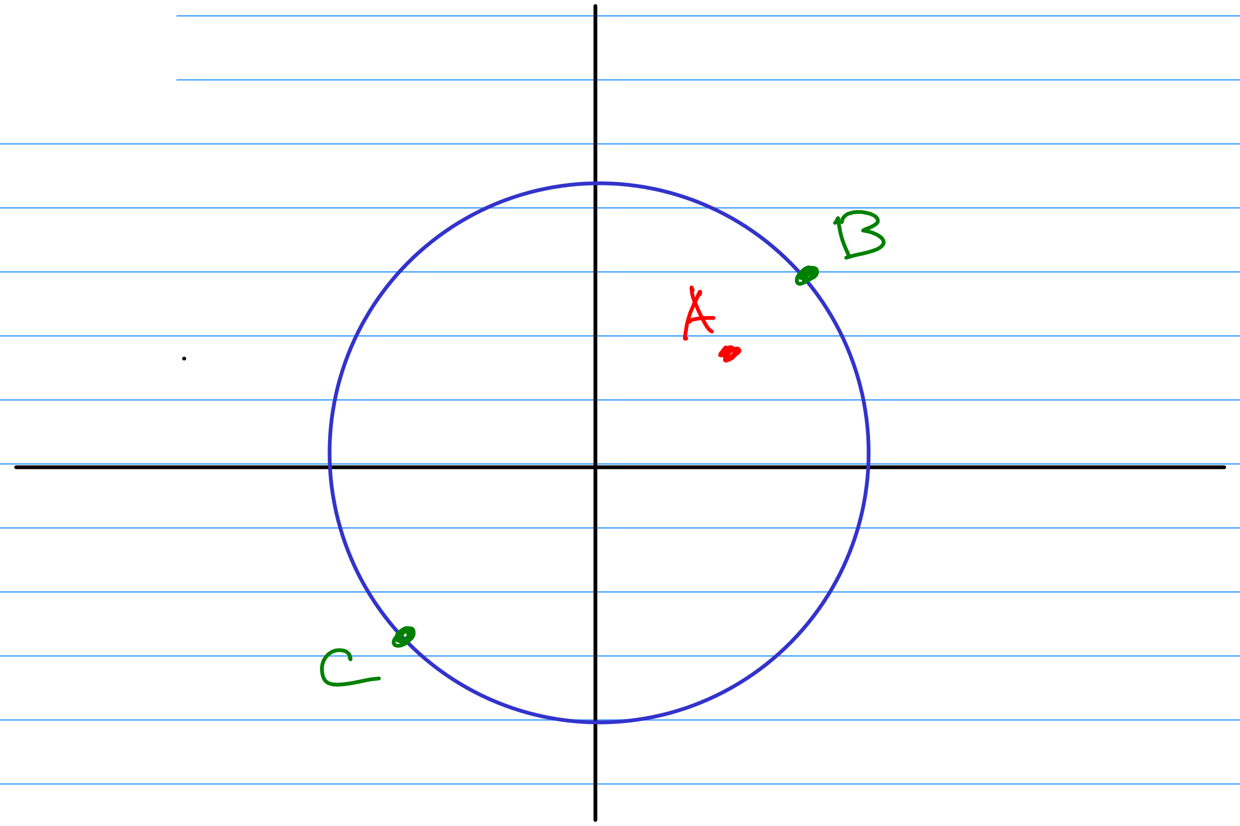
Ejemplo: Encontrar el máximo y mínimo absolutos de la función $f(x,y) = x^2 + y^2 - x - y + 1$ en la región definida por $x^2 + y^2 \leq 2$.



I: Extremos libres.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 1 = 0$$

$$\Rightarrow A\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 2y - 1 = 0$$

$$H_f = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow d^2L > 0 \quad \text{mínimo local.}$$

II Extremos cond. $x^2+y^2=2 \Rightarrow L = x^2+y^2-x-y+1 + \lambda(x^2+y^2-2)$

(1) $\dfrac{\partial L}{\partial x} = 2x - 1 + 2\lambda x = 0$ (1) $\rightarrow 2x(\lambda+1) = 1$ $\quad x = \dfrac{1}{2(\lambda+1)}$ $\quad \lambda \neq -1$

