Apellidos, Nombre: ____

1ª PRUEBA DE CÁLCULO INFINITESIMAL, GRUPO C, GRADO EN MATEMÁTICAS

IMPORTANTE: Entregar las soluciones de las preguntas 1 y 2 (teoría) en el mismo folio del examen

1. (2 ptos) Enuncia y demuestra **uno** de los dos siguientes teoremas:

☐ Unicidad del límite de sucesiones. ☐ Teorema de Weierstrass para funciones continuas.

2. (1 pto) Decida si son VERDADERAS o FALSAS las siguientes afirmaciones **justificando su respuesta**, es decir, en caso de que sea verdadera, dé una demostración; en caso de que sea falsa, razone por qué o dé un contraejemplo que ilustre que lo es. (Sólo tienen valor las respuestas concisas)

☐ Sea $(a_n)_n$ una sucesión de números reales tal que en cualquier entorno de $a \in \mathbb{R}$ existen infinitos términos de $(a_n)_n$. Entonces, a_n es acotada.

☐ Dada dos sucesiones $(a_n)_n$ y $(b_n)_n$ cualesquiera, $(a_n \cdot b_n)_n$ tiene límite si y sólo si a_n y b_n son convergentes.

Demostración del teorema elegido:

3. (2 ptos) Calcula razonadamente los siguientes límites

1. $\displaystyle \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3n+2}{n-3}\right)^{\frac{2n^2+n-1}{5n+1}}$

2. $\displaystyle \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)\sin(e^{x-1}-1)}{\log(x^2-2x+2)}$

4. (2 ptos) Sea la sucesión definida recurrentemente $a_1 = 1$, $a_n = \dfrac{\sqrt{1+a_{n-1}}}{2}$, $n \geq 2$.

1. Calcula los valores $a_2 =$ .... y $a_3 =$ ....

2. Prueba que la sucesión es monótona.

3. Prueba la sucesión está acotada.

$\pi \approx 3{,}141593,\ e \approx 2{,}71829,\ \sqrt{2} \approx 1{,}4142,\ \sqrt{3} \approx 1{,}7321,\ \sqrt{5} \approx 2{,}2361,\ \sqrt{7} \approx 2{,}6458$

4. Usando lo anterior decide si a_n es convergente y calcula, si prodece, su límite.

5. ¿Qué ocurre si elegimos $a_1 = a$ siendo $a \in (0, 1/2)$? Justifica tu respuesta.

5. (3 ptos) Sea la función $f : [-4, \infty) \mapsto \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{1 - \cos(ax)}{x \sin(2x)}, & -4 \leq x < 0,\ x \neq -\pi \\ d, & x = -\pi \\ x^3 + 2bx^2 - c, & x \geq 0. \end{cases}$$

1. Calcula los límites
$\lim_{x \to 0-} f(x) =$

$\lim_{x \to 0+} f(x)$.

2. ¿Para qué valores de a, b y c la función $f(x)$ es continua en 0? Justifica la respuesta.

3. Sea $c = 3$. Prueba que la función $f(x)$ tiene al menos un cero para $x > 0$.

4. Para $c = 3$ ¿Se puede definir la función anterior en $x = -\pi$ para que sea continua en todo su dominio? En caso de que así sea ¿cuál ha de ser el valor d de la función en dicho punto?

Apellidos, Nombre: ____

2º Prueba de CÁLCULO INFINITESIMAL. GRUPO D. CURSO 2014/15 **Enero de 2014**

IMPORTANTE: Entregar las soluciones en el mismo folio del examen

1. (2 ptos) Demuestra **uno** de los dos siguientes teoremas:

☐ Teorema del valor medio de Lagrange ☐ Criterio de la $n+1$ derivada (extremos)

Entregar las respuestas en las mismas hojas del examen adjuntando las que sean necesarias.
2. (1 pto) Decida si son VERDADERAS o FALSAS las siguientes afirmaciones **justificando su respuesta**, es decir, en caso de que sea verdadera, dé una demostración; en caso de que sea falsa, razone por qué o dé un contraejemplo que ilustre que lo es. (Sólo tienen valor las respuestas concisas)

☐ Una función es diferenciable en un intervalo (a, b) si y sólo si continua en (a, b).

☐ Una función $f(x)$ es creciente en un intervalo (a, b) si su derivada $f'(x) \geq 0$ en (a, b).

Demostración del teorema elegido:

Ejercicio 2. (3.5 Puntos)

Sea $f(x)$ la función $f(x) = \begin{cases} \exp(-3/x^2), & x < 0 \\ \dfrac{2x^2}{x+3}, & x \geq 0 \end{cases}$.

(a) Estudia la continuidad y derivabilidad de f en dicho conjunto A.

f es continua en: .... y no lo es en ....

f es derivable en: .... y no lo es en ....

y su derivada es:

(b) Encuentra sus asíntotas:

....

regiones de crecimiento y decrecimiento:

....

extremos relativos si los tiene:

....

y haga un esbozo de su gráfica.

(c) ¿Alcanza f su máximo y mínimo absolutos (globales) en el intervalo abierto $(-1, 1)$? Justifica tu respuesta. ¿Y en $[-1, 2]$? En caso de que los alcance ¿en qué puntos?

(d) (*) ¿Tiene alguna solución la ecuación $f(x) = 1/2$? ¿Cuántas?

