Tema 11

Sucesiones de números.

11.1. Límites de oscilación

Definición 11.1.1. *Sea* $\{a_n\}$ *una sucesión de números reales. Se dice que* $l \in \mathbb{R}$ *es un* límite de oscilación *de la sucesión* $\{a_n\}$ *si para cada* $\varepsilon > 0$ *hay una cantidad infinita de términos de la sucesión en el intervalo* $(l - \varepsilon, l + \varepsilon)$*, es decir, el conjunto* $\{n \in \mathbb{N} : l - \varepsilon < a_n < l + \varepsilon\}$ *es infinito*

Teorema 11.1.2. *Sea* $\{a_n\}$ *una sucesión de números reales y sea* $l \in \mathbb{R}$*. Entonces* l *es un límite de oscilación de* $\{a_n\}$ *si y sólo si existe una subsucesión de* $\{a_n\}$ *convergente a* l*.*

Corolario 11.1.3. *El único límite de oscilación de una sucesión convergente es el propio límite de la sucesión.*

Definición 11.1.4. *Sea* $\{a_n\}$ *una sucesión* acotada *de números reales. Para cada* $k \in \mathbb{N}$*, sea* $A_k := \{a_n : n \geq k\}$ *y sea*

$$y_k = \text{ínf}\, A_k = \text{ínf}_n \{a_n : \ n \geq k\} \qquad y \qquad z_k = \sup A_k = \text{ínf}_n \{a_n : \ n \geq k\}.$$

La sucesión $\{y_k\}$ *es creciente y acotada; la sucesión* $\{z_k\}$ *es decreciente y acotada. Por tanto, existen* $y = \text{lím}_k\, y_k = \sup_k \{y_k : \ k \in \mathbb{N}\}$ *y* $z = \text{lím}_k\, z_k = \text{ínf}_k \{z_k : \ k \in \mathbb{N}\}$*. Al valor* y *se le llama* límite inferior *de la sucesión* $\{a_n\}$ *y se denota por* $\text{lím inf}\, a_n$ *ó* $\underline{\text{lím}}\, a_n$*. Al valor* z *se le llama* límite superior *de la sucesión* $\{a_n\}$ *y se denota por* $\text{lím sup}\, a_n$ *ó* $\overline{\text{lím}}\, a_n$*. Dicho de otra forma:*

$$y = \underline{\text{lím}}\, a_n = \text{lím inf}\, a_n = \sup_k \, \text{ínf}_{n \geq k} \{a_n\} \qquad y \qquad z = \overline{\text{lím}}\, a_n = \text{lím sup}\, a_n = \text{ínf}_k \, \sup_{n \geq k} \{a_n\}.$$

Nota 11.1.5. *Toda sucesión acotada de números reales posee límite superior e inferior.*

Teorema 11.1.6. *Sea $\{a_n\}$ una sucesión acotada de números reales y sean $a, b \in \mathbb{R}$. Entonces:*

$$a = \liminf a_n \iff \forall \varepsilon > 0 \begin{cases} \text{el conjunto } \{n \in \mathbb{N} : \ a_n \leq a - \varepsilon\} \text{ es finito} \\ \text{el conjunto } \{n \in \mathbb{N} : \ a_n < a + \varepsilon\} \text{ es infinito} \end{cases}$$

$$b = \limsup a_n \iff \forall \varepsilon > 0 \begin{cases} \text{el conjunto } \{n \in \mathbb{N} : \ a_n > b - \varepsilon\} \text{ es infinito} \\ \text{el conjunto } \{n \in \mathbb{N} : \ a_n \geq b + \varepsilon\} \text{ es finito} \end{cases}$$

Teorema 11.1.7. *Los límites superior e inferior de una sucesión acotada son, respectivamente, el mayor y el menor de los límites de oscilación.*

Corolario 11.1.8. $\liminf a_n \leq \limsup a_n$.

Teorema 11.1.9. *Una sucesión acotada $\{a_n\}$ es convergente si y sólo si* $\liminf a_n = \limsup a_n$ $(= \lim a_n)$.

Corolario 11.1.10 (Teorema de Bolzano-Weierstrass)**.** *Toda sucesión acotada posee una subsucesión convergente.*

Corolario 11.1.11 (Caracterización secuencial de compactos)**.** *Un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ es compacto si y sólo si toda sucesión de A posee una subsucesión convergente a un punto de A.*

Definición 11.1.12. *Sea $\{a_n\}$ una sucesión no acotada superiormente. Se define* $\limsup a_n = +\infty$*. Si, además,* $\lim a_n = +\infty$*, entonces se define* $\liminf a_n = +\infty$.

Sea $\{a_n\}$ una sucesión no acotada inferiormente. Se define $\liminf a_n = -\infty$*. Si, además,* $\lim a_n = -\infty$*, entonces se define* $\limsup a_n = -\infty$.

11.2. Sucesiones de Cauchy.

Definición 11.2.1. *Una sucesión de número reales $\{a_n\}$ se dice que es una* sucesión de Cauchy *si para cada $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall m, n \geq n_0$ es $|a_n - a_m| < \varepsilon$.*

Lema 11.2.2. *Toda sucesión de Cauchy es acotada.*

Teorema 11.2.3 (Criterio general de convergencia de Cauchy)**.** *Una sucesión de números reales es convergente si y sólo si es una sucesión de Cauchy.*