Tema 9

La Integral de Riemann.

9.1. Construcción de la integral de Riemann.

Definición 9.1.1. *Sea $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ un intervalo cerrado y acotado (compacto).*

Se llama partición *de I a todo conjunto de puntos $P = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ de forma que $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$.*

Se llama norma de la partición *P, y se denotará por $|P|$, al máximo de los números $x_k - x_{k-1}$, con $k = 1, \ldots, n$.*

Denotaremos por $\mathcal{P}[a, b]$ (o más brevemente $\mathcal{P}$, si no hay confusión posible con el intervalo) al conjunto de todas las particiones de $[a, b]$.

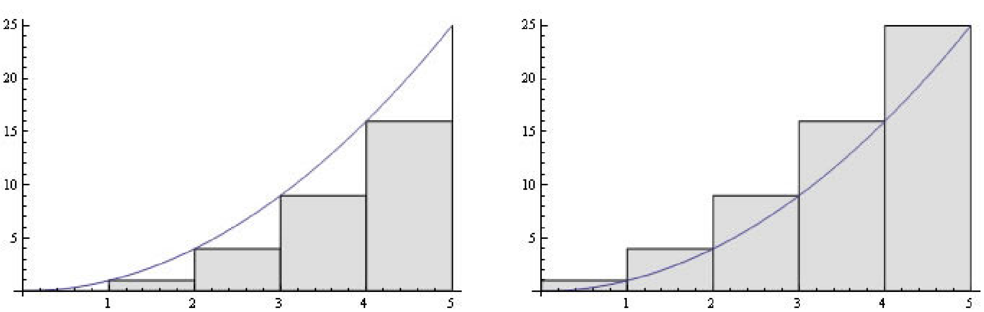

Figura 9.1: Suma inferior y superior de Riemann de la función $f(x) = x^2$ en el intervalo $I = [0, 5]$ respecto de la partición $P = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

Definición 9.1.2. *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función acotada y sea $P \in \mathcal{P}[a, b]$ con $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$. Sean*

$$m_k := \text{ínf}\{f(x) : \ x_{k-1} \le x \le x_k\} = \underset{x\in[x_{k-1},x_k]}{\text{ínf}} \{f(x)\}$$
$$M_k := \sup\{f(x) : \ x_{k-1} \le x \le x_k\} = \sup_{x\in[x_{k-1},x_k]} \{f(x)\}.$$

Se llaman, respectivamente, Suma inferior *y* suma superior de Riemann *de la función f relativas a la partición P a las siguientes sumas:*

$$L(f, P) := \sum_{k=1}^{n} m_k\,(x_k, x_{k-1}) \qquad\qquad U(f, P) := \sum_{k=1}^{n} M_k\,(x_k, x_{k-1})\,.$$

Nota 9.1.3. *Para cada $P \in \mathcal{P}$ y cada función f, es claro que $L(f, P) \le U(f, P)$*

Definición 9.1.4. *Sean $P, Q \in \mathcal{P}[a, b]$. Se dice que Q* es más fina que *P (o que P es menos fina que Q), y se denotará $P \preceq Q$, cuando $P \subset Q$.*

Teorema 9.1.5. *Sean $P, Q \in \mathcal{P}[a, b]$ con $P \preceq Q$. Entonces*

$$L(f, P) \le L(f, Q) \qquad y \qquad U(f, Q) \le U(f, P).$$

Teorema 9.1.6. *Dadas $P, Q \in \mathcal{P}[a, b]$, se cumple que $L(f, P) \le U(f, Q)$.*

Corolario 9.1.7.

(a) El conjunto $\{L(f, P) : P \in \mathcal{P}[a, b]\}$ está acotado superiormente.

(b) El conjunto $\{U(f, P) : P \in \mathcal{P}[a, b]\}$ está acotado inferiormente.

Definición 9.1.8.

(a) Se llama integral inferior de Riemann*, y se denotará por $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx$, al supremo del conjunto de sumas inferiores.*

(b) Se llama integral superior de Riemann*, y se denotará por $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx$, al ínfimo del conjunto de sumas superiores.*

Nota 9.1.9. *Se cumple que $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx \le \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$.*

Definición 9.1.10. *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función acotada. Se dice que f es* integrable Riemann *en $[a, b]$, cuando $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$. Al este valor común se le llamará* integral de Riemann *de f en el intervalo $[a, b]$ y se denotará por $\int_a^b f(x)\,dx$.*

Al conjunto de todas las funciones integrables Riemann en un intervalo $[a, b]$ *se le denotará por* $\mathcal{R}[a, b]$.

Ejemplo 9.1.11. *Sea* $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ *dada por*

$$f(x) := \chi_{[0,1]\cap\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin [0,1] \cap \mathbb{Q} \end{cases}$$

Entonces $f \notin \mathcal{R}[0, 1]$.

