Ejemplos 14 y 15

Problema. Sea la curva definida por la intersección de las superficies

$$x + y + z = 12, \qquad z = x^2 + y^2$$

Encontrar:

1. Los puntos de mayor y menor altura — $f(x,y,z) = z$
2. Los punto más cercanos y más lejanos al origen — $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$

1) $L = z + \lambda(x+y+z-12) + \mu(x^2+y^2-z)$

(1) $\frac{\partial L}{\partial x} = \lambda + 2\mu x = 0$

(2) $\frac{\partial L}{\partial y} = \lambda + 2\mu y = 0$

(3) $\frac{\partial L}{\partial z} = 1 + \lambda - \mu = 0$

(4) $x+y+z-12=0$

(5) $x^2+y^2-z=0$

(1)–(2) $2\mu x - 2\mu y = 0 = 2\mu(x-y) = 0$

I $\cancel{\mu=0}$

(2) $\Rightarrow \lambda = 0$

(3) $\Rightarrow \cancel{1=0}$

II $x = y$

(4) $2x + z = 12$

(5) $2x^2 - z = 0$

$2x^2 + 2x = 12 \Rightarrow x^2+x-6=0$

$(x+3)(x-2)=0$

$x=-3,\ x=2$

$y=-3,\ y=2$

(4) $\to$ $z=18,\ z=8$

T. Weierstrass

$A(-3,-3,18) \to$ pto más alto

$B(2,2,8) \to$ pto mas bajo

2) $L = x^2+y^2+z^2 + \lambda(x+y+z-12) + \mu(x^2+y^2-z)$

(1) $\dfrac{\partial L}{\partial x} = 2x + \lambda + 2\mu x = 0$

(2) $\dfrac{\partial L}{\partial y} = 2y + \lambda + 2\mu y = 0$

(3) $\dfrac{\partial L}{\partial z} = 2z + \lambda - \mu = 0$

(4) $x+y+z-12=0$ (5) $x^2+y^2=z$

(1)-(2) $2(x-y) + 2\mu(x-y) = 0$

$2(x-y)(\mu+1) = 0$

I $\cancel{\mu = -1}$

(1) $\lambda = 0$.