(2) $\dfrac{\partial L}{\partial y} = 2y - 1 + 2\lambda y = 0$ (2) $\rightarrow 2y(\lambda+1) = 1$ $\quad y = \dfrac{1}{2(\lambda+1)}$

$$\frac{2}{4(\lambda+1)^2} = 2$$

(3) $\dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 - 2 = 0$ $\quad \Rightarrow (\lambda+1)^2 = \dfrac{1}{4}$ $\quad \lambda + 1 = \pm 1/2$

$\lambda = -\frac{1}{2}$ $B(1,1)$ $\lambda = -3/2$ $C(-1,-1)$

$f(B) = 1 < f(C) = 5$

En la frontera. T. Weierstrass nos dice que en B hay un mínimo global! (local)
y en C hay un máximo global (local).

- $A(1/2, 1/2)$ $f(A) = 1/2$ $\Rightarrow$ En S (región) $\Rightarrow$ T. Weierstrass asegura que A es el mínimo global, C se alcanza el máximo global.

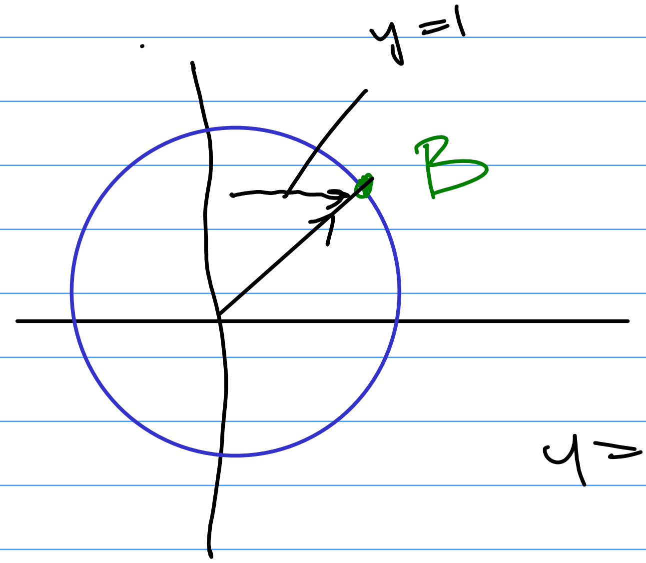
Frontera: II) $H_L = \begin{pmatrix} 2+2\lambda & 0 \\ 0 & 2+2\lambda \end{pmatrix}$ $d^2L = 2(\lambda+1)[dx^2 + dy^2]$

Cond. de ligadura $\phi = 0 \Rightarrow d\phi = 0$ $2x\,dx + 2y\,dy = 0$ $x\,dx + y\,dy = 0$

$\Rightarrow$ En B y C $x = y$ ligadura $\Rightarrow$ $dx = -dy$, $d^2L = 2(\lambda+1)\,2dx^2$

B) $\lambda = -1/2$ $d^2L > 0$ mín. local (por frontera).

C) $\lambda = -3/2$ $d^2L < 0$ máx local (por frontera)