Definición 9.1.12. *Sea* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *una función acotada,* $f \in \mathcal{R}[a, b]$ *con* $f(x) \geq 0$ $\forall x \in [a, b]$. *Consideremos el conjunto*

$$S := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ a \leq x \leq b, \ 0 \leq y \leq f(x)\}.$$

Se define el área de S *como* $A(S) = \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$.

Si fuese $f(x) \leq 0$ $\forall x \in [a, b]$, *entonces, por simetría, el área de* S *(sustituyendo* $f(x)$ *por* $-f(x)$*) sería* $A(S) = -\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$.

Teorema 9.1.13 (Condición de integrabilidad de Riemann)**.** *Sea* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *acotada.*

$$f \in \mathcal{R}[a, b] \iff \forall \varepsilon > 0, \ \exists P \in \mathcal{P}[a, b] \text{ tal que } U(f, P) - L(f, P) < \varepsilon.$$

Corolario 9.1.14. *Si* $f \in \mathcal{R}[a, b]$, *su integral es el único número real que cumple lo siguiente*

$$L(f, P) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq U(f, Q) \qquad \forall P, Q \in \mathcal{P}[a, b].$$

Teorema 9.1.15. *Sea* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *acotada. Entonces,* $f \in \mathcal{R}[a, b]$ *si y sólo si existe una sucesión* $\{P_n\}_n \subset \mathcal{P}[a, b]$ *tal que* $\lim\limits_{n\to\infty} [U(f, P_n) - L(f, P_n)] = 0$.

Además, en ese caso, se cumple además que

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} U(f, P_n) = \lim_{n\to\infty} L(f, P_n).$$

Nota 9.1.16.

(a) En la práctica, se suele tomar $P_n \in \mathcal{P}[a, b]$ *la partición del intervalo* $[a, b]$ *en* n *partes iguales, es decir,* $P_n = \left\{a + \frac{k}{n}(b - a) : \ k = 0, 1, \ldots, n\right\}$.

(b) Además, si para cada $k = 1, \cdots, n$ *seleccionamos* $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$, *se cumple que* $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(t_k) = \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x)\,dx$.

9.2. Propiedades generales de la integral de Riemann.

Teorema 9.2.1. *Sean* $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *acotadas con* $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$ *y* $\lambda \in \mathbb{R}$. *Entonces*

(a) $f + g \in \mathcal{R}[a, b]$ *y* $\displaystyle\int_a^b (f + g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$.

(b) $\lambda f \in \mathcal{R}[a, b]$ *y* $\displaystyle\int_a^b \lambda f(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx$.

Teorema 9.2.2. *Sean* $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *acotadas con* $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$. *Entonces*

(a) Si $f(x) \geq 0\ \forall x \in [a, b]$, *entonces* $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$.

(b) Si $f(x) \leq g(x)\ \forall x \in [a, b]$, *entonces* $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$.

Teorema 9.2.3. *Sea* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *con* $f \in \mathcal{R}[a, b]$. *Sea* $\varphi : [c, d] \to \mathbb{R}$ *continua tal que* $f([a, b]) \subset [c, d]$. *Entonces* $\varphi \circ f \in \mathcal{R}[a, b]$.

Corolario 9.2.4. *Sea* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *con* $f \in \mathcal{R}[a, b]$.

(a) $|f| \in \mathcal{R}[a, b]$ *y, además,* $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$.

(b) Para cada $n \in \mathbb{N}$, $f^n \in \mathcal{R}[a, b]$.

Nota 9.2.5. *En general, la composición de funciones integrables no tiene por qué ser integrable.*

Teorema 9.2.6. *Sean* $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *acotadas con* $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$. *Entonces* $f \cdot g \in \mathcal{R}[a, b]$.

Lema 9.2.7. *Sea* $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *acotada con* $g(x) \geq c > 0\ \forall x \in [a, b]$. *Entonces* $\frac{1}{g} \in \mathcal{R}[a, b]$.

Corolario 9.2.8. *Sean* $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *acotadas con* $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$ *y* $g(x) \geq c > 0$ $\forall x \in [a, b]$. *Entonces* $f/g \in \mathcal{R}[a, b]$.

Teorema 9.2.9 (aditividad respecto del intervalo de integración)**.** *Sea* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *acotada y sea* $c \in (a, b)$. *Entonces*

$$f \in \mathcal{R}[a, b] \iff f \in \mathcal{R}[a, c] \cap \mathcal{R}[c, b].$$

En tal caso, se cumple que $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$.

Nota 9.2.10. *El teorema anterior da pie a los siguientes convenios.*

- $\displaystyle\int_a^a f(x)\,dx = 0$.

