5 puntos] Calcular $z$, sabiendo que una de sus raíces décimas es $1 - i$.

(c) [0,5 puntos] Calcular los vértices de un pentágono regular centrado en el origen sabiendo que uno de ellos es $i$.

(d) [0,5 puntos] Resolver la ecuación $\cos z = 2$.

**TIEMPO** : 3 horas

**CÁLCULO INFINITESIMAL (GRADO EN MATEMÁTICAS) GRUPO C.**

**SEGUNDO PARCIAL 09/06/2015.**

1.- [1,5 puntos] Demostrar el *Segundo Teorema Fundamental del Cálculo Integral*:

Si $f \in \mathcal{R}[a,b]$ y $G$ es una primitiva de $f$ en $[a,b]$, entonces $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a)$.

2.- Indicar si los siguientes enunciados son VERDADEROS o FALSOS, justificando la respuesta.

(a) [0,5 puntos] Si $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ es derivable y con derivada acotada, entonces es uniformemente continua en $[0,1]$.

(b) [0,5 puntos] Si $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es una serie convergente, entonces $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{|a_n|}$ también es convergente.

(c) [0,5 puntos] Para cada $z \in \mathbb{C}$, se tiene que $\sqrt[4]{z^2} = \sqrt{z}$.

3.- (a) [1 punto] Hallar una función $f(x)$ cuya derivada sea $f'(x) = \frac{1+2x}{1+4x^2}$ y tal que su gráfica pase por el punto $P(0,1)$.

(b) [0,5 puntos] Calcular $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+\cos x}\,dx$.

4.- Estudiar la convergencia condicional o absoluta de las siguientes series:

(a) [1 punto] $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n+1)}$.

(b) [1 punto] $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(n^2)}{n^2}$

5.- [1 punto] Hallar el área limitada por las curvas $y = x^3$, $y = x$ e $y = 2x$.

6.- [1 punto] Hallar la suma de la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + a^n}{3^n}$ para aquellos valores de $a > 0$ para los que sea posible.

7.- Resolver las siguientes ecuaciones:

(a) [0,75 puntos] $z^7 + z^2 = 0$, $z \in \mathbb{C}$.

(b) [0,75 puntos] $e^z + 3i = 0$, $z \in \mathbb{C}$.

---

**TIEMPO** : 3 horas

---