

Apellidos, Nombre: _____

CÁLCULO INFINITESIMAL (GRADO EN MATEMÁTICAS) GRUPO C.

EXAMEN PRIMERA CONVOCATORIA (TODA LA ASIGNATURA) 25/06/2015 (3 horas)

1.- [2 puntos] Demostrar uno de los dos siguientes teoremas:

Opción (a) Estimación del error del Teorema de Taylor.

Opción (b) Toda función continua en $[a, b]$ es integrable en $[a, b]$.

2. Decide si las siguientes afirmaciones son VERDADERAS o FALSAS. **Justifique su respuesta**, ya sea probándola o dando un contraejemplo. (1 punto)

a) Toda sucesión convergente de números reales es monótona.

b) Toda función continua alcanza sus extremos absolutos en \mathbb{R} .

c) Toda función derivable en \mathbb{R} con derivada acotada es uniformemente continua en \mathbb{R} .

d) Una región plana con área infinita no puede generar, por revolución un volumen finito.

2.- Sea $f(x)$ la función $f(x) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{x^2+1}{|x|}\right), & x \neq 0, \\ \frac{\pi}{2}, & x = 0. \end{cases}$

(a) [1 punto] Estudiar la continuidad y derivabilidad de f en \mathbb{R} . Calcula la derivada en los puntos en que f sea derivable.

(b) [1 punto] Encontrar sus asíntotas, regiones de crecimiento y decrecimiento y extremos relativos si los tiene.

(c) [1 punto] Hacer un esbozo de su gráfica y razonar si tiene algún punto de inflexión.

3.- (a) [1 punto] Decidir si la sucesión $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \sqrt[3]{a_n + 6}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ tiene límite y, en su caso, calcularlo.

(b) [1 punto] Dada la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(2-a)n+1]^2 a^n}{(n+1)(n+a)2^n}$, se pide: estudiar el carácter de la serie según los valores de $a > 0$ y sumarla, si se puede, para $a = 1$.

4.- (a) [1 punto] Calcular la derivada de la función $G(x) = \int_1^{e^x} \cos(\log t) dt$.

(b) [1 punto] Calcular el límite de la sucesión $x_n = \frac{n+1}{n^2+1} + \frac{n+2}{n^2+4} + \dots + \frac{n+n}{n^2+n^2}$.

Sugerencia: Expresar el término general de la sucesión como una suma de Riemann.