- *Si* $a < b$, *entonces* $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$.
- $\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x) = \int_a^b f(x)\,dx \ \forall a,b,c \in \mathbb{R}$.

Teorema 9.2.11 (del valor medio integral). *Sea* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *acotada con* $f \in \mathcal{R}[a,b]$. *Si* $m \leq f(x) \leq M \ \forall x \in [a,b]$, *entonces* $m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq M$.

Si, además, f *es continua en* $[a,b]$, *existe* $c \in [a,b]$ *tal que* $f(c) = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$.

Definición 9.2.12. *Al número* $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$ *se le llama* media integral *de la función* f *en el intervalo* $[a,b]$.

9.3. Teoremas fundamentales del Cálculo Integral.

Teorema 9.3.1. *Sea* $f \in \mathcal{R}[a,b]$. *Entonces la función* $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ *dada por* $F(x) := \int_a^x f(t)\,dt$ *es continua en* $[a,b]$.

Teorema 9.3.2 (Primer Teorema Fundamental del Cálculo Integral). *Sea* $f \in \mathcal{R}[a,b]$ *continua en* $c \in [a,b]$. *Entonces la función* $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ *dada por* $F(x) := \int_a^x f(t)\,dt$ *es derivable en* c *y se cumple que* $F'(c) = f(c)$ *(si* $c = a, b$, *se entiende derivada lateral).*

Teorema 9.3.3. *Sea* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *continua en* $[a,b]$. *Entonces la función* $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ *dada por* $F(x) := \int_a^x f(t)\,dt$ *es derivable en* $[a,b]$ *y se cumple que* $F'(x) = f(x) \ \forall x \in [a,b]$ *(si* $c = a, b$, *se entiende derivada lateral).*

Corolario 9.3.4 (Regla de Barrow). *Sea* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *continua en* $[a,b]$ *y sea* G *una primitiva de* f *en* $[a,b]$. *Entonces* $\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a)$.

Teorema 9.3.5 (Segundo Teorema Fundamental del Cálculo integral). *Sea* $f \in \mathcal{R}[a,b]$ *y sea* G *una primitiva de* f *en* $[a,b]$. *Entonces* $\int_a^b f(x)\,dx = G(b) - G(a)$.

9.4. Integración por sustitución y por partes.

Teorema 9.4.1 (Cambio de variable). *Sea* $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ *derivable en* $[a,b]$ *con* $\varphi' \in \mathcal{R}[a,b]$ *y sea* $f : \varphi([a,b]) \to \mathbb{R}$ *continua en* $\varphi([a,b])$. *Entonces*

$$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\,dx.$$

Teorema 9.4.2 (Integración por partes). *Sean* $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *derivables en* $[a, b]$ *con* $f', g' \in \mathcal{R}[a, b]$. *Entonces*

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b g(x)f'(x)\,dx.$$

9.5. Funciones integrables.

En esta sección se verán algunos ejemplos de tipos de funciones integrables Riemann. Pero para ello, es conveniente repasar algunos conceptos y resultados topológicos.

9.5.1. Topología de la recta real (opcional).

En esta sección recordaremos algunos conceptos sobre topología de la recta real.

Definición 9.5.1. *Sea* $A \subset \mathbb{R}$ *y sea* $a \in \mathbb{R}$.

(a) Se llama bola abierta *de centro* a *y radio* r *al intervalo* $(a-r, a+r)$ *y se denotará por* $B(a, r)$.

(b) Se dice que a *es un* punto adherente *de* A *cuando* $\forall r > 0$ *es* $A \cap B(a, r) \neq \varnothing$.

(c) Se dice que A *es un* punto de acumulación *de* A *cuando* $A \cap B(a, r) \setminus \{a\} \neq \varnothing$.

(d) Se dice que A *es un* punto aislado *de* A *cuando* $a \in A$ *pero no es un punto de acumulación de* A.

(e) Se dice que a *es un* punto interior *de* A *o, equivalentemente, que* A *es un* entorno *de* a, *cuando* $\exists r > 0$ *tal que* $B(a, r) \subset A$.

(f) Se dice que a *es un* punto frontera *de* A *cuando* $\forall r > 0$ *se cumple que* $A \cap B(a, r) \neq \varnothing$ *y* $(\mathbb{R} \setminus A) \cap B(a, r) \neq \varnothing$.

(g) Se llama clausura *o* adherencia *de* A, *y se denotará por* $\overline{A}$, *al conjunto de todos los puntos de adherencia de* A.

(h) Se llama conjunto derivado *de* A, *y se denotará por* A', *al conjunto de todos los puntos de acumulación de* A.

(i) Se llama interior *de* A, *y se denotará por* A°, *al conjunto de todos los puntos interiores de* A.

