Apellidos, Nombre: ____

1ª PRUEBA DE CÁLCULO INFINITESIMAL, GRUPO D, GRADO EN MATEMÁTICAS

IMPORTANTE: Entregar las soluciones de las preguntas 1 y 2 (teoría) en el mismo folio del examen

1. (2 ptos) Demuestra **uno** de los dos siguientes teoremas:

☐ Teorema de la densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$. ☐ Teorema de las tres sucesiones.

2. (1 pto) Decida si son VERDADERAS o FALSAS las siguientes afirmaciones **justificando su respuesta**, es decir, en caso de que sea verdadera, dé una demostración; en caso de que sea falsa, razone por qué o dé un contraejemplo que ilustre que lo es. (Sólo tienen valor las respuestas concisas)

☐ Sea $(a_n)_n$ una sucesión de números reales tal que en cualquier entorno de $a \in \mathbb{R}$ existen infinitos términos de $(a_n)_n$. Entonces, a_n es convergente.

☐ Dada dos sucesiones $(a_n)_n$ y $(b_n)_n$ cualesquiera, $(a_n + b_n)_n$ tiene límite si y sólo si a_n y b_n son convergentes.

Demostración del teorema elegido:

3. (2 ptos) Calcula razonadamente los siguientes límites

1. $\lim_{n\to\infty} \left(\dfrac{2n+5}{2n+1}\right)^{\frac{n^2+1}{3n-1}}$

2. $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[4]{n^3+2n+1}\,\operatorname{sen}(5\,n!)}{n+3}$

4. (2.5 ptos) Sea la sucesión definida recurrentemente mediante la expresión $a_1 = 2$, $a_n = \dfrac{a_{n-1}}{1+a_{n-1}}$, $n \geq 2$.

1. Calcula los valores a_2 y a_3.

2. Prueba la sucesión está acotada inferiormente.

3. Prueba que la sucesión es monótona decreciente.

4. Usando lo anterior prueba que es convergente y calcula su límite.

5. ¿Qué ocurre si elegimos $a_1 = a$ siendo $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$? Justifica tu respuesta.

5. (2.5 ptos) Sea la función

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + bx + c, & x < 0, \\ a\operatorname{sen}(2x), & x \geq 0. \end{cases}$$

1. Calcula los límites $\lim_{x\to 0-} f(x)$ y $\lim_{x\to 0+} f(x)$.

2. ¿Para qué valores de a, b y c la función $f(x)$ es continua en 0?

3. ¿Para qué valores de a, b y c existe el límite $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x}$? Calcúlalo cuando exista.

Apellidos, Nombre: ____

2ª PRUEBA DE CÁLCULO INFINITESIMAL, GRUPO D, GRADO EN MATEMÁTICAS

IMPORTANTE: Entregar las soluciones en el mismo folio del examen

1. (2 ptos) Demuestra **uno** de los dos siguientes teoremas:

☐ Teorema de Weierstrass para las funciones continuas ☐ Teorema local de Taylor

2. (1 pto) Decida si son VERDADERAS o FALSAS las siguientes afirmaciones **justificando su respuesta**, es decir, en caso de que sea verdadera, dé una demostración; en caso de que sea falsa, razone por qué o dé un contraejemplo que ilustre que lo es. (Sólo tienen valor las respuestas concisas)

☐ Toda función continua en un cerrado y acotado $[a, b]$ es derivable en su interior (a, b).

☐ Para que una función $f : [-b, b] \mapsto \mathbb{R}$ tenga un máximo global en $[-b, b]$ en necesario y suficiente que sea continua en $[-b, b]$.

Demostración del teorema elegido:

Ejercicio 1. (3.5 Puntos)

Sea $f(x)$ la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{5x+4}{x+2}, & x < 0 \\ \\ (x+2)(x-1)^2, & x \geq 0 \end{cases}$.

(a) Escribe el mayor subconjunto $A \subset \mathbb{R}$ donde esté definida f. $A =$ ....

