$f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ $x=a$ extremo. $f(a_1 \ldots a_k, \ldots a_n)$ el valor más grande o mas chico en $\mathcal{V}(a) \cap A$

$$g_k(x_k) = f(a_1 a_2 \ldots a_{k-1}\, x_k\, a_{k+1} \ldots a_n) \qquad k = 1, 2, \ldots, n$$

$g_k(x_k)$ tiene un extremo $x_k = a_k$

$$0 = \left.\frac{\partial g_k(x_k)}{\partial x_k}\right|_{x_k = a_k} = \left.\frac{\partial f(x_1 \ldots x_n)}{\partial x_k}\right|_{x=a} = 0$$

g_k: función diferenciable (derivable) de una una variable. el Lema de Fermat de func. una varib $\Rightarrow$ $g'_k(a_k) = 0$ $\forall k = 1, \ldots n$

$$f(x) = f(a) + \cancel{f'(a)(x-a)} + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + o(|x-a|^2) \qquad x \neq a$$

$$\underset{0}{\overset{\shortparallel}{f'(a)}}$$

$$f(x) - f(a) = \frac{(x-a)^2}{2}\left[\underset{0}{\underset{\neq}{f''(a)}} + \cancel{\frac{o((x-a)^2)}{(x-a)^2}} \to 0 \right] \begin{matrix} > 0 \\ < 0 \end{matrix}$$

$f''(a) > 0$ min

$f''(a) < 0$ max

$f \in C^2(A)$

$h = x - a \neq 0$

$h = (h_1 \cdots h_n)$

$$f(x) = f(a) + \cancel{Df(a)(h)} \to 0 + \frac{1}{2}D^2 f(a)(h) + o(\|h\|^2)$$

$$f(x) - f(a) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i \partial x_j} h_i h_j + o(\|h\|^2)$$

$h' = \frac{h}{\|h\|}$

$$f(x) - f(a) = \frac{\|h\|^2}{2}\left[\underbrace{\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i \partial x_j} \frac{h_i}{\|h\|} \frac{h_j}{\|h\|}}_{Q(h',a)} + \underbrace{\frac{o(\|h\|^2)}{\|h\|^2}}_{o(1)} \right]$$

$h' = \frac{h}{\|h\|}$

$\lim_{h \to 0} o(1) = 0$

1°) Q - es un polinomio en h' 2° $\|h'\| = 1$ $h' = \frac{x-a}{\|x-a\|}$

Q es una función continua definida sobre un cerrado y acotado: la esfera $\|h'\|=1$ $\left[Q(z,a) \quad \|z\|=1\right]$. $\Rightarrow$ Q alcanza máx y mín absolutos. (T. de Weistrass)

Sea m el mín de Q y M el máx de Q.

$\forall x \in V(a)$ $m \leq Q \leq M$

$$f(x) - f(a) = \frac{\|h\|^2}{2}\left[Q(h',a) + o(1)\right]$$

$o(1) \to 0$ $h \to 0$

$\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ $\|x-a\| < \delta$

$|o(1)| < \varepsilon$

$-\varepsilon < o(1) < \varepsilon$

I. Q es definida positiva. $\Rightarrow$ $m > 0$.

$$\left[Q + o(1)\right] > m + (-\varepsilon) = m - m/2 = m/2 > 0$$

$\varepsilon = m/2 > 0$

$\exists \delta > 0$ $\|x-a\| < \delta$ $\Rightarrow$ $f(x) - f(a) > 0$ $\Rightarrow$ $x=a$ mínimo local.

I $\quad Q$ es definida negativa: $\quad M < 0 \quad\quad Q \leq M < 0$

$$\left[Q + o(1)\right] < -|M| + \varepsilon = -|M| + |M|/2 = -|M|/2 < 0$$

$\varepsilon = |M|/2$

$f(x) - f(a) < 0$ en todo un entorno de $x = a$ $(x \neq a)$

$\Rightarrow f$ tiene un máximo local en $x = a$

II $\quad Q$ indefinida $\quad 0 > m \leq Q \leq M > 0$

$x = a_m \quad\quad x = a_M$

$Q(a_m, a) = m \quad\quad Q(a_M, a) = M$

$$f(x) - f(a) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i \partial x_j} h_i h_j + o(\|h\|^2)$$

$x - a = t a_m$

$x - a = t a_M$

t lo suficient. pequeño.

a) t pequeño. $x-a = t a_m$ $\|a_m\|=1$ $h = x-a$

$$f(x)-f(a) = \frac{1}{2}\sum_{ij} \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i \partial x_j}\, t a_{m_i}\, t a_{m_j} + o(t^2)$$

$\|t a_m\| = |t|\,\|a_m\|$
$\parallel$
1

$$= \frac{t^2}{2} \underbrace{\sum_{ij} \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i \partial x_j} a_{m_i} a_{m_j}}_{Q(a_m,a)=m} + o(t^2) = \frac{t^2}{2}\underbrace{\left(\overset{<0}{m} + o(1) \right)}_{\text{repitiendo } \underline{\text{II}}}$$

$\Rightarrow \exists$ un entorno de $x=a$ tq $f(x)-f(a)<0$

b) $x-a = t a_M$ y repetimos todo lo anterior

$$f(x)-f(a) = \frac{t^2}{2}\left(\overset{>0}{M} + o(1) \right)$$

$\exists$ un entorno de $x=a$
$f(x)-f(a) > 0$