(3) $2z+1=0 \Rightarrow z = -\frac{1}{2}$

(5) $x^2+\cancel{y^2=}-1/2$

II $x=y$

Este camino ya lo hemos cruzado antes

$A(-3,-3,18)$, $B(2,2,8)$

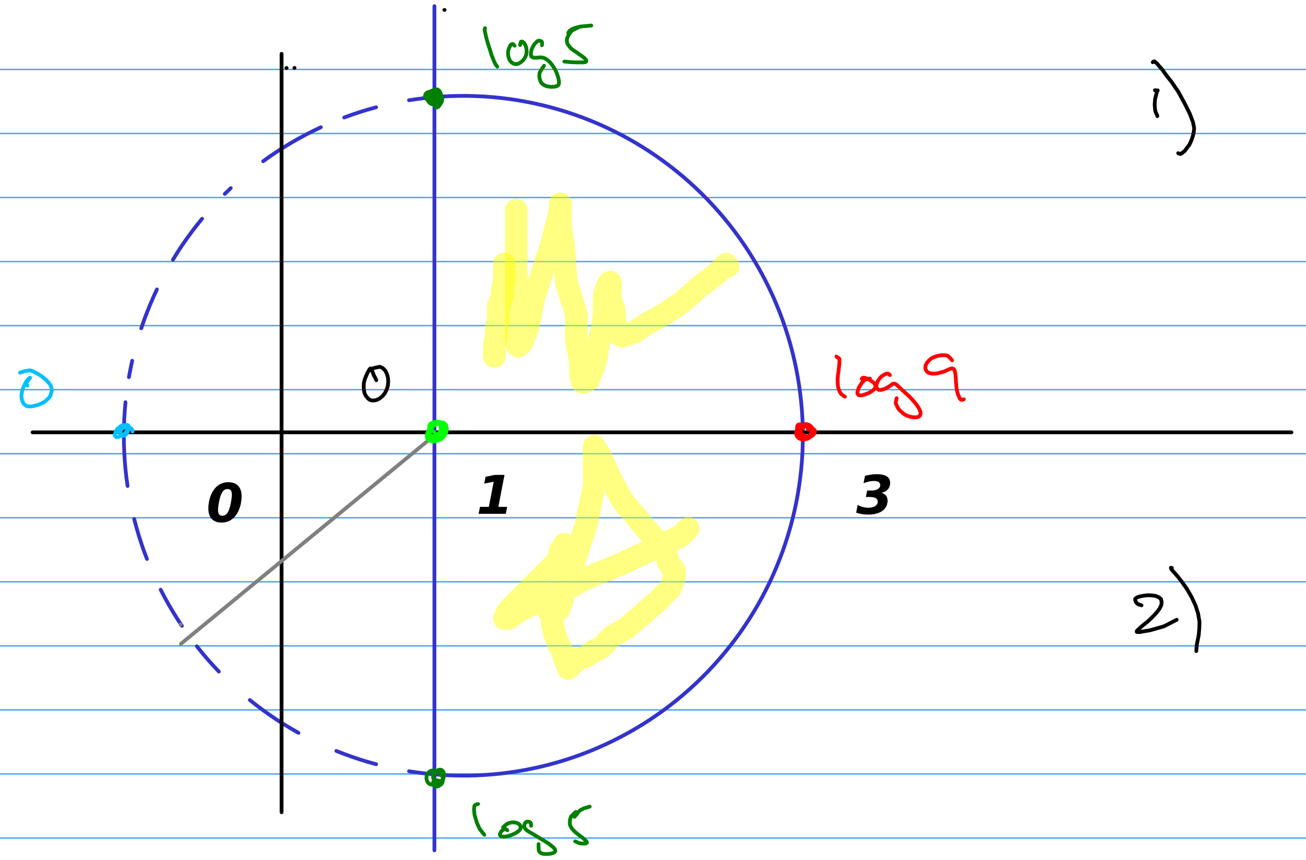
$f(A) = 9+9+18^2 = \;>\; f(B) = 4+4+8^2$

mayor distancia menor distancia

y T. Weierstrass!!

f. cont sobre un cerrado y acotado!!

Ejemplo 11: Encuentra los extremos absolutos de $f : D \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = \log\left(x^2+y^2\right)$ donde D es la región $\{(x,y) : x \geq 1, (x-1)^2+y^2 \leq 4\}$. D es compacto!!



1) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{2x}{x^2+y^2} = 0 \qquad \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{2y}{x^2+y^2} = 0$

$\Rightarrow (0,0)$ No vale porque no está en D

2) Frontera. 2a) Circunferencia entera.

$L = \log(x^2+y^2) + \lambda\left((x-1)^2+y^2-4\right)$

f. alcanzar máx y min absoluto!!!

T. Weierstrass.

(1) $\dfrac{\partial L}{\partial x} = \dfrac{2x}{x^2+y^2} + 2\lambda(x-1) = 0$

$+ \ (x-1)^2+y^2 = 4$

(2) $\dfrac{\partial L}{\partial y} = \dfrac{2y}{x^2+y^2} + 2\lambda y = 0$

$(1)\cdot y-(2)x \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2\lambda y(x-1) - 2\lambda xy = 0 \\ 2\lambda \cancel{y}x - 2\lambda y - 2\lambda \cancel{y}x = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \lambda y = 0 \begin{array}{l} \nearrow \mathrm{I} \quad \lambda = 0 \\ \searrow \mathrm{II} \quad y = 0 \end{array}$

I) $\lambda = 0 \;\cancel{\Rightarrow}\; x=y=0$ No vale. (sobre la circunferencia)

II) $y=0. \Rightarrow (x-1)^2 = 4 \qquad x-1 = \pm 2 \begin{array}{l} \nearrow x = 3 \qquad A(3,0) \\ \searrow x = -1 \qquad \cancel{B(-1,0)} \end{array}$

$x \geq 1$

$f(A) = \log 9 > f(B) = \log 1 = 0$

En A se alcanza un máximo global y en B un mínimo global

$x \geq 1 \Rightarrow$ B No me vale.!!