$y=x$ me acerco a B $\underline{\underline{y=x}}$

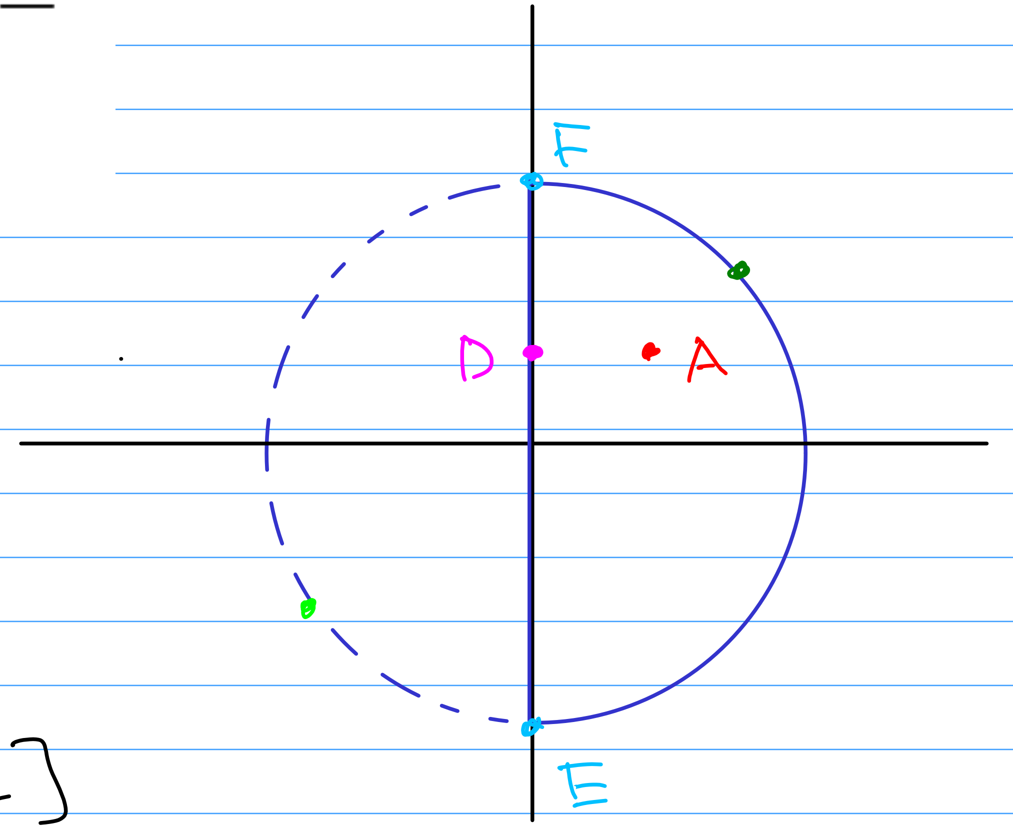
$$f(x,x) = x^2 - x + x^2 - x + 1 = 2x^2 - 2x + 1 = 1 + 2x\overset{<0}{(x-1)}$$

$y=1$ $$f(x,1) = x^2 - x + 1 = 1 + x\overset{<0}{(x-1)}$$

Tan cerca como quiera de B hay pto $^{x<1}$ t.q. $f(x,1) < 1$.

Ejemplo: Encontrar el máximo y mínimo absolutos de la función $f(x,y) = x^2 + y^2 - x - y + 1$ en la región definida por $x^2 + y^2 \le 2$. $\underline{x \ge 0}$

DEBERES: $x \le 0$



I- Extremos libres $\Rightarrow$ • $A(1/2, 1/2)$ mínimo local global.

$f(x,y) = (x-1/2)^2 + (y-1/2)^2 + \frac{1}{2} \ge \frac{1}{2}$

II Frontera: IIa) $x^2+y^2=2$ $\quad x \ge 0$

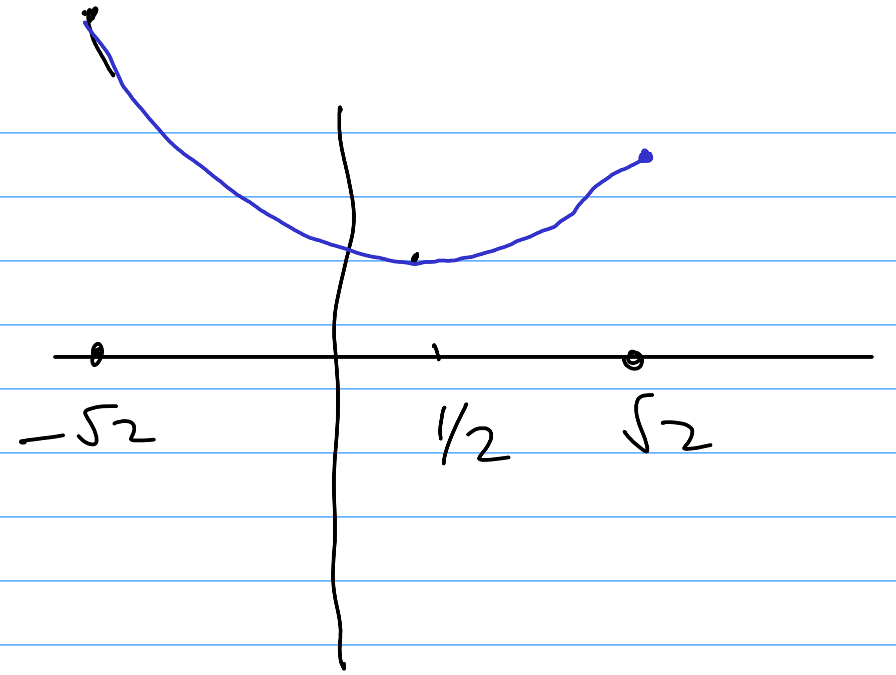
IIb) $x=0 \Rightarrow y^2 \le 2$ $\quad y \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$

IIa) • $\cancel{B(1,1)}$ mínimo global y local (Frontera) pero No es válido en S

• $\cancel{C(-1,-1)}$ máximo global y local (Frontera) pero no está en S.!!

