Apellidos, Nombre: ____

RECUPERACIÓN PRIMER PARCIAL DE CÁLCULO INFINITESIMAL, GRUPO B, GRADO EN MATEMÁTICAS 29/6/2016 (3 horas)

IMPORTANTE: Entregar, a ser posible, las soluciones en el mismo folio del examen

1. (1.5 ptos) **Elige** y demuestra **uno** de los dos siguientes teoremas:

☐ Teorema de Weierstrass para funciones continuas en $[a, b]$.

☐ Teorema local de Taylor.

2. (0.75 ptos) Decida si son VERDADERAS o FALSAS las siguientes afirmaciones **justificando su respuesta**, es decir, en caso de que sea verdadera, dé una demostración; en caso de que sea falsa, razone por qué o dé un contraejemplo que ilustre que lo es. (Sólo tienen valor las respuestas concisas)

☐ Sean f y g dos funciones derivables en $A \subset \mathbb{R}$. La función $h(x) = f(x)g(x)$ es derivable si y sólo si f y g son derivables.

☐ Dadas dos sucesiones acotadas $(a_n)_n$ y $(b_n)_n$, con $b_n \neq 0$, la sucesión $(c_n)_n$ definida por $c_n = \frac{a_n}{b_n}$ es acotada.

☐ $\forall n \in \mathbb{N}$, $n^3 - n$ es divisible por 3.

Demostración del teorema elegido:

Ejercicio 1. (2 ptos) Sea la sucesión definida por $a_1 = 2$, $a_{n+1} = \sqrt{\dfrac{1+a_n^2}{2}}$, $n \geq 2$.

1. Calcula los valores $a_2 =$ .... y $a_3 =$ .... y prueba que $(a_n)_n$ es acotada.

2. Prueba que la sucesión es monótona.

3. Usando lo anterior decide si a_n es convergente y calcula, si prodece, su límite.

4. (*) ¿Qué ocurre si elegimos $a_1 = a$ siendo $a < -2$? Justifica tu respuesta.

Ejercicio 2. (1 Punto) Calcular los siguientes límites de funciones:

a) $\lim\limits_{x\to 0}(2-\cos x)^{\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x}} =$

b) $\lim\limits_{x\to 1^-} \log x \cdot \log(1-x) =$

Ejercicio 2. (3 Puntos)

Sea $f(x)$ la función $f(x) = \begin{cases} x^3 + 3\,x^2 + 2\,x + 1, & x < 0, \\ \dfrac{4}{\pi}\arctan\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right), & x \geq 0, \end{cases}$

(a) Estudia la continuidad y derivabilidad de f en $\mathbb{R}$.

f es continua en: .... y no lo es en ....

f es derivable en: .... y no lo es en ....

y su derivada es:

(b) Encuentra sus asíntotas: ....

regiones de crecimiento .... y decrecimiento ....

extremos relativos si los tiene: ....

y haga un esbozo de su gráfica y razona si tiene algún punto de inflexión.

(c) ¿Alcanza f su máximo y mínimo absolutos en $\mathbb{R}$? SI ☐ NO ☐. En caso de respuesta afirmativa ¿dónde? MAX: .... MIN: ....

¿Y en [-2,2]? SI ☐ NO ☐. En caso de respuesta afirmativa ¿dónde?

MAX: .... MIN: ....

Justifica tu respuesta.

(d) ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación $f(x) = -2$? Justifica tu respuesta.

(*) ¿Para que valores de $\alpha < 0$ la ecuación $f(x) = \alpha$ tiene 2 soluciones? ....

---

1. Sea $f \in \mathcal{R}([a,b])$. Demostrar que la función $F : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ es continua en $[a,b]$. ¿Qué puede decirse de F si f es continua en $[a,b]$? Justificar la respuesta.

2. a) Calcular el área del recinto plano $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 25,\ y \geq 3\}$.

   b) Calcular el volumen del cuerpo de revolución obtenido al girar el recinto anterior alrededor del eje OY.

   c) Calcular la superficie del cuerpo anterior, incluida la base.

