Tema 10

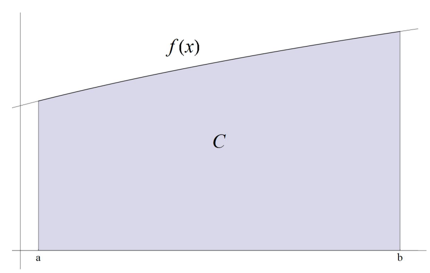
Aplicaciones de la integral.

10.1. Área de figuras planas.

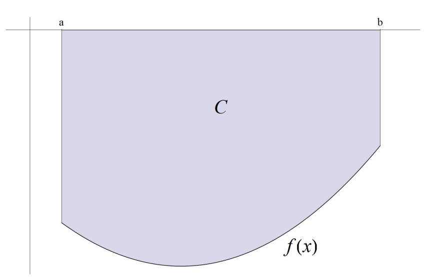
10.1.1. Área encerrada entre una curva y el eje de abscisas.

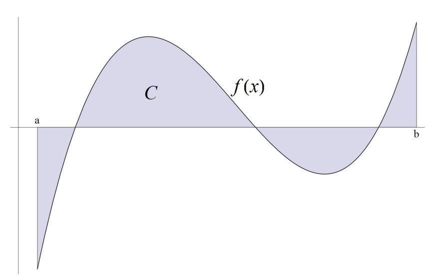
Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función integrable, tal que $f(x) \geq 0$ $\forall x \in [a,b]$. El área del recinto $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq f(x)\}$ viene dada por la integral:

$$\text{Area}(C) = \int_a^b f(x)\,dx.$$



Esta definición se puede extender a otros recintos planos. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función integrable y sea $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b,\ f(x) \leq y \leq 0\}$.





- Si $f(x) \leq 0$ $\forall x \in [a,b]$, el área del recinto C es

$$\text{Area}(C) = -\int_a^b f(x)\,dx.$$

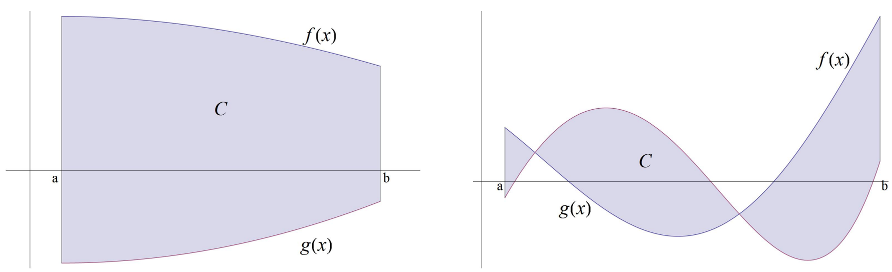
- En general, si la función no tiene signo constante, el área del recinto C sería la suma de las áreas parciales de los recintos donde se conserva el signo, o equivalentemente,

$$\text{Area}(C) = \int_a^b |f(x)|\, dx.$$

10.1.2. Área encerrada entre dos curvas.

Sean, ahora, $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrables, tales que $f(x) \geq g(x)$. El área del recinto $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b,\ g(x) \leq y \leq f(x)\}$ viene dada por la integral:

$$\text{Area}(C) = \int_a^b (f(x) - g(x))\ dx.$$



En general, si las gráficas de ambas funciones se cortan entre sí varias veces, el área del recinto C limitado por las verticales $x = a$, $x = b$ y las curvas $f(x)$ y $g(x)$ será

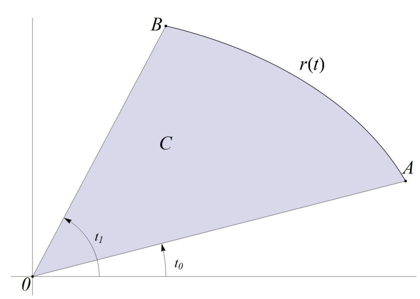
$$\text{Area}(C) = \int_a^b |f(x) - g(x)|\ dx.$$

Nota 10.1.1. *Es fácil escribir las fórmulas análogas para áreas de regiones del tipo* $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c \leq y \leq d,, \ g(y) \leq x \leq f(y)\}$.

10.1.3. Área encerrada por curvas en coordenadas polares.

Sea $r : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}$ una curva continua en coordenadas polares, y sea $C = \{(r, t) : t_0 \leq t \leq t_1,\ 0 \leq r \leq r(t)\}$, es decir, C es el recinto limitado por el arco de curva $r(t)$ y los radio vectores OA y OB, siendo $A = (t_0, r(t_0))$ y $B = (t_1, r(t_1))$. Entonces el área de dicho recinto es

$$\text{Area}(C) = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} r(t)^2\, dt.$$



10.1.4. Área encerrada por curvas en paramétricas.

