1. a) Si $a \in \mathbb{Q}$ y $b \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, ¿es $a+b$ necesariamente irracional?

   b) Si $a \in \mathbb{Q}$ y $b \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, ¿es ab necesariamente irracional?

   c) ¿Existe algún número a tal que $a^2 \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ pero $a^4 \in \mathbb{Q}$?

   d) ¿Existen números irracionales tales que tanto su suma como su producto sean números racionales?

2. Describir, en cada caso, el conjunto de números reales x que verifican la condición:

   a) $(x-1)(x-2) < 0$ b) $x^2 - 3x + 1 \geq 0$ c) $x^2 + x + 2 > 0$

   d) $|x| = x + 5$ e) $|x| = x - 5$ f) $x^2 - 2|x| - 3 = 0$ g) $|2x + 3| < 2$

   h) $|-5x + 1| \leq 1$ i) $|6x + 2| > 5$ j) $|5 - \dfrac{1}{x}| < 1$

   k) $|1 - \dfrac{1}{x}| < 5$ l) $|x - 1| \leq 3x$ m) $|2x - 1| \leq |x + 2|$

   n) $|x^2 - 2| \geq 1$ o) $\dfrac{|x-1|}{|x+1|} = 1$

3. Sean $x, y \in \mathbb{R}$. Demostrar:

   a) $\max\{x, y\} = \dfrac{x+y}{2} + \dfrac{|x-y|}{2}$ b) $\min\{x, y\} = \dfrac{x+y}{2} - \dfrac{|x-y|}{2}$

4. Decir razonadamente si son ciertas las siguientes afirmaciones:

   a) $|x| < 5$ implica $x < 5$. b) $x < 5$ implica $|x| < 5$.

   c) $|x - 5| < 2$ si y sólo si $3 < x < 7$. d) $|1 + 3x| \leq 1$ implica $x \geq -2/3$.

   e) No existe un $x \in \mathbb{R}$ verificando $|x - 1| = |x - 2|$. f) $\forall x > 0,\ \exists y > 0$ tal que $|2x + y| = 5$.

5. Si $A \subset B \subset \mathbb{R}$; $A \neq \emptyset$, y B está a acotado superiormente, probar que $\sup A \leq \sup B$. Comprobar qué ocurre con los ínfimos si B está acotado inferiormente.

6. Sean A, B subconjuntos de $\mathbb{R}$ acotados superiormente y no vacíos:

   a) Demostrar que $\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$.

   b) Demostrar que $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.

   c) Si $\lambda > 0$, probar que $\sup(\lambda A) = \lambda \sup A$.

   d) Si $\lambda < 0$ y A es acotado, probar que $\sup(\lambda A) = \lambda \inf A$.

7. Demuéstrese:

   a) Entre dos números reales existe otro número real.

   b) Entre dos números racionales existe un número irracional.

8. Obtener una condición necesaria y suficiente para que se verifique $\sup A = \text{ínf } A$.

9. Hallar el supremo y el ínfimo, si lo tienen, de los siguientes conjuntos:

   a) $\{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x < 1\}$ b) $\{x \in \mathbb{R} : x < 2\}$

   c) $\{x \in \mathbb{Q} : x < 2\}$ d) $\{x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : x < 2\}$

   e) $\{x \in \mathbb{R} : (x-a)(x-b)(x-c)(x-d) < 0\}$ donde $a < b < c < d$.

10. Demostrar las siguientes expresiones para $n \in \mathbb{N}$:

    a) $1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$ b) $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

    c) $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2$ d) $1^m + 2^m + \cdots + n^m \leq n^{m+1},\ m \in \mathbb{N}$

    e) $(1+x)^n \geq 1 + nx\,,\ x > -1$ f) $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k},\ x, y \in \mathbb{R}$

    g) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a^k = \frac{a - a^{n+1}}{1-a},\ a \neq 1.$

11. Para cada $n \in \mathbb{N}$, sea $P(n)$ la fórmula: $2 + 2^2 + \cdots + 2^n = 2^{n+1}$. Demostrar que $P(n)$ es cierta implica que $P(n+1)$ es cierta. Comprobar, sin embargo, que $P(n)$ es falsa para todo n de $\mathbb{N}$.

12. **11.**Hallar la intersección de las siguientes familias de intervalos y decir si están encajados:

    a) $\{[1 - \frac{1}{2^n}, 2 + \frac{1}{n}] : n \in \mathbb{N}\}$

    b) $\{[a, b] : a, b \in \mathbb{Q}, a < \sqrt{2} < b\}$

    c) $\{[-y^2, y] : y \in \mathbb{R}, y > 0\}$.