3. Calcular:

   a) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x}\,dx.$

   b) $\displaystyle\int x \operatorname{sen}^2 x\,dx.$

4. Dada la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n+1}{n(n+1)}$, se pide:

   a) Estudiar la convergencia absoluta y condicional de la serie.

   b) En caso de convergencia, calcular la suma.

5. Estudiar según los valores de $a > 0$ el carácter de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{a(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}.$$

6. a) Calcular el límite inferior y el límite superior de la sucesión $\{a_n\} = \{\frac{n}{3} - \left[\frac{n}{3}\right]\}$ ¿Tiene límite la sucesión? ¿Por qué?

   b) Idem para la sucesión $\{a_n^n\}$.

   Puntuación: Las preguntas 1, 2, 3 y 4 serán puntuadas sobre 2 puntos cada una. Las preguntas 5 y 6, sobre 1 punto cada una.

Apellidos, Nombre: ____________________

EXAMEN FINAL DE CÁLCULO INFINITESIMAL, GRUPO B, GRADO EN MATEMÁTICAS 29/6/2016 (3 horas)

IMPORTANTE: Entregar, a ser posible, las soluciones en el mismo folio del examen

1. (1.5 ptos) **Elige** y demuestra **uno** de los dos siguientes teoremas:

☐ Teorema de Weierstrass para funciones continuas en $[a, b]$.

☐ Probar una condición necesaria de convergencia para una serie, y el criterio de convergencia de Cauchy para series.

2. (0.75 ptos) Decida si son VERDADERAS o FALSAS las siguientes afirmaciones **justificando su respuesta**, es decir, en caso de que sea verdadera, dé una demostración; en caso de que sea falsa, razone por qué o dé un contraejemplo que ilustre que lo es. (Sólo tienen valor las respuestas concisas)

☐ Sean f y g dos funciones derivables en $A \subset \mathbb{R}$. La función $h(x) = f(x)g(x)$ es derivable si y sólo si f y g son derivables.

☐ No existe ninguna función $f(x)$ tal que $\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt = x + 1$.

☐ Si la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente, la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ también es convergente

Demostración del teorema elegido:

Apellidos, Nombre: ______________________________

Ejercicio 1. (1 pto)

Sean $a_n = \sqrt{4n^4 + n} - n!$ y $b_n = \dfrac{2n - 4(-1)^n}{n^2 + 4(-1)^n}$. Calcular:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

b) $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\operatorname{sen}(a_n)}{a_n}$.

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\operatorname{sen}(b_n)}{b_n}$.

Ejercicio 2. (3 Puntos)

Sea $f(x)$ la función $f(x) = \begin{cases} x^3 + 3\,x^2 + 2\,x + 1, & x < 0, \\ \dfrac{4}{\pi}\arctan\left(\dfrac{1-x^2}{1+x^2}\right), & x \geq 0, \end{cases}$

(a) Estudia la continuidad y derivabilidad de f en $\mathbb{R}$.

f es continua en: .... y no lo es en ....

f es derivable en: .... y no lo es en ....

y su derivada es:

(b) Encuentra sus asíntotas: ....

regiones de crecimiento .... y decrecimiento ....

extremos relativos si los tiene: ....

y haga un esbozo de su gráfica y razona si tiene algún punto de inflexión.

(c) ¿Alcanza f su máximo y mínimo absolutos en $\mathbb{R}$? SI ☐ NO ☐. En caso de respuesta afirmativa ¿dónde? MAX: .... MIN: ....

¿Y en [-2,2]? SI ☐ NO ☐. En caso de respuesta afirmativa ¿dónde?

MAX: .... MIN: ....

Justifica tu respuesta.

(*) ¿Para que valores de $\alpha < 0$ la ecuación $f(x) = \alpha$ tiene 2 soluciones? ....

Apellidos, Nombre: ____

Ejercicio 3. (2 ptos) Dada la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2n+1}{n(n+1)}$, se pide:

a) Estudiar la convergencia absoluta y condicional de la serie.

b) En caso de convergencia, calcular la suma.