Solo tengo un pto crítico que es máximo local en $A(3,0)$

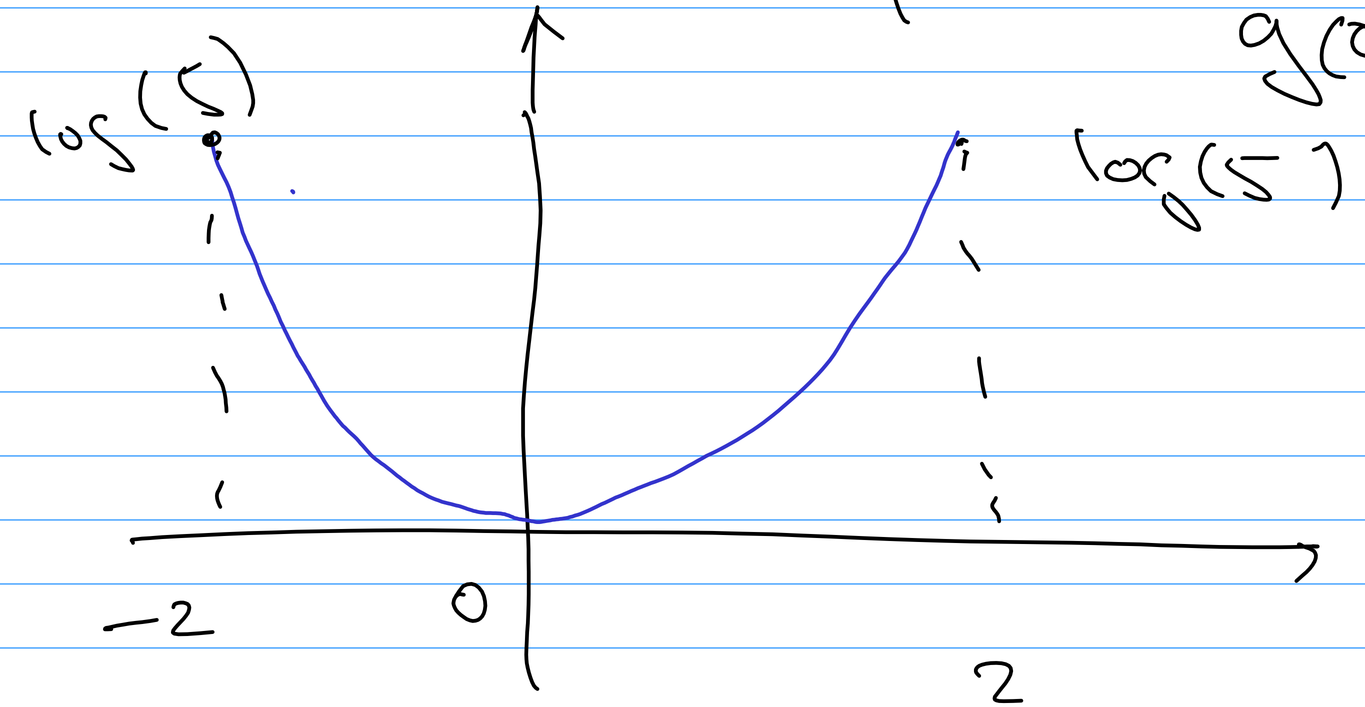
2b) $x=1$ y $y^2 \leq 4$ $\quad g(y) = f(1,y) = \log(1+y^2) \quad y \in [-2,2]$

$g'(y) = \dfrac{2y}{1+y^2} = 0 \Rightarrow y = 0$

$g'(y) < 0 \quad y < 0$

$g'(y) > 0 \quad y > 0$

$g(0) = 0$



g tiene mínimo global en $y=0$

• $C(1,0)$ → f tiene mínimo

$D(1,-2)$ $\quad E(1,2)$ máx globales de g.

$g(D) = g(E) = \log 5.$

f tiene un max global (abs) en $A(3,0)$ y un mín global (abs) en $C(1,0)$.

en D y E no hay nada.