(j) Se llama frontera *de A, y se denotará por ∂A, al conjunto de todos los puntos frontera de A.*

Nota 9.5.2. *Se puede demostrar que $A^\circ \subset A \subset \overline{A}$, $A' \cup \partial A \subset \overline{A}$, $\overline{A} = A \cup A'$ y $\overline{A} = A^\circ \cup \partial A$.*

Definición 9.5.3. *Sea* $A \subset \mathbb{R}$.

(a) Se dice que A *es abierto cuando* $A^\circ = A$.

(b) Se dice que A *es cerrado cuando* $\overline{A} = A$.

Teorema 9.5.4. $A \subset \mathbb{R}$ *es cerrado si y sólo si* $\mathbb{R} \setminus A$ *es abierto.*

Teorema 9.5.5.

(a) La unión arbitraria de abiertos es abierto.

(b) La intersección finita de abiertos es abierto.

(c) La intersección arbitraria de cerrados es cerrado.

(d) La unión finita de cerrados es cerrado.

Definición 9.5.6. *La familia* $\mathcal{T} = \{A \subset \mathbb{R} \ A \text{ es abierto}\}$ *con la distancia euclídea* $d(x, y) = |x - y| \ \forall x, y \in \mathbb{R}$ *es una topología sobre* $\mathbb{R}$ *llamada* topología métrica *o* topología euclídea *de* $\mathbb{R}$.

9.5.2. Conjuntos compactos.

En esta sección nos ocuparemos de los conjuntos compactos y algunas de sus propiedades y caracterizaciones topológicas.

Definición 9.5.7. *Sea* $A \subset \mathbb{R}$ *y* $U_i \subset \mathbb{R}$ *con* $i \in I$. *Se dice que la familia* $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ *es un* recubrimiento *de* A *cuando* $A \subset \bigcup_{i \in I} U_i$. *Si, además,* U_i *es abierto* $\forall i \in I$, *se dirá que* $\mathcal{U}$ *es un recubrimiento* abierto *de* A.

Definición 9.5.8. *Se dice que* $A \subset \mathbb{R}$ *es un conjunto* compacto *cuando de todo recubrimiento abierto de* A *se puede extraer un subrecubrimiento finito. Es decir, si* $A \subset \bigcup_{i \in I} U_i$ *con* U_i *abierto* $\forall i \in I$, *entonces existen* $i_1, \cdots, i_p \in I$ *tales que* $A \subset \bigcup_{k=1}^{p} U_{i_k}$.

Teorema 9.5.9. *Sea* $A \subset \mathbb{R}$ *compacto y* $B \subset A$ *cerrado. Entonces* B *también es compacto.*

Teorema 9.5.10 (de Heine-Borel)**.** *Sea* $A \subset \mathbb{R}$. *Entonces* A *es compacto si y sólo si* A *es cerrado y acotado.*

Teorema 9.5.11. $A \subset \mathbb{R}$ *es compacto si y sólo si cualquier subconjunto infinito de* A *posee, al menos, un punto de acumulación en* A.

9.5.3. Continuidad uniforme.

En esta sección introduciremos un concepto esencial en cálculo y que será de utilidad para demostrar que ciertas funciones son integrables Riemann.

Definición 9.5.12. *Sea $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Se dice que f es* uniformemente continua *en I cuando $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que $\forall x, y \in I$ con $|x - y| < \delta$, es $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.*

Nota 9.5.13. *Toda función uniformemente continua en I es continua en I. El recíproco no es cierto en general y un contraejemplo es $f(x) = x^2$ en $I = (0, +\infty)$ o $g(x) = 1/x$ en $I = (0, 1)$. Sin embargo, $f(x)$ sí es uniformemente continua en $I = (0, 1)$.*

Teorema 9.5.14. *Sean $f, g : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uniformemente continuas en I. Entonces $f + g$ es uniformemente continua en I. Si, además, f y g son acotadas, entonces $f \cdot g$ también es uniformemente continua en I.*

Teorema 9.5.15. *Sea $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uniformemente continua en I y $g : J \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uniformemente continua en J con $f(I) \subset J$. Entonces $g \circ f$ es uniformemente continua en I.*

Teorema 9.5.16 (de Heine)**.** *Sea $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua con I compacto. Entonces f es uniformemente continua en I.*

9.5.4. Algunas funciones integrables Riemann.

Teorema 9.5.17. *Toda función continua en $[a, b]$ es integrable Riemann en $[a, b]$.*

Teorema 9.5.18. *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ acotada y continua salvo un número finito de puntos de $[a, b]$. Entonces $f \in \mathcal{R}[a, b]$.*

Teorema 9.5.19. *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ acotada y monótona. Entonces $f \in \mathcal{R}[a, b]$.*