

Apellidos, Nombre: _____

1ª PRUEBA DE CI, GRUPO B, GRADO EN MATEMÁTICAS. 26/11/2015

IMPORTANTE: Entregar las soluciones en el mismo folio del examen

1. (2 ptos) Enuncia y demuestra **uno** de los dos siguientes teoremas:

Criterio de Weierstrass para las sucesiones. Teorema de Bolzano para funciones.

2. (1 pto) Decida si son VERDADERAS (V) o FALSAS (F) las siguientes afirmaciones **justificando su respuesta**, o sea, si es verdadera, dé una demostración; si es falsa, razone por qué o dé un contraejemplo que lo ilustre. (Sólo tienen valor las respuestas concisas)

Sea $(a_n)_n$ una sucesión convergente y sea a su límite. Entonces $a > 0$ si y sólo si $a_n > 0$ para todo n mayor que cierto $N \in \mathbb{N}$,

Una función es continua en $x = a$ si y sólo si existe $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$.

Demostración del teorema elegido:

3. (2 ptos) Calcula razonadamente los siguientes límites

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(3n^2 + 4n + 5)}{\log(5n + 3)}$

2. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1 - \sqrt{1 - 2(x - 2)^2}}{\sin[3(x - 2)^2]}$

4. (2 ptos) Sea la sucesión definida recurrentemente $a_1 = 2$, $a_{n+1} = \frac{a_n^2}{2a_n - 1}$, $n \geq 2$.

1. Calcula los valores $a_2 = \dots\dots\dots$ y $a_3 = \dots\dots\dots$

2. Prueba que $a_n > 1$ para todo n .

3. Prueba que la sucesión es monótona decreciente.

4. Usando lo anterior decide si a_n es convergente y calcula, si procede, su límite.

5. (*) ¿Qué ocurre si elegimos $a_1 = a$ siendo $a < 0$? Justifica tu respuesta.

5. (3 pts) Sea la función $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{xe^{ax} - \sin x}{\sqrt{1+x^2}}, & x \leq 0 \\ \frac{x^2 + 2x + b}{x+2}, & x > 0. \end{cases} \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

1. Calcula los límites

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x).$$

2. ¿Para qué valores de a y b la función $f(x)$ es continua en 0? Justifica la respuesta.

3. Para los valores calculados en el apartado anterior ¿existe el límite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}$?

4. (*) Calcula, si existe, el límite $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)}{x^2}$. Ayuda: usa los infinitésimos

Apellidos, Nombre: _____

2ª PRUEBA DE CI, GRUPO B, GRADO EN MATEMÁTICAS. 2/2/2016

IMPORTANTE: Entregar las soluciones en el mismo folio del examen

1. (2 ptos) Enuncia y demuestra **uno** de los dos siguientes teoremas:

Teorema local de Taylor

Teorema del valor medio de Cauchy

2. (1 pto) Decida si son VERDADERAS (V) o FALSAS (F) las siguientes afirmaciones **justificando su respuesta**, o sea, si es verdadera, dé una demostración; si es falsa, razone por qué o dé un contraejemplo que lo ilustre. (Sólo tienen valor las respuestas concisas)

Una función $f(x)$ es creciente en (a, b) si y sólo si su derivada $f'(x) \geq 0$ en (a, b) .

Una función discontinua en $[a, b]$ no alcanza su máximo ni mínimo global en $[a, b]$.

Demostración del teorema elegido:

Ejercicio 2. (3.5 Puntos) Sea $f(x)$ la función $f(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{x}\right), & x > 0, \\ \frac{x}{x^2 + 9}, & x \leq 0. \end{cases}$

(a) Estudia la continuidad y derivabilidad de f en \mathbb{R} .

f es continua en: y no lo es en
 f es derivable en: y no lo es en
y su derivada es:

(b) Encuentra sus asíntotas:

regiones de crecimiento y decrecimiento

extremos relativos si los tiene:

y haga un esbozo de su gráfica y razona si tiene algún punto de inflexión.

(c) ¿Alcanza f su máximo y mínimo absolutos en \mathbb{R} ? SI NO . En caso de respuesta afirmativa ¿dónde?

