Sucesiones

Cálculo Infinitesimal
Grado en Matemáticas

Renato Álvarez-Nodarse
Universidad de Sevilla

http://euler.us.es/~renato/clases.html

Una sucesión de números reales $\{a_n\}$ no es más que una regla que a cada número natural le hace corresponder otro real:

$$a_n : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}, \quad a_n = f(n), \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Una sucesión de números reales $\{a_n\}$ no es más que una regla que a cada número natural le hace corresponder otro real:

$$a_n : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}, \quad a_n = f(n), \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

¡**O sea, una sucesión es una función definida sobre $\mathbb{N}$** !

Una sucesión de números reales $\{a_n\}$ no es más que una regla que a cada número natural le hace corresponder otro real:

$$a_n : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{R}, \quad a_n = f(n), \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

¡O sea, una sucesión es una función definida sobre $\mathbb{N}$!

Por ejemplo: La sucesión constante $a_n = 1$

$$\{1, 1, 1, 1, 1, \ldots, 1, 1, 1, \ldots\}$$

La sucesión de los números naturales $a_n = n$

$$\{1, 2, 3, 4, 5, \ldots, n-1, n, n+1, \ldots\}$$

La sucesión de los inversos de los números naturales $b_n = \dfrac{1}{n}$

$$\left\{\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \ldots, \frac{1}{n-1}, \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \ldots\right\}$$

Definición

Una sucesión $\{a_n\}$ *es monótona creciente si* $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} > a_n$.

Por ejemplo, la sucesión $a_n = n^2$ es monótona creciente.

Definición

Una sucesión $\{a_n\}$ es monótona creciente si $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} > a_n$.

Por ejemplo, la sucesión $a_n = n^2$ es monótona creciente.

Definición

Una sucesión $\{a_n\}$ es monótona decreciente si $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} < a_n$.

Por ejemplo, la sucesión $a_n = \dfrac{1}{n}$ es monótona decreciente.

Definición

Una sucesión $\{a_n\}$ *es monótona creciente si* $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} > a_n$.

Por ejemplo, la sucesión $a_n = n^2$ es monótona creciente.

Definición

Una sucesión $\{a_n\}$ *es monótona decreciente si* $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} < a_n$.

Por ejemplo, la sucesión $a_n = \dfrac{1}{n}$ es monótona decreciente.

Definición

Una sucesión $\{a_n\}$ *es monótona no decreciente si* $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} \geq a_n$. *y monótona no creciente si* $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} \leq a_n$.

Ejemplos: sucesión no decreciente $\{1, 1, 2, 2, 3, 3, ...\}$ y no crecientes $\{1, 1, 1/2, 1/2, 1/3, 1/3, ...\}$. $\{a_n\}$ constante.

Definición

Se dice que una sucesión $\{a_n\}$ está acotada superiormente si $\forall n \in \mathbb{N}$, existe un $M \in \mathbb{R}$ tal que $a_n \leq M$.

Por ejemplo, la sucesión $b_n = \dfrac{1}{n^2}$ está acotada superiormente pues $b_n \leq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Definición

Se dice que una sucesión $\{a_n\}$ *está acotada superiormente si* $\forall n \in \mathbb{N}$, *existe un* $M \in \mathbb{R}$ *tal que* $a_n \leq M$.

Por ejemplo, la sucesión $b_n = \dfrac{1}{n^2}$ está acotada superiormente pues $b_n \leq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Definición

Se dice que una sucesión $\{a_n\}$ *está acotada inferiormente si* $\forall n \in \mathbb{N}$, *existe un* $m \in \mathbb{R}$ *tal que* $a_n \geq m$.

Por ejemplo, la sucesión $b_n = n^2$ está acotada inferiormente pues $b_n \geq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Definición

Se dice que una sucesión $\{a_n\}$ está acotada, si $\{a_n\}$ está acotada superior e inferiormente. Es decir si $\forall n \in \mathbb{N}$, existe un $M \in \mathbb{R}$ tal que $|a_n| \leq M$.

Por ejemplo, la sucesión $b_n = (-1)^n$ está acotada pues $|b_n| \leq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Definición

Se dice que una sucesión $\{a_n\}$ *está acotada, si* $\{a_n\}$ *está acotada superior e inferiormente. Es decir si* $\forall n \in \mathbb{N}$*, existe un* $M \in \mathbb{R}$ *tal que* $|a_n| \leq M$*.*

Por ejemplo, la sucesión $b_n = (-1)^n$ está acotada pues $|b_n| \leq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Definición

Se dice que una sucesión $\{a_n\}$ *es no acotada si* $\forall M \in \mathbb{R}$*, existe un* $n \in \mathbb{N}$ *tal que* $|a_n| > M$*.*

Por ejemplo, la sucesión $b_n = (-1)^n n^2$ no está acotada.

Definición

Una sucesión $\{a_n\}$ *tiene límite* $a \in \mathbb{R}$ *si* $\forall \epsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ *tal que* $\forall n > N$, *entonces* $|a_n - a| < \epsilon$ *y se denota* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. *O sea,*

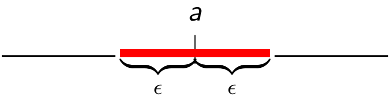
$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \iff \forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tal que } \forall n > N, \quad |a_n - a| < \epsilon.$$

Definición

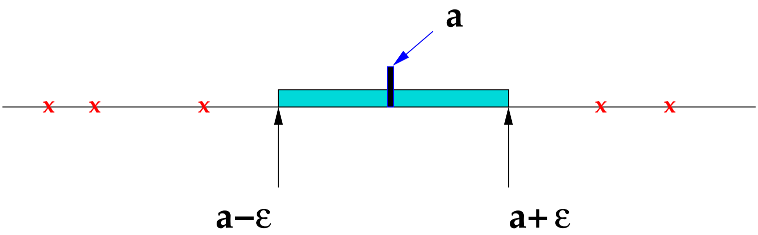
Una sucesión $\{a_n\}$ *tiene límite* $a \in \mathbb{R}$ *si* $\forall \epsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ *tal que* $\forall n > N$, *entonces* $|a_n - a| < \epsilon$ *y se denota* $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. *O sea,*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \iff \forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \textit{ tal que } \forall n > N, \quad |a_n - a| < \epsilon.$$

Geométricamente significa que $\forall \epsilon > 0$, en el intervalo $a - \epsilon, a + \epsilon$ se encuentran todos los términos de la sucesión a partir de un cierto $n = N$, o sea los a_n, $n \geq N$ y por tanto en dicho intervalo hay infinitos términos, y fuera sólo hay un número finito de términos (los N primeros términos) de la misma.



$$\lim_{n\to\infty} a_n = a$$



$$\forall \epsilon > 0, \ \exists N \in \mathbb{N} \ \text{ tal que } \ \forall n > N, \quad |a_n - a| < \epsilon$$

Definición

Se dice que una sucesión $\{a_n\}$ no tiene límite $a \in \mathbb{R}$ cuando $n \to \infty$ si existe $\epsilon > 0$ tal que para todo $N \in \mathbb{N}$ existe un $n > N$, que cumple con que $|a_n - a| \geq \epsilon$ y se denota $\lim_{n\to\infty} a_n \neq a$. O sea,

$$\lim_{n\to\infty} a_n \neq a \iff \exists \epsilon > 0, \quad \forall N \in \mathbb{N}, \quad \exists n > N, \text{ tal que } |a_n - a| \geq \epsilon.$$

Ejemplo: la sucesión $a_n = (-1)^n$ no tiene ningún límite $a \in \mathbb{R}$.

Definición

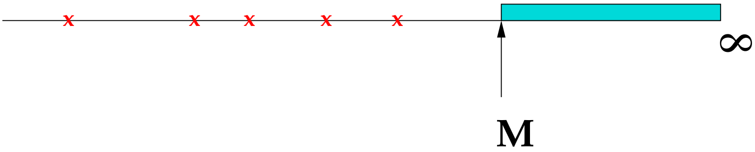
Se dice que una sucesión $\{a_n\}$ *tiene límite* $+\infty$ *si*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \Longleftrightarrow \forall M > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tal que } \forall n > N, \;\; a_n > M.$$