Apellidos, Nombre: ____

Ejercicio 4. (1.75 ptos)

a) Calcular el área del recinto plano $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 25,\ y \geq 3\}$.

b) Calcular el volumen del cuerpo de revolución obtenido al girar el recinto anterior alrededor del eje OY.

c) Calcular la superficie del cuerpo anterior, incluida la base.

Apellidos, Nombre: ____

EXAMEN FINAL DE CÁLCULO INFINITESIMAL, GRUPO B, GRADO EN MATEMÁTICAS 4/9/2016 (3 horas)

IMPORTANTE: Entregar, a ser posible, las soluciones en el mismo folio del examen

1. (1.5 ptos) Demuestra **uno** de los dos siguientes teoremas:

☐ Criterio de la $(n+1)$-esima derivada para cálculo de extremos.

☐ Demostrar el teorema de Leibniz para series alternadas.

2. (0.75 ptos) Decida si son VERDADERAS o FALSAS las siguientes afirmaciones **justificando su respuesta**, es decir, en caso de que sea verdadera, dé una demostración; en caso de que sea falsa, razone por qué o dé un contraejemplo que ilustre que lo es. (Sólo tienen valor las respuestas concisas)

☐ Sean f y g dos funciones continuas en $A \subset \mathbb{R}$. La función $h(x) = f(x)g(x)$ es continua si y sólo si son f y g continuas.

☐ Toda función integrable en un intervalo cerrado y acotado [a,b] tiene que ser necesariamente continua o monótona

☐ Si $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ son dos sucesiones de números reales condicionalmente convergentes, entonces la sucesión $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ no puede ser incondicionalmente convergente.

Demostración del teorema elegido:

Ejercicio 1. (1.5 pto)
Sea la sucesión definida recurrentemente $x_1 = 0$, $x_{n+1} = \sqrt{1 + 4x_n}$, $n \geq 1$. Calcula $x_2 =$ .... y $x_3 =$ ....

1. Demuestra que $(x_n)_n$ está acotada.

2. Demuestra que la sucesión $(x_n)_n$ es monótona.

3. Probar que $(x_n)_n$ tiene límite. Calcularlo razonadamente.

(*) ¿Qué ocurre si $x_1 < 0$? ¿Y si es $x_1 > 0$?

Apellidos, Nombre: ____

Ejercicio 2. (2.5 Puntos) Sea $f(x)$ la función

$$f(x) = \begin{cases} \left(1 - \dfrac{1}{x}\right) \log|1 - x^2|, & x \neq 0, 1, -1 \\ \\ 0, & x = 0, 1, -1 \end{cases}$$

a) Estudiar la continuidad y derivabilidad f en $\mathbb{R}$.
b) ¿Existe $f'(0)$? Calcular $f'(\sqrt{2})$ y $f'\left(-\frac{1}{2}\right)$.
c) Probar que existe $c \in (0, 1)$ tal que $f'(c) = 0$.
d) Encuentra las asíntotas de $f(x)$
e) Decide si f tiene máximos y mínimos globales. Justifica tu respuesta.
(*) Razona si f tiene máximos y mínimos locales. Justifica tu respuesta.

Apellidos, Nombre: ____

Ejercicio 3. (2 ptos) Dada la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(2n-1)\left(\frac{a+1}{6}\right)^n$, se pide:

1. Estudiar la convergencia según los valores de $a > -1$.
2. Sumarla, si es posible, para $a = 1$.
3. ¿ Es convergente para $a = -3$?

Apellidos, Nombre: ____

Ejercicio 4. (1.75 ptos)

1. Calcular el área de la región del plano situada en el primer cuadrante y limitada por la elipse $\dfrac{x^2}{9} + y^2 = 1$, la recta $x = \sqrt{3}\, y$ y el eje de ordenadas.

2. Calcular el volumen del cuerpo de revolución generado al girar la superficie anterior alrededor del eje de abscisas.

3. Idem alrededor del eje de ordenadas.