GRUPO A

Problema 1 (3 ptos.) *Sea la ecuación*

$$F(x,y,z) = 6\,x\,y\,e^{z-1} + \alpha\,\left(z^2 + y^2 + x^2\right), \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

1. *¿Para qué valores de a la ecuación anterior define una función $z = f(x,y)$ en el entorno U del punto $A = (-1,1,1)$? Justifica la respuesta.* Valor de α 2.

2. *¿Cuántas veces podemos derivar la función resultante $z = f(x,y)$ en el entorno U del punto A? Justifica la respuesta. Nº de veces:* ∞.

$F(A) = -6 + \alpha \cdot 3 = 0 \Rightarrow \alpha = 2$

$F'_z(A) = 6xye^{z-1} + 2z \cdot 2 \Big|_A = -6 + 4 = -2 \neq 0$

$F \in C^\infty(U(A))$ (de hecho es C^∞ en $\mathbb{R}^3$)

$\Rightarrow$ T.F.I $\exists\ z = f(x,y)$ en un entorno de $U(A)$

tal que $F(x,y,z(x,y)) = 0$ en dicho entorno

y $z = f(x,y) \in C^\infty(U(a))$ $a = (-1,1)$.

$F'_z = 2\left(3xye^{z-1} + 2z\right)$

$F'_x = 2\left(3ye^{z-1} + 2x\right)$ $F'_y = 2\left(3xe^{z-1} + 2y\right)$

3. *Calcula las derivadas parciales* $\frac{\partial f}{\partial x}$ *y* $\frac{\partial f}{\partial y}$ *en un entorno de A y en el propio punto A.*

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{3ye^{z-1}+2x}{3xye^{z-1}+2z}\Bigg|_A = 1 \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(A) = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{3xe^{z-1}+2y}{3xye^{z-1}+2z}\Bigg|_A = -1 \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(A) = -1$$

4. *Calcula la derivada direccional de* $f(x,y)$ *en* $a = (-1,1)$ *según la dirección* $u = (2,-3)$.

$$D_u(f(a)) = Df(a)\cdot u/\|u\| = \begin{pmatrix}1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{13}} =$$

$\|u\| = \sqrt{13}$

$$= 5/\sqrt{13}$$

5. *Escribe, si es posible, la ecuación del plano tangente a la superficie definida por la ecuación* $F(x,y,z) = 0$ *en el punto A.*

$\vec{n} = (1,-1,-1) \quad \vec{v} = (x+1,\ y-1,\ z-1)$

$0 = \langle \vec{n}, \vec{v} \rangle = x+1-y+1-z+1 = 0$

$x-y-z+3=0$

Opcional: z_{xx} Derivando 2 veces $F''_{xx} = 0$ y sustituyendo obtenemos la ecuación:

$-2z_{xx}+14 = 0 \Rightarrow z_{xx} = 7$

Problema 2 (5 ptos.) **Usar el método de los coeficientes indeterminados de Lagrange.**

1. *Dado el elipsoide de ecuación* $(x-1)^2 + y^2 + 2(z-3)^2 = 4$, *encuentra, si existen, los puntos más cercanos y alejados del punto* $(1,1,3)$.

d– distancia al cuadrado!

Usamos Lagrange:

$$L = \underbrace{(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z-3)^2}_{d(x,y,z)} + \lambda\left((x-1)^2 + y^2 + 2(z-3)^2 - 4\right)$$

1) $\frac{\partial L}{\partial x} = 2(x-1) + 2\lambda(x-1) = 2(x-1)(\lambda+1) = 0$

2) $\frac{\partial L}{\partial y} = 2(y-1) + 2\lambda y = 0$

3) $\frac{\partial L}{\partial z} = 2(z-3) + 4\lambda(z-3) = 2(z-3)(2\lambda+1) = 0$

4) $\rightarrow (x-1)^2 + y^2 + 2(z-3)^2 = 4$ La ligadura.

de 1) $\cancel{\lambda = -1}$ $\Rightarrow$ uso 2) $\cancel{-2 = 0}$

de 1) $x = 1$, de 3) $\lambda = -1/2$ 2) $\Rightarrow y = 2$ y la ligadura

$y^2 = 4 \Rightarrow y = \pm 2$

$A(1,2,3)$ $B(1,-2,3)$

de 3) $z=3$, pero $\Rightarrow$ pto A y B que ya encontramos.

$d(A)=1 < d(B)=9$

Como d es cont. sobre el elipsoide que es un compacto, el T. Weierstrass $\exists$ máx y mín. absoluto. $\Rightarrow$

A se alcanza mín absoluto $\to$ pto mínima distancia

B se alcanza el máx. abs. $\to$ pto máxima distancia

2. *Sea* $f:\mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, $f(x,y)=3x^2-2y^2-3y+1$.

2a. *Decide si* f *tiene puntos críticos en* $\mathbb{R}^2$ *y en caso de que los tenga clasifícalos.*

$\frac{\partial f}{\partial x}=6x=0$, $\frac{\partial f}{\partial y}=-4y-3=0$ pto crítico $(0,-3/4)$

$H_f=\begin{pmatrix}6 & 0\\ 0 & -4\end{pmatrix} \to$ autovalores de signos distintos $\Rightarrow$ pto silla.

2b. *Encuentra,* ***usando el método de Lagrange****, todos los puntos críticos de* f *sobre la elipse* $T: 6x^2+y^2-9=0$ *y decide si son extremos o puntos silla.*

$$L = 3x^2 - 2y^2 - 3y + 1 + \lambda(6x^2 + y^2 - 9)$$

1) $\dfrac{\partial L}{\partial x} = 6x(1+2\lambda) = 0$ 2) $\dfrac{\partial L}{\partial y} = -4y - 3 + 2\lambda y = 0$

3) $6x^2 + y^2 = 9$ (lig).

1) $\to x = 0 \Rightarrow$ 3) $y = \pm 3$ $A(0,3)$ $B(0,-3)$

$\to \lambda = -1/2$ 2) $-5y - 3 = 0 \Rightarrow y = -3/5$

Usamos 3) $6x^2 + \dfrac{9}{25} = 9 \Rightarrow x^2 = \dfrac{36}{25} \Rightarrow x = \pm\dