1. Demostrar aplicando la definición de límite:

$$\lim_{x\to 3}\frac{2x+1}{x-1}=\frac{7}{2};\quad \lim_{x\to 1+}\frac{2x+1}{x-1}=+\infty;\quad \lim_{x\to +\infty}\frac{2x+1}{x-1}=2\quad \lim_{x\to -\infty}\frac{2x^2+1}{x-1}=-\infty.$$

2. Estudiar la existencia de los siguientes límites, y calcularlos cuando existan:

   a) $\lim \dfrac{x+1}{|x-1|}$ cuando x tiende a $1^+, 1^-, 1, +\infty, -\infty$

   b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2}{10x+x\sqrt{x}}$; $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^2-3x+2}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|}{x^2+x}$

   c) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x+a}-\sqrt{x})$; $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt[3]{x^3+1}-x)$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$

   d) $\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{|x|}{x}}$; $\lim\limits_{x\to+\infty}(\dfrac{x-1}{x+3})^{x+2}$; $\lim\limits_{x\to 0}(e^x+x)^{\frac{1}{x}}$

   e) $\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{sen}(\dfrac{1}{x})$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{2+\operatorname{sen}(\frac{1}{x})}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}(\frac{1}{x})}{e^{\frac{1}{x}}+1}$

   f) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\tan x$; $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{1-\tan x}{\cos 2x}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x-\operatorname{sen}x}{\sqrt{1-\cos x}}$; $\lim\limits_{x\to 0}(\cos ax)^{\frac{1}{x^2}}$

3. Sean f, g dos funciones reales de una variable real:

   a) a) Si en un punto no existe el límite de f, ni el de g, ¿puede existir el límite de $f+g$ o de $f.g$?.

   b) b) Si existen $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x))$, ¿debe existir $\lim\limits_{x\to a} g(x)$?, ¿y si en lugar de suma es producto?

   c) c) Si existe $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ y no existe $\lim\limits_{x\to a} g(x)$, ¿puede existir $\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x))$?

4. Estudiar los puntos de continuidad y las discontinuidades de las siguientes funciones, donde $[t]$ es la parte entera de t y $A, p \in \mathbb{R}$:

   a) $f(x)=\tan x$ b) $f(x)=|x|^p$ si $x\neq 0$; $f(0)=A$ c) $f(x)=|x|^p\operatorname{sen}(\frac{1}{x})$, si $x\neq 0$; $f(0)=A$

   d) $f(x)=\begin{cases} x^2\operatorname{sen}\dfrac{1}{x} & \text{si } x\neq 0,\\ 0 & \text{si } x=0.\end{cases}$ e) $h(x)=\begin{cases} e^{1/x} & \text{si } x\neq 0,\\ 0 & \text{si } x=0.\end{cases}$

   f) $f(x)=\dfrac{\operatorname{sen}x}{1-\cos x}$, si $x\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\setminus\{0\}$; $f(0)=1$ g) $f(x)=x(-1)^{[\frac{1}{x}]}$, si $x\neq 0$; $f(0)=0$.

5. Considerar la función de Riemann $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ definida mediante la expresión

$$f(x)=\begin{cases} 1/q & \text{si } x=p/q \text{ fracción irreducible},\\ 0, & \text{si } x \text{ es irracional.}\end{cases}$$

   a) Probar que para cada $\varepsilon>0$, el conjunto $\{x\in[0,1]: f(x)>\varepsilon\}$ es finito.

   b) Deducir que f es continua en $x\in[0,1]$ si y sólo si x es irracional.

6. Sean $f, g : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$; definir $f \circ g$ y $g \circ f$, y estudiar la continuidad de $f, g, f \circ g, g \circ f$ en los casos:

   a) $f(x) = 1 - x, g(x) = x^2 + 5x$ b) $f(x) = |x|, g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ -1, & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$

7. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua y acotada. Probar que la ecuación $f(x) = x^3$ tiene al menos una solución. ¿Qué puede afirmarse si f no se supone acotada?.

8. a) Demostrar que cuando $x \to 0$, $\operatorname{sen} x$ y x son infinitésimos equivalentes, es decir, se verifica que $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$. (Escribiremos $\operatorname{sen} x \sim x$).

   b) Demostrar que $\tan x \sim x$, $\; 1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$, $\; \log(1 + x) \sim x$, $\; a^x - 1 \sim x \log a \;$ $(a > 0)$.

9. Demostrar que todo polinomio con coeficientes reales y de grado impar tiene al menos una raíz real.

10. Dar un ejemplo de una función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, positiva, continua y acotada que no posea mínimo absoluto.

11. Sea $f : [0, 1] \to [0, 1]$, continua. Demostrar que existe un punto fijo de f, es decir, un punto $c \in [0, 1]$ tal que $f(c) = c$

12. Se dice que una función $f\colon (a, b) \to \mathbb{R}$ es *convexa* si

$$f((1 - \lambda)x + \lambda y) \leq (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y)$$

   para todo $a < x < b, a < y < b$ y para todo $0 < \lambda < 1$. Probar que toda función convexa es continua. Probar para ello que si f es convexa y $a < r < s < t < b$ entonces

$$\frac{f(s) - f(r)}{s - r} \leq \frac{f(t) - f(r)}{t - r} \leq \frac{f(t) - f(s)}{t - s}.$$