Definición

Se dice que una sucesión $\{a_n\}$ *tiene límite* $+\infty$ *si*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \iff \forall M > 0, \exists N \in \mathbb{N} \textit{ tal que } \forall n > N, \ \ a_n > M.$$

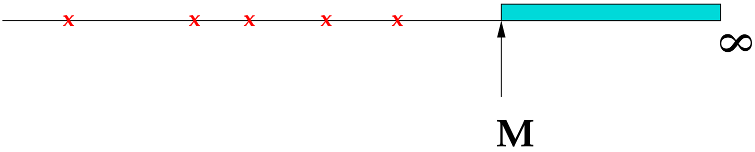


Geométricamente: $\forall M > 0$, en $(M, +\infty)$ hay infinitos términos de a_n y fuera de él, en $(-\infty, M]$ un número finito.

Definición

Se dice que una sucesión $\{a_n\}$ tiene límite $+\infty$ si

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty \iff \forall M > 0, \exists N \in \mathbb{N} \text{ tal que } \forall n > N, \quad a_n > M.$$



Geométricamente: $\forall M > 0$, en $(M, +\infty)$ hay infinitos términos de a_n y fuera de él, en $(-\infty, M]$ un número finito.

Ejemplos: $a_n = n$, $a_n = n^2$.

Ejercicio: Define $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

Definición

Una sucesión $\{a_n\}$ que tenga límite (finito) se denomina convergente y si el límite no existe o es infinito ($\pm\infty$) se llama divergente.

Definición

Una sucesión $\{a_n\}$ que tenga límite (finito) se denomina convergente y si el límite no existe o es infinito ($\pm\infty$) se llama divergente.

Teorema

La manipulación de un número de términos de una sucesión no altera el carácter convergente o divergente de la misma.

Definición

Una sucesión $\{a_n\}$ que tenga límite (finito) se denomina convergente y si el límite no existe o es infinito $(\pm\infty)$ se llama divergente.

Teorema

La manipulación de un número de términos de una sucesión no altera el carácter convergente o divergente de la misma.

Teorema

(Unicidad del límite de una sucesión.)
Si la sucesión $\{a_n\}$ es convergente entonces tiene un único límite.

Ejercicio: probar que la afirmación anterior es válida si el límite es $+\infty$ o $-\infty$.

Teorema (Condición necesaria de existencia de límite)

Si la sucesión $\{a_n\}$ *es convergente entonces es acotada.*

Propiedades de las sucesiones convergentes

Teorema (Condición necesaria de existencia de límite)

Si la sucesión $\{a_n\}$ es convergente entonces es acotada.

Corolario

Toda sucesión $\{a_n\}$ no acotada es divergente.

Teorema (Condición necesaria de existencia de límite)

Si la sucesión $\{a_n\}$ *es convergente entonces es acotada.*

Corolario

Toda sucesión $\{a_n\}$ *no acotada es divergente.*

Lemma

Sean $\{a_n\}$ *y* $\{b_n\}$ *dos sucesiones que tienden a cero. Entonces, cualquiera sea* $M \in \mathbb{R}$ *las sucesiones* Ma_n *y* $a_n + b_n$ *son convergentes y también tienen límite cero, o equivalentemente:*

Si las sucesiones $\{a_n\}$ *y* $\{b_n\}$ *tienden a cero, entonces para todos* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$*, la sucesión* $\alpha a_n + \beta b_n$ *también tiende a cero.*

Teorema

Sea $\{a_n\}$ una sucesión convergente con límite a. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, 2. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n - a = 0$, 3. $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n - a| = 0$.

Teorema

Sea $\{a_n\}$ una sucesión convergente con límite a. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, 2. $\lim_{n\to\infty} a_n - a = 0$, 3. $\lim_{n\to\infty} |a_n - a| = 0$.