MAX: MIN:

¿Y en $[-1,5]$? SI NO . En caso de respuesta afirmativa ¿dónde?

MAX: MIN:

Justifica tu respuesta.

(d) Prueba que ecuación $f(x) = 2$ tiene una única solución.

(*) ¿Para que valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ la ecuación $f(x) - \alpha$ tiene 2 soluciones?

Ejercicio 2. (2 Puntos) Sea la función $f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \arctan\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.

1. Encuentre el polinomio de Taylor de orden 2 en el punto $x = 0$ de dicha función y escriba una expresión para el error cometido.

2. Calcule aproximadamente, utilizando el resultado del apartado anterior si es preciso, el valor numérico de $f(1/2)$, y da una cota del error cometido.

Ejercicio 3. (1 Punto) Calcule razonadamente el siguiente límite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{\sin^2 x} - \frac{1}{1 - \cos x} \right)$$

Apellidos, Nombre: _____

**1º PARCIAL DE CÁLCULO INFINITESIMAL, GRUPO B, GRADO EN
MATEMÁTICAS 2/2/2016**

IMPORTANTE: Entregar las soluciones en el mismo folio del examen

1. (2 ptos) Demuestra **uno** de los dos siguientes teoremas:

Teorema de la equivalencia de las definiciones de límite

Teorema local de Taylor

2. (1.5 pto) Decida si son VERDADERAS o FALSAS las siguientes afirmaciones **justificando su respuesta**, es decir, en caso de que sea verdadera, dé una demostración; en caso de que sea falsa, razone por qué o dé un contraejemplo que ilustre que lo es. (Sólo tienen valor las respuestas concisas)

Sean f y g dos funciones continuas en $A \subset \mathbb{R}$. La función $h(x) = f(x) + g(x)$ es continua si y sólo si lo son f y g continua.

Una función discontinua en $[a, b]$ no alcanza su máximo ni mínimo global en $[a, b]$.

Una función $f(x)$ es creciente en (a, b) si y sólo si su derivada $f'(x) \geq 0$ en (a, b) .

Demostración del teorema elegido:

Ejercicio 1. (2 Puntos) Sea la sucesión definida recurrentemente $x_1 = 4$, $x_{n+1} = \frac{x_n^2 + 4}{2x_n}$, $n \geq 1$. Calcula $x_2 = \dots\dots\dots$ y $x_3 = \dots\dots\dots$

1. Demuestra que $(x_n)_n$ está acotada.
2. Demuestra que la sucesión $(x_n)_n$ es decreciente.
3. Probar que $(x_n)_n$ tiene límite. Calcularlo razonadamente.

(*) ¿Qué ocurre si $x_1 < 0$?

Ejercicio 2. (1 Punto) Calcula razonadamente los siguientes límites:

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2}{\sin^2 x} - \frac{1}{1 - \cos x} \right), \quad b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cosh(2x)}{x - \sin(x)}.$$

Ejercicio 2. (3.5 Puntos) Sea $f(x)$ la función $f(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{x}\right), & x > 0, \\ \frac{x}{x^2 + 9}, & x \leq 0. \end{cases}$

(a) Estudia la continuidad y derivabilidad de f en \mathbb{R} .

f es continua en: y no lo es en
 f es derivable en: y no lo es en
 y su derivada es:

(b) Encuentra sus asíntotas:

regiones de crecimiento y decrecimiento

extremos relativos si los tiene:

y haga un esbozo de su gráfica y razona si tiene algún punto de inflexión.

(c) ¿Alcanza f su máximo y mínimo absolutos en \mathbb{R} ? SI NO . En caso de respuesta afirmativa ¿dónde?

MAX: MIN:

¿Y en $[-1,5]$? SI NO . En caso de respuesta afirmativa ¿dónde?

MAX: MIN:

Justifica tu respuesta.

(d) Prueba que ecuación $f(x) = 2$ tiene una única solución.

(*) ¿Para que valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ la ecuación $f(x) - \alpha$ tiene 2 soluciones?