Breve resumen sobre el cálculo de derivadas.

1. Propiedades algebraicas: Sean f, $g : A \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones derivables en A. Entonces

$$[f(x)+g(x)]' = f('x) + g'(x), \quad [f(x)\cdot g(x)]' = g(x)f'(x) + f(x)g'(x),$$

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}, \text{ si } g(x) \neq 0.$$

Regla de la cadena: Sean $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ y $g : B \longrightarrow \mathbb{R}$ dos una función tales que la función compuesta de g en f, $g \circ f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ exista. Supongamos que f es derivable en $x = a$ y que g es derivable en $x = f(a)$. Entonces la función compuesta $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ es derivable en $x = a$ y además

$$(g \circ f)'(a) = g(f(a))' = g'[f(a)]f'(a) \equiv \left.\frac{d\,g(y)}{d\,y}\right|_{y=f(a)} \cdot \left.\frac{d\,f(x)}{d\,x}\right|_{x=a}.$$

Tabla de derivadas: Las funciones elementales son derivables en su "dominio". Además:

1. $(x^\alpha)' = \alpha\, x^{\alpha-1}, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}$
2. $(\operatorname{sen} x)' = \cos x, \quad x \in \mathbb{R}$
3. $(\cos x)' = -\operatorname{sen} x, \quad x \in \mathbb{R}$
4. $(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + n\pi\right\}, \quad n \in \mathbb{Z}$
5. $(\operatorname{arc\,sen} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1, 1)$
6. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad x \in (-1, 1)$
7. $(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}$
8. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}$
9. $(a^x)' = a^x \ln a, \quad \forall a > 0, a \neq 1, \quad x \in \mathbb{R}$
10. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}, \quad x > 0,\ a > 0$
11. $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x, \quad x \in \mathbb{R}$
12. $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x, \quad x \in \mathbb{R}$
13. $(\tanh x)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}, \quad x \in \mathbb{R}$
14. $(\operatorname{cth})' = \dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x}, \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Ejemplos:

Calcular la derivada de la función $f(x) = \tan(x^2 + 3x + e^x)$ en $x = a$.

$$\frac{d}{d\,x}\tan(x^2+3x+e^x) = \left.\frac{d\,\tan(y)}{d\,y}\right|_{y=x^2+3x+e^x} \cdot \left.\frac{d\,x^2+3x+e^x}{d\,x}\right|_{x=a} = \frac{2x+3+e^x}{\cos^2(x^2+3x+e^x)}.$$

Calcular la derivada de la función $h(x) = f(x)^{g(x)}$. Para encontrarla calcularemos la derivada de $\log h(x) = g(x) \log f(x)$,

$$(\log h(x))' = \frac{h'(x)}{h(x)} = g'(x)\log f(x) + g(x)\frac{f'(x)}{f(x)},$$

luego

$$(f(x)^{g(x)})' = f(x)^{g(x)}\left(g'(x)\log f(x) + g(x)\frac{f'(x)}{f(x)}\right).$$