Teorema (Teorema de las tres sucesiones)

Sean las sucesiones $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ y $\{c_n\}$ tales que

$$a_n \leq c_n \leq b_n \text{ para todo } n \geq N \in \mathbb{N}.$$

Si $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son convergentes con $\lim_{n\to\infty} a_n = l$ y $\lim_{n\to\infty} b_n = l$, entonces, $\{c_n\}$ es convergente y

$$\lim_{n\to\infty} c_n = l.$$

Ejercicio: Demuestra que:

$$\lim_{n\to\infty} \cos x_n = 1, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\sin x_n}{x_n} = 1.$$

Ejercicio: Demuestra que:

$$\lim_{n\to\infty} \cos x_n = 1, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\sin x_n}{x_n} = 1.$$

Ejercicio: Prueba que una sucesión convergente $\{a_n\}$ de términos no positivos (no negativos) tiene límite no positivo (no negativo). O sea, si $a_n \geq 0 \Rightarrow a_n \to a \geq 0$ y si $a_n \leq 0 \Rightarrow a_n \to a \leq 0$.

Ejercicio: Demuestra que:

$$\lim_{n\to\infty} \cos x_n = 1, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\sin x_n}{x_n} = 1.$$

Ejercicio: Prueba que una sucesión convergente $\{a_n\}$ de términos no positivos (no negativos) tiene límite no positivo (no negativo). O sea, si $a_n \geq 0 \Rightarrow a_n \to a \geq 0$ y si $a_n \leq 0 \Rightarrow a_n \to a \leq 0$.

Ejercicio: Prueba que si una sucesión tiene todos sus términos mayores (menores) que un cierto m entonces el límite de a_n no puede ser menor (mayor) que dicho m.

Ejercicio: Demuestra que:

$$\lim_{n\to\infty} \cos x_n = 1, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\sin x_n}{x_n} = 1.$$

Ejercicio: Prueba que una sucesión convergente $\{a_n\}$ de términos no positivos (no negativos) tiene límite no positivo (no negativo). O sea, si $a_n \geq 0 \Rightarrow a_n \to a \geq 0$ y si $a_n \leq 0 \Rightarrow a_n \to a \leq 0$.

Ejercicio: Prueba que si una sucesión tiene todos sus términos mayores (menores) que un cierto m entonces el límite de a_n no puede ser menor (mayor) que dicho m.

Ejercicio: Probar que si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, y $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, y $a_n \leq b_n$ para todo n, entonces $a \leq b$.

Teorema

Sean dos sucesiones convergentes $\{a_n\}$ *y* $\{b_n\}$ *con* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, *y* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. *Entonces:*

1. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n + b_n = a + b$.
2. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = a \cdot b$. *En particular,* $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha\, a_n = \alpha\, a$.
3. *Si* $\forall n \in \mathbb{N}$, $\ b_n \neq 0$, $\quad b \neq 0$, *entonces,* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{a}{b}$.

Teorema (Criterio de Weierstrass para las sucesiones monótonas)

Para que una sucesión $\{a_n\}$ monótona sea convergente es **necesario y suficiente** *que esté acotada. Además, el límite de la sucesión es el supremo o el ínfimo del conjunto $A = \{a_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ de los valores de a_n, i.e.,*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} \inf A & \text{si } a_n \text{ es decreciente} \\ \sup A & \text{si } a_n \text{ es creciente} \end{cases} .$$

Teorema (Criterio de Weierstrass para las sucesiones monótonas)

Para que una sucesión $\{a_n\}$ *monótona sea convergente es* **necesario y suficiente** *que esté acotada. Además, el límite de la sucesión es el supremo o el ínfimo del conjunto* $A = \{a_n, \;\; n \in \mathbb{N}\}$ *de los valores de* a_n*, i.e.,*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} \inf A & \text{si } a_n \text{ es decreciente} \\ \sup A & \text{si } a_n \text{ es creciente} \end{cases} .$$

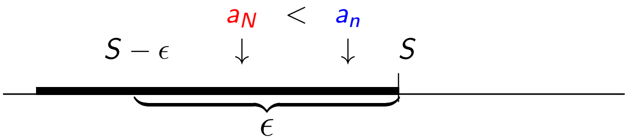
Demostración: Sea $a_n \nearrow$ y $S = \sup A$, sea $\forall n > N$

Teorema (Criterio de Weierstrass para las sucesiones monótonas)

Para que una sucesión $\{a_n\}$ monótona sea convergente es **necesario y suficiente** *que esté acotada. Además, el límite de la sucesión es el supremo o el ínfimo del conjunto $A = \{a_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ de los valores de a_n, i.e.,*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} \inf A & \text{si } a_n \text{ es decreciente} \\ \sup A & \text{si } a_n \text{ es creciente} \end{cases} .$$

Demostración: Sea $a_n \nearrow$ y $S = \sup A$, sea $\forall n > N$



Teorema

Si $\{a_n\}$ esmonótona no decreciente (no creciente) y no acotada superiormente (inferiormente), entonces $\lim\limits_{n\to\infty} a_n + \infty \ (-\infty)$.