Ejercicio 2. (2.5 Puntos) Sea la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.

1. Encuentre el polinomio de Taylor de orden 4 en el punto $x = 0$ de dicha función, así como una expresión para el error cometido.

2. Calcula aproximadamente, utilizando el resultado del apartado anterior si es preciso, el valor numérico de $f(1)$, y da una cota del error cometido.

Ejercicio 3. (1 Puntos) Calcula razonadamente el siguiente límite:

$$\lim_{x \to +\infty} \sqrt{e^x}(\sqrt{e^x + 1} - \sqrt{e^x - 1}) =$$

Apellidos, Nombre: ____

1º PARCIAL DE CÁLCULO INFINITESIMAL, GRUPO C, GRADO EN MATEMÁTICAS

IMPORTANTE: Entregar las soluciones en el mismo folio del examen

1. (2 ptos) Demuestra **uno** de los dos siguientes teoremas:

☐ Teorema de Bolzano

☐ Estimación del error del Teorema de Taylor

2. (1.5 pto) Decida si son VERDADERAS o FALSAS las siguientes afirmaciones **justificando su respuesta**, es decir, en caso de que sea verdadera, dé una demostración; en caso de que sea falsa, razone por qué o dé un contraejemplo que ilustre que lo es. (Sólo tienen valor las respuestas concisas)

☐ Una función $f(x)$ es creciente en un intervalo (a, b) si su derivada $f'(x) \geq 0$ en (a, b).

☐ Una función $f(x)$ es continua en $x = a$ si existe el $\lim_{x\to a} f(x)$

☐ Una sucesión convergente de números negativos siempre tiene límite negativo.

<u>Demostración del teorema elegido:</u>

Ejercicio 1. (2 Puntos) Se considera la sucesión definida recurrentemente $x_1 = 0$, $x_{n+1} = \dfrac{2x_n + 3}{x_n + 2}$, $n \geq 0$. 1. Demuestra que $(x_n)_n$ está acotada.

2. Demuestra que la sucesión $(x_n)_n$ es creciente.

3. Probar que $(x_n)_n$ tiene límite. Calcularlo razonadamente.

Ejercicio 2. (1 Punto)
Calcula razonadamente el límite

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1-\cos(\frac{3}{n})}{\tan(e^{\sin(\frac{2}{n})}-1)} \sin(n^2) =$$

Ejercicio 2. (3.5 Puntos)

Sea $f(x)$ la función $f(x) = \begin{cases} \exp(-3/x^2), & x < 0 \\ \dfrac{2x^2}{x+3}, & x \geq 0 \end{cases}$.

(a) Estudia la continuidad y derivabilidad de f en dicho conjunto A.

f es continua en: .... y no lo es en ....

f es derivable en: .... y no lo es en ....

y su derivada es:

(b) Encuentra sus asíntotas:

....

regiones de crecimiento y decrecimiento:

....

extremos relativos si los tiene:

....

y haga un esbozo de su gráfica.

(c) ¿Alcanza f su máximo y mínimo absolutos (globales) en el intervalo abierto $(-1, 1)$? Justifica tu respuesta. ¿Y en $[-1, 2]$? En caso de que los alcance ¿en qué puntos?

Apellidos, Nombre: ____

CÁLCULO INFINITESIMAL (GRADO EN MATEMÁTICAS) GRUPO C.
RECUPERACIÓN 1º EXAMEN PARCIAL 25/06/2015 (3 horas)

Pregunta 1: Demostrar uno de los dos siguientes teoremas (2 puntos):

1 Estimación del error del Teorema de Taylor.

2 Equivalencia de las definiciones de límite de funciones.

Pregunta 2: Decide si las siguientes afirmaciones son VERDADERAS o FALSAS. **Justifique su respuesta**, ya sea probándola o dando un contraejemplo. (1.5 puntos)

1. Toda sucesión convergente de números reales es monótona.

2. Una función continua en $[a, b]$ es derivable si es acotada en $[a, b]$.

3. Toda función continua alcanza sus extremos absolutos en $\mathbb{R}$.

Problema 1: (2 puntos) Decidir si la sucesión $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \sqrt[3]{a_n + 6}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ tiene límite y, en su caso, calcularlo.

Problema 2: (1.5 puntos) Encuentra los polinomios de Taylor de orden 4 en torno a $x = 0$ de las funciones $f(x) = 1 - \cosh(2x^2)$ y $\sin(3x^3)$, respectivamente.

Si procede, usa lo anterior para calcular el límite: $\lim_{x\to 0} \dfrac{1 - \cosh(2x^2)}{2x\sin(3x^3)}$.

Problema 3: (3 puntos). Sea $f(x)$ la función $f(x) = \begin{cases} \arctan\left(\dfrac{x^2+1}{|x|}\right), & x \neq 0, \\ \dfrac{\pi}{2}, & x = 0. \end{cases}$

1. Estudiar la continuidad y derivabilidad de f en $\mathbb{R}$. Calcula la derivada en los puntos en que f sea derivable.

2. Encontrar sus asíntotas, regiones de crecimiento y decrecimiento y extremos relativos si los tiene.

3. Hacer un esbozo de su gráfica y razonar si tiene algún punto de inflexión.

4. ¿Alcanza f su máximo y mínimo absolutos en $\mathbb{R}$? Justifica tu respuesta.