IIb) $x=0$ $\quad f(0,y) = g(y) = y^2 - y + 1$, def. en $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$

$g'(y) = 0 = 2y - 1 \Rightarrow y = 1/2$ $\quad g''(y) = 2$ mínimo local



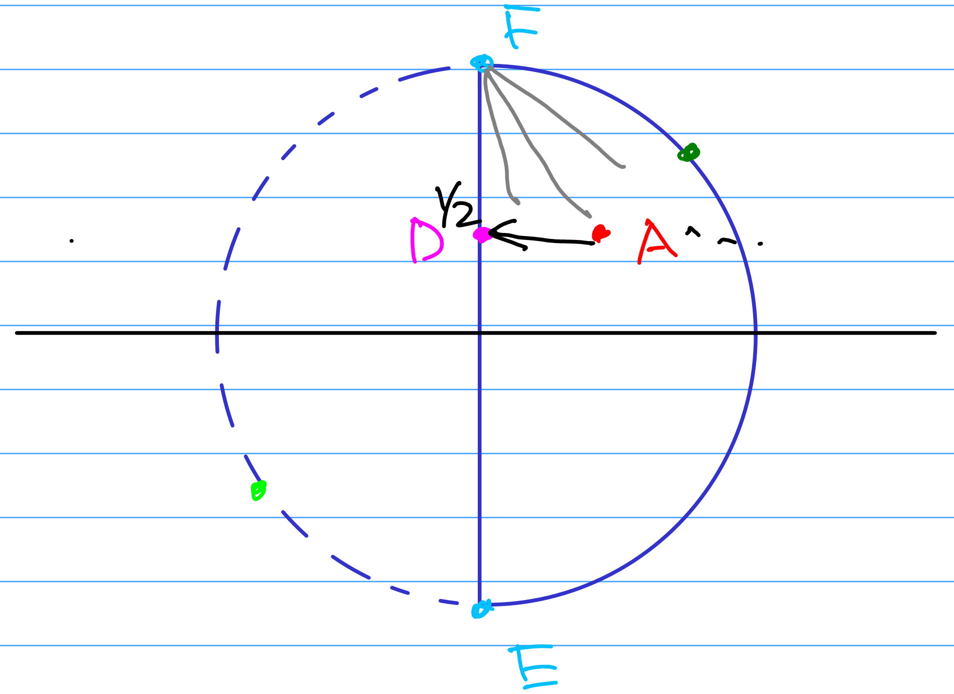
$g(\sqrt{2}) = 2-\sqrt{2}+1 \approx 1.6 \quad < \quad g(-\sqrt{2}) = 3+\sqrt{2}$

$g(1/2) = \frac{3}{4} \approx 0.75$

min $D(0, 1/2)$ $\quad f(D) = 3/4$ $\qquad$ $\underbrace{\text{min } A(1/2, 1/2)}_{\text{max global en } S.}$ $\quad f(A) = \frac{1}{2}$

max $E(0, -\sqrt{2})$ $\quad f(E) = 3+\sqrt{2}$

max $F(0, \sqrt{2})$ $\quad f(F) = 3-\sqrt{2}$



E es máx global.

¿ F ? $\qquad$ ¿ D ?

$$f(x, 1/2) = x^2 - x + 3/4 = \frac{3}{4} + \overbrace{x(x-1)}^{<0}$$

$x>0 \quad x \to 0$

rectas grises.

$$y = -\frac{\sqrt{2}}{a}x + \sqrt{2} = \sqrt{2}\left(-\frac{x}{a}+1\right)$$

$$f\left(x, \sqrt{2}\left(-\frac{x}{a}+1\right)\right)$$