Teorema

Si $\{a_n\}$ esmonótona no decreciente (no creciente) y no acotada superiormente (inferiormente), entonces $\lim\limits_{n\to\infty} a_n + \infty\ (-\infty)$.

Ejemplo: La sucesión $a_n = \dfrac{1}{n}$ está acotada $|a_n| \leq 1,\ \forall n \in \mathbb{N}$ y es decreciente, por tanto a_n es convergente y

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \inf A = \inf \left\{ \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N} \right\} = 0.$$

La sucesión $b_n = n$ no es acotada y $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \inf A = +\infty$

Teorema

Si $\{a_n\}$ esmonótona no decreciente (no creciente) y no acotada superiormente (inferiormente), entonces $\lim_{n\to\infty} a_n + \infty \ (-\infty)$.

Ejemplo: La sucesión $a_n = \dfrac{1}{n}$ está acotada $|a_n| \leq 1, \ \forall n \in \mathbb{N}$ y es decreciente, por tanto a_n es convergente y
$\lim_{n\to\infty} a_n = \inf A = \inf \left\{ \dfrac{1}{n}, \ n \in \mathbb{N} \right\} = 0.$

La sucesión $b_n = n$ no es acotada y $\lim_{n\to\infty} b_n = \inf A = +\infty$

Ejemplo: Sea $\{a_n\}$ la sucesión definida mediante la fórmula:

$$a_1 = \sqrt{2}, \quad a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}.$$

Demostrar que tiene límite y encontrarlo.

Teorema (Criterio de la raíz)

Sea $\{a_n\}$ *una sucesión de términos positivos tal que* $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=l$. *Entonces,* $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=l$.

Teorema (Criterio de la raíz)

Sea $\{a_n\}$ una sucesión de términos positivos tal que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$. Entonces, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$.

Ejemplo: Calcula los límites $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{a^n}{n!}}$, $a \in \mathbb{R}$ y $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$.

Teorema (Criterio de la raíz)

Sea $\{a_n\}$ una sucesión de términos positivos tal que $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=l$. *Entonces,* $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=l$.

Ejemplo: Calcula los límites $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{a^n}{n!}}$, $a\in\mathbb{R}$ y $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}$.

Teorema (Stolz)

Sea a_n/b_n una sucesión tal que $b_n\nearrow$, y $b_n\to+\infty$ y sea $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}=l$. *Entonces* $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=$

Teorema (Criterio de la raíz)

Sea $\{a_n\}$ una sucesión de términos positivos tal que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = l$. *Entonces,* $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$.

Ejemplo: Calcula los límites $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{a^n}{n!}}$, $a \in \mathbb{R}$ y $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$.

Teorema (Stolz)

Sea a_n/b_n una sucesión tal que $b_n \nearrow$, y $b_n \to +\infty$ y sea $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} = l$. *Entonces* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1} - b_n} =$

Ejemplo: Calcula $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1 + 2 + \cdots + n}{n^2}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1 + 1/2 + \cdots + 1/n}{\log n}$

Límites notables.

1. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$
2. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x} = 1$, para todo $x \in \mathbb{R},\ x > 0.$
3. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n} = 1.$
4. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} x^n = 0$, para todo $x \in \mathbb{R},\ |x| < 1.$
5. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^\alpha} = 0$, para todo $\alpha \in \mathbb{R},\ \alpha > 0.$
6. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n^\alpha} = 0$, para todo $\alpha \in \mathbb{R},\ \alpha > 0.$
7. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n^\alpha}{a^n} = 0$, para todo $a > 1$, $\alpha > 0.$
8. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{n!} = 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$. $(n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdots n)$
9. $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n} = 0$. $(n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdots n)$

Definición

Dos sucesiones $\{a_n\}$ *y* $\{b_n\}$ *se denominan equivalentes si* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 1$, *y se escribe* $a_n \sim b_n$.