Definición 10.1.2.

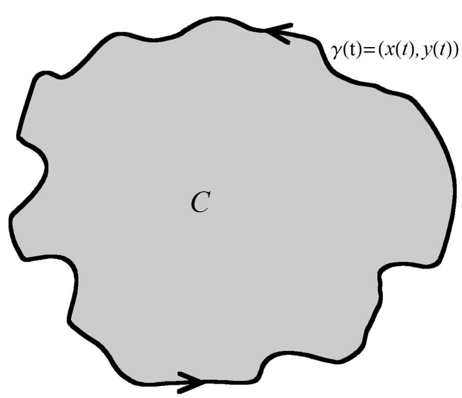
(a) Una curva en el plano es una aplicación continua $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$.

(b) Si $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, *decimos que* $x = x(t)$, $y = y(t)$ *son una* ecuaciones paramétricas *de la curva.*

(c) El punto $A = \gamma(a)$ *es el punto inicial u origen, mientras que* $B = \gamma(b)$ *es el punto final o extremo. Si* $\gamma(a) = \gamma(b)$, *se dice que la curva es* cerrada.

(d) Se dice que la curva es simple *si no se corta a sí misma (salvo, a lo más, en los extremos). Es decir, una curva es simple si* γ *es inyectiva en* (a,b).

Sea C la región del plano rodeada por una curva cerrada simple $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [a,b]$ tal que las funciones $x(t)$, $y(t)$ son derivables y con derivada continua. Supongamos que, a medida que el parámetro t avanza desde a hasta b, la curva cerrada se recorre en sentido antihorario (es decir, la región del plano queda a la izquierda). En estas condiciones



$$\text{Area}(C) = \int_a^b x(t)y'(t)\,dt = -\int_a^b x'(t)y(t)\,dt = \frac{1}{2}\int_a^b (x(t)y'(t) - x'(t)y(t))\,dt.$$

10.2. Longitud de arcos de curva.

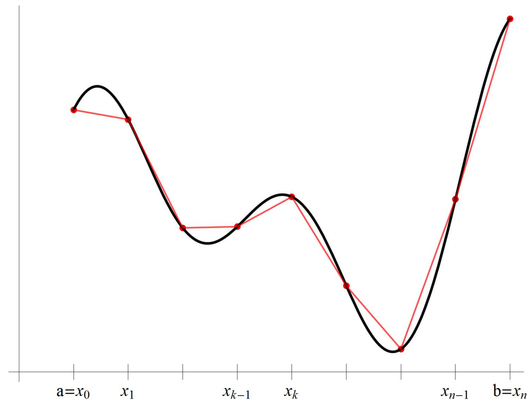
10.2.1. Longitud de una curva en coordenadas cartesianas.

Definición 10.2.1. *Sea* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *acotada. Para cada* $P \in \mathcal{P}[a,b]$, *definimos*

$$l(f,P) := \sum_{k=1}^{n} \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (f(x_k) - f(x_{k-1}))^2},$$

es decir, la longitud de la poligonal que une los puntos $(x_k, f(x_k))$, $k = 0, \ldots, n$.

Nota 10.2.2. *Si* $P, Q \in \mathcal{P}[a,b]$ *y* $P \prec Q$, *entonces* $l(f,P) \le l(f,Q)$.



Definición 10.2.3. *Se dice que la curva* $y = f(x)$ *es* rectificable *si existe* $\sup\{l(f,P) : P \in \mathcal{P}[a,b]\}$. *En tal caso, se define la* longitud del arco de curva *como* $L(f) = \sup\{l(f,P) : P \in \mathcal{P}[a,b]\}$.

Teorema 10.2.4. *Sea* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *una función derivable con derivada acotada en* $[a,b]$. *Entonces*

(a) $L\left(\sqrt{1+(f')^2}, P\right) \leq l(f,P) \leq U\left(\sqrt{1+(f')^2}, P\right)$, $\forall P \in \mathcal{P}[a,b]$.

(b) $\sup\left\{L\left(\sqrt{1+(f')^2}, P\right) : P \in \mathcal{P}[a,b]\right\} \leq \sup\{l(f,P) : P \in \mathcal{P}[a,b]\}$.

(c) $\sup\{l(f,P) : P \in \mathcal{P}[a,b]\} \leq \text{ínf}\left\{U\left(\sqrt{1+(f')^2}, P\right) : P \in \mathcal{P}[a,b]\right\}$.

Corolario 10.2.5. *Si* $\sqrt{1+(f')^2} \in \mathcal{R}[a,b]$, *entonces* $L(f) = \int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}\,dx$.

