Examen de Cálculo infinitesimal. 19-12-2012. Grupo B.

TEORÍA

1. Elegir y probar uno de los teoremas siguientes:

a) Demostrar la condición necesaria de existencia de límite.

b) Probar el Criterio de Weierstrass para sucesiones monótonas.

PROBLEMAS

2. a) Estudia el dominio de la función $f(x) = \operatorname{arcsen}\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$.

b) Estudia el dominio y crecimiento, sin usar derivadas, de $f(x) = \arctan(|x+1| - |x-1|)$.

Solución.

a) La función $f(x) = \operatorname{arcsen}\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$ es composición de las funciones $f_2 \circ f_1$ donde $f_2(x) = \operatorname{arcsen}(x)$, cuyo dominio es $[-1, 1]$, y $f_1(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ cuyo dominio es $\mathbb{R}$ por ser $x^2 + 1 > 0$ y la raíz estar definida para números positivos. Por ello,

$$\operatorname{Dom}(f) = \{x \in \mathbb{R} : -1 \le \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \le 1\}.$$

Pero $x^2 \le x^2 + 1$. Usando que $t^2 \le a^2$ si y sólo si $-a \le t \le a$, se obtiene $-\sqrt{x^2+1} \le x \le \sqrt{x^2+1}$ y $-1 \le \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} \le 1$ para cualquier $x \in \mathbb{R}$. Con esto, $\operatorname{Dom}(f) = \mathbb{R}$.

b) En primer lugar, $f = \arctan \circ g$ donde $g(x) = |x+1| - |x-1|$. Tanto el dominio de la función arcotangente como el de g es $\mathbb{R}$, ya es que g diferencia de valores absolutos de polinomios. Luego $\operatorname{Dom}(f) = \mathbb{R}$. Para estudiar el crecimiento, veamos qué valen los valores absolutos implicados en la definición.

$$|x+1| = \begin{cases} x+1, & \text{si } x \ge -1; \\ -x-1, & \text{si } x \le -1. \end{cases}$$

$$|x-1| = \begin{cases} x-1, & \text{si } x \ge 1; \\ -x+1, & \text{si } x \le 1. \end{cases}$$

Son dos funciones que cambian de definición a la izquierda o derecha de 1 y -1, luego su diferencia dependerá de esto.

$$g(x) = |x+1| - |x-1| = \begin{cases} x+1-(x-1), & \text{si } x \ge 1; \\ x+1+(x-1), & \text{si } -1 \le x \le 1; \\ -(x+1)+(x-1), & \text{si } x \le -1. \end{cases} = \begin{cases} 2, & \text{si } x \ge 1; \\ 2x, & \text{si } -1 \le x \le 1; \\ -2, & \text{si } x \le -1. \end{cases}$$

Esto nos dice que g es estrictamente creciente en $[-1, 1]$, y constante de manera continua, fuera de este intervalo. Entonces g es creciente. Al componer con arcotangente, que es creciente, tenemos que f es creciente (no estrictamente).

3. Calcular el límite de la sucesión definida por

$$\frac{1}{\log n}\sum_{k=1}^{n}\left(1-\cos\left(\frac{\pi}{\sqrt{k}}\right)\right).$$

Solución.

Sea $x_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(1-\cos\left(\frac{\pi}{\sqrt{k}}\right)\right)$, $y_n=\dfrac{1}{\log n}$. Es claro que $y_n\to+\infty$ de manera estrictamente creciente. Aplicamos el criterio de Stolz y

$$\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}=\frac{\sum_{k=1}^{n+1}\left(1-\cos\left(\frac{\pi}{\sqrt{k}}\right)\right)-\sum_{k=1}^{n}\left(1-\cos\left(\frac{\pi}{\sqrt{k}}\right)\right)}{\log(n+1)-\log n}=\frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{\sqrt{n+1}}\right)}{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}$$

Ahora usamos que $1-\cos x_n$ es equivalente a $\frac{x_n^2}{2}$ y $\log(1+x_n)$ es equivalente a x_n cuando $x_n\to 0$. Obtenemos:

$$\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}=\frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{\sqrt{n+1}}\right)}{\frac{\frac{\pi^2}{n+1}}{2}}\,\frac{\pi^2/2}{n+1}\,\frac{\frac{1}{n}}{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)}n\to\pi^2/2.$$

Luego

$$\frac{x_n}{y_n}\to\pi^2/2.$$

4. Calcular el límite de la sucesión definida por $x_n=na^n$ según los valores de $a\in\mathbb{R}$.

Solución.

Distinguimos varios casos siguiendo el modelo de la sucesión a^n.
Caso 1: $a>1$. Este caso es fácil pues $a^n\to+\infty$ y $n\to+\infty$, con lo que no hay indeterminación y $x_n\to+\infty$.
Caso 2: $a=1$. Ahora $a^n=1$ y $x_n=n\to+\infty$.
Caso 3: $0<a<1$. Este caso es el más complicado pues $a^n\to 0$ y $n\to+\infty$, con lo que hay indeterminación. Como n es un polinomio y a^n es una exponencial, va a dominar el comportamiento de esta última sucesión y $x_n\to 0$, sin hacer cálculos. Probar esto de manera rigurosa se hará de la siguiente forma (observemos que $x_n>0$):

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{(n+1)a^{n+1}}{na^n}\to a<1.$$

Esto quiere decir que $x_n\to 0$.
Caso 4: $a=0$. Ahora $a^n=0$ y $x_n=0\to 0$.
Caso 5. $a<-1$. En este caso, $x_n=na^n\to\infty$, sin especificar signo, debido a que $a^n\to\infty$.
Caso 6. $-1<a<0$. Se reduce a el caso 3 ya que $x_n=(-1)^n|a|^n n$ que tiende a 0 por ser acotada por una que tiende a 0.
Caso 7. $a=-1$. En este caso, $x_n=(-1)^n n\to\infty$.

5. Sea $a>0$. Se define $a_1=a$ y $a_{n+1}=\sqrt{1+a_n^2}$. Demostrar que a_n es divergente.

Solución.

Observemos que a_n está bien definida debido a que $1+a_n^2>0$ y podemos definir a_{n+1} en función de a_n. Además, por inducción, $a_n>0$. Si $a_n\in\to L\in\mathbb{R}$, entonces sería $L=\sqrt{1+L^2}$, que implica $L^2=1+L^2$, lo que es imposible. Esto nos dice que a_n no es convergente.

Veamos que a_n es creciente. Como $a_n^2<1+a_n^2$, al ser $a_n>0$, se obtiene $a_n<\sqrt{1+a_n^2}$. Es decir, $a_n<a_{n+1}$, lo que implica que a_n es creciente. Una sucesión creciente es convergente o divergente a $+\infty$. Como no se puede dar la primera posibilidad, $a_n\to+\infty$.

PUNTUACIÓN. Las preguntas 1 vale 3 puntos. Las preguntas 2, 3 y 4 valen 2 puntos. La pregunta 5 vale 1 punto.

TIEMPO: Dos horas y media.