Ejemplo: $a_n = \dfrac{n+1}{n+2}$ y $b_n = \dfrac{n^2+1}{(n+1)^2}$.

La sucesión $a_n = n!$ es equivalente a $b_n = \sqrt{2\pi n}e^{-n}n^n$

Definición

Dos sucesiones $\{a_n\}$ *y* $\{b_n\}$ *se denominan equivalentes si* $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 1$*, y se escribe* $a_n \sim b_n$*.*

Ejemplo: $a_n = \dfrac{n+1}{n+2}$ y $b_n = \dfrac{n^2+1}{(n+1)^2}$.

La sucesión $a_n = n!$ es equivalente a $b_n = \sqrt{2\pi n} e^{-n} n^n$

Definición

Una sucesión $\{a_n\}$ *se denomina infinitesimal si* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$*.*

Definición

Dos sucesiones $\{a_n\}$ *y* $\{b_n\}$ *se denominan infinitésimos equivalentes y se escribe* $a_n \sim b_n$ *si* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ *y* $\lim_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = 1$*.*

Teorema

Si $\{a_n\}$ es una sucesión infinitesimal, entonces:

1. $\operatorname{sen} a_n \sim a_n$.
2. $\tan a_n \sim a_n$.
3. $\operatorname{arc\,sen} a_n \sim a_n$.
4. $\arctan a_n \sim a_n$.
5. $1 - \cos a_n \sim \dfrac{a_n^2}{2}$.
6. $(1 + a_n)^\alpha - 1 \sim \alpha\, a_n$.
7. $e^{a_n} - 1 \sim a_n, \quad b^{a_n} - 1 \sim a_n \ln b$.
8. $\ln(1 + a_n) \sim a_n, \quad \log_b(1 + a_n) \sim a_n \log_b e$.

Sea $\mathcal{N} = \{n_1, n_2, ..., n_k, ..., \ k \in \mathbb{N}\}$ el conjunto formado por los elementos $\{n_k\}$ de una sucesión **estrictamente creciente** de números naturales. Importante: $\mathbf{n_k} \geq \mathbf{k}$ y sea $\{a_n\}$ una sucesión de números reales.

Sea $\mathcal{N} = \{n_1, n_2, ..., n_k, ..., \ k \in \mathbb{N}\}$ el conjunto formado por los elementos $\{n_k\}$ de una sucesión **estrictamente creciente** de números naturales. Importante: $\mathbf{n_k \geq k}$ y sea $\{a_n\}$ una sucesión de números reales.

Construyamos a partir de $\{a_n\}$ una sucesión cuyos elementos sean los elementos de a_n correspondientes a los valores n_k de $\mathcal{N}$. Es decir, construyamos el subconjunto $\{a_{n_k}, \ k \in \mathbb{N}\}$ del conjunto $\{a_n, \ n \in \mathbb{N}\}$.

Sea $\mathcal{N} = \{n_1, n_2, ..., n_k, ..., \ k \in \mathbb{N}\}$ el conjunto formado por los elementos $\{n_k\}$ de una sucesión **estrictamente creciente** de números naturales. Importante: $\mathbf{n_k \geq k}$ y sea $\{a_n\}$ una sucesión de números reales.

Construyamos a partir de $\{a_n\}$ una sucesión cuyos elementos sean los elementos de a_n correspondientes a los valores n_k de $\mathcal{N}$. Es decir, construyamos el subconjunto $\{a_{n_k}, \ k \in \mathbb{N}\}$ del conjunto $\{a_n, \ n \in \mathbb{N}\}$.

La nueva sucesión así obtenida la denotaremos $\{a_{n_k}\}$ y la llamaremos subsucesión de $\{a_n\}$.