(b) Estudia la continuidad y derivabilidad de f en dicho conjunto A.

f es continua en: .... y no lo es en ....

f es derivable en: .... y no lo es en ....
y su derivada es:

(b) Encuentra sus asíntotas:

....
regiones de crecimiento y decrecimiento:

....
extremos relativos si los tiene:

....
puntos de inflexión si los tiene:

....
y haga un esbozo de su gráfica.

(c) ¿Alcanza f su máximo y mínimo absolutos (globales) en el intervalo abierto $(-1, 1)$? Justifica tu respuesta. ¿Y en $[-1, 2]$?

Ejercicio 2. (2.5 Puntos) Sea la función $f : (-\pi/2, \pi/2) \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2 + \tan x,$

1. Encuentre el polinomio de Taylor de orden 3 en el punto $x = 0$ de dicha función, así como una expresión para el error cometido. En caso de necesidad usa que

$$\tan^{(4)}(x) = \frac{d^4 \tan x}{dx^4} = \frac{8 \sin^3 x + 16 \sin x}{\cos^5 x}$$

2. Calcula, utilizando el resultado del apartado anterior, el valor numérico de $f(\frac{1}{2})$, y da una cota del error cometido.

Ejercicio 3. (1 Punto) Calcula razonadamente el siguiente límite:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - e^{-\frac{1}{2}x^2}}{x^4} =$$

Apellidos, Nombre: ____________________

1º PARCIAL DE CÁLCULO INFINITESIMAL, GRUPO D, GRADO EN MATEMÁTICAS

IMPORTANTE: Entregar las soluciones en el mismo folio del examen

1. (2 ptos) Demuestra **uno** de los dos siguientes teoremas:

☐ Teorema de Bolzano-Weierstrass para las sucesiones ☐ Teorema local de Taylor

2. (1.5 pto) Decida si son VERDADERAS o FALSAS las siguientes afirmaciones **justificando su respuesta**, es decir, en caso de que sea verdadera, dé una demostración; en caso de que sea falsa, razone por qué o dé un contraejemplo que ilustre que lo es. (Sólo tienen valor las respuestas concisas)

☐ Para que una función $f : [-b, b] \mapsto \mathbb{R}$ tenga un máximo global en $[-b, b]$ en necesario y suficiente que sea continua en $[-b, b]$.

☐ Sea $(a_n)_n$ una sucesión convergente tal que $a_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces, $\lim_{n\to\infty} a_n > 0$.

☐ Toda función continua en un cerrado y acotado $[a, b]$ es derivable en su interior (a, b).

Demostración del teorema elegido:

Ejercicio 1. (2 Puntos) Se considera la sucesión definida recurrentemente $x_0 = 0$, $x_{n+1} = \dfrac{1+x_n}{2+x_n}$, $n \geq 0$. 1. Demuestra que $0 < x_n < 1$, $n \geq 1$.

2. Demuestra que la sucesión $(x_n)_n$ es creciente.

3. Probar que $(x_n)_n$ tiene límite. Calcularlo razonadamente.

Ejercicio 2. (1.5 Punto)
1. Encuentra el polinomio de Taylor de orden 4 en torno a $x = 0$ de la función $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-\frac{1}{2}x^2}$.

2. Calcula razonadamente el siguiente límite:

$$\lim_{n\to\infty} n^4 \left(\cos\frac{1}{n} - e^{-\frac{1}{2n^2}} \right) =$$

Ejercicio 3. (3 Puntos)

Sea $f(x)$ la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{5x+4}{x+2}, & x < 0 \\ (x+2)(x-1)^2, & x \geq 0 \end{cases}$.

(a) Escribe el mayor subconjunto $A \subset \mathbb{R}$ donde esté definida f. $A =$ ....

(b) Estudia la continuidad y derivabilidad de f en dicho conjunto A.

f es continua en: .... y no lo es en ....

f es derivable en: .... y no lo es en ....
y su derivada es:

(b) Encuentra sus asíntotas:

....
regiones de crecimiento y decrecimiento:

....
extremos relativos si los tiene:

....
puntos de inflexión si los tiene:

....
y haga un esbozo de su gráfica.

(c) ¿Alcanza f su máximo y mínimo absolutos (globales) en el intervalo abierto $(-1, 1)$? Justifica tu respuesta. ¿Y en $[-1, 2]$?