10.2.2. Longitud de una curva en coordenadas polares.

Sea $r = r(t)$ una función derivable con derivada acotada. La longitud del arco de curva polar comprendida entre los radiovectores de ángulos t_0 y t_1 viene dada por

$$L = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{r(t)^2 + r'(t)^2}\,dt.$$

10.2.3. Longitud de una curva en paramétricas.

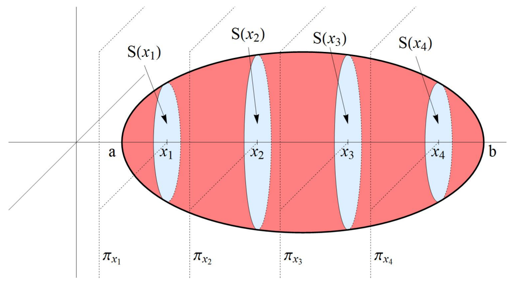
Sea $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [a,b]$ una curva paramétrica tal que $x(t)$ e $y(t)$ son derivables y con derivada continua. Entonces la longitud del arco de curva comprendido entre $A = \gamma(a)$ y $B = \gamma(b)$ es

$$L(f) = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,dt$$

10.3. Volúmenes de sólidos.

10.3.1. Principio de Cavalieri.

Sea D un sólido tridimensional y sea $S(x)$ el área de la sección del sólido D con el plano π_x perpendicular al eje OX en el punto de abscisa x, es decir, $S(x) = \text{Area}(D \cap \pi_x)$. Supongamos que $S(x) \neq 0$ $\forall x \in [a, b]$ y que $S(x)$ es una función continua en el intervalo $[a, b]$. Entonces el volumen del sólido D viene dado por



$$\text{Vol}(D) = \int_a^b S(x)\, dx.$$

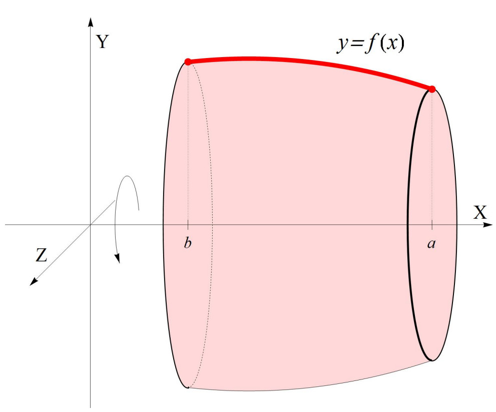
10.3.2. Sólidos de revolución.

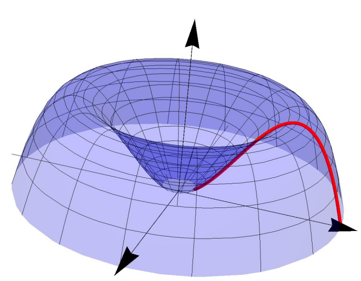
Coordenadas cartesianas.

En lo que sigue, sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua (y positiva). Consideremos el recinto plano C dado por $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq f(x)\}$.

Sea D_x el sólido obtenido al girar el recinto C alrededor del eje OX. Entonces

$$\text{Vol}(D_x) = \pi \int_a^b f(x)^2\, dx.$$





Sea D_y el sólido obtenido al girar el recinto C alrededor del eje OY. Entonces

$$\mathrm{Vol}(D_y) = 2\pi \int_a^b x f(x)\, dx.$$

Sólidos de revolución en paramétricas.

Sea C la región del plano rodeada por una curva cerrada simple $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [a, b]$ tal que las funciones $x(t)$, $y(t)$ son derivables y con derivada continua. Supongamos que, a medida que el parámetro t avanza desde a hasta b, la curva cerrada se recorre en sentido anti-horario (es decir, la región del plano queda a la izquierda).

Sea D_x el sólido obtenido al girar el recinto C alrededor del eje OX. Entonces

$$\mathrm{Vol}(D_x) = \pi \int_a^b y(t)^2 x'(t)\, dt.$$

Sea D_y el sólido obtenido al girar el recinto C alrededor del eje OY. Entonces

$$\mathrm{Vol}(D_y) = \pi \int_a^b x(t)^2 y'(t)\, dt.$$

10.3.3. Áreas de superficies de revolución.

Coordenadas cartesianas.

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función derivable con derivada continua. Sea S la superficie revolución generada al hacer girar la curva $y = f(x)$ (entre $x = a$ y $x = b$) alrededor del eje OX. Entonces el área de la superficie (lateral) generada es

$$\mathrm{Area}(S) = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx.$$

Coordenadas paramétricas.

Sea $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [a, b]$ una curva tal que las funciones $x(t)$, $y(t)$ son derivables y con derivada continua. Entonces el área de la superficie (lateral) S generada al girar γ alrededor del eje OX es

$$\mathrm{Area}(S) = 2\pi \int_a^b y(t)\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt.$$