Sea $\mathcal{N} = \{n_1, n_2, ..., n_k, ..., \;\; k \in \mathbb{N}\}$ el conjunto formado por los elementos $\{n_k\}$ de una sucesión **estrictamente creciente** de números naturales. Importante: $\mathbf{n_k \geq k}$ y sea $\{a_n\}$ una sucesión de números reales.

Construyamos a partir de $\{a_n\}$ una sucesión cuyos elementos sean los elementos de a_n correspondientes a los valores n_k de $\mathcal{N}$. Es decir, construyamos el subconjunto $\{a_{n_k}, \;\; k \in \mathbb{N}\}$ del conjunto $\{a_n, \;\; n \in \mathbb{N}\}$.

La nueva sucesión así obtenida la denotaremos $\{a_{n_k}\}$ y la llamaremos subsucesión de $\{a_n\}$.

Por ejemplo, sea $a_n = (-1)^n$. Escojamos los los subconjuntos $\mathcal{N}_1 = \{2, 4, ..., 2k, ..., \;\; k \in \mathbb{N}\}$ y $\mathcal{N}_2 = \{1, 3, ..., 2k-1, ..., \;\; k \in \mathbb{N}\}$ y construyamos las subsucesiones a_{2k} y a_{2k-1} de los elementos pares e impares, respectivamente. Es obvio que $a_{2k} = 1$ y $a_{2k-1} = -1$.

Teorema

Cualquier subsucesión $\{a_{n_k}\}$ *de una sucesión convergente* $\{a_n\}$ *es convergente. O sea, si*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \Longrightarrow \lim_{n_k\to\infty} a_{n_k} = a.$$

Teorema

Cualquier subsucesión $\{a_{n_k}\}$ de una sucesión convergente $\{a_n\}$ es convergente. O sea, si

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \Longrightarrow \lim_{n_k\to\infty} a_{n_k} = a.$$

Teorema (Bolzano-Weierstrass)

De toda sucesión acotada se puede extraer una subsucesión convergente.

Definición

Una sucesión $\{a_n\}$ *es de Cauchy si para todo* $\epsilon > 0$ *existe un* $N \in \mathbb{N}$ *tal que si* $n, m > N$*, entonces* $|a_n - a_m| < \epsilon$.

$$\Updownarrow$$

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \ t.q.\ \forall n > N, \forall p \in \mathbb{N}\ \Rightarrow |a_{n+p} - a_n| < \epsilon.$$

Definición

Una sucesión $\{a_n\}$ *es de Cauchy si para todo* $\epsilon > 0$ *existe un* $N \in \mathbb{N}$ *tal que si* $n, m > N$*, entonces* $|a_n - a_m| < \epsilon$.

$$\Updownarrow$$

$$\forall \epsilon > 0, \, \exists N \in \mathbb{N}, \; t.q. \; \forall n > N, \forall p \in \mathbb{N} \Rightarrow |a_{n+p} - a_n| < \epsilon.$$

Ejemplo: La sucesión $a_n = \frac{1}{n}$ es de Cauchy y la sucesión $b_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ no es de Cauchy.

Definición

Una sucesión $\{a_n\}$ es de Cauchy si para todo $\epsilon > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que si $n, m > N$, entonces $|a_n - a_m| < \epsilon$.

$$\Updownarrow$$

$$\forall \epsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \ t.q.\ \forall n > N, \forall p \in \mathbb{N}\ \Rightarrow |a_{n+p} - a_n| < \epsilon.$$

Ejemplo: La sucesión $a_n = \frac{1}{n}$ es de Cauchy y la sucesión $b_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ no es de Cauchy.

Proposición

1. *Toda sucesión convergente es de Cauchy.*
2. *Toda sucesión de Cauchy es acotada.*

Teorema (Criterio de Cauchy para las sucesiones)

Una sucesión $\{a_n\}$ es convergente si y sólo si es de Cauchy.

Teorema (Criterio de Cauchy para las sucesiones)

Una sucesión $\{a_n\}$ es convergente si y sólo si es de Cauchy.

Para terminar mostraremos un ejemplo de aplicación del Teorema de Cauchy para probar otro importante teorema:

Teorema

Para que una sucesión sea convergente es necesario y suficiente que cualquiera de sus subsucesiones sea convergente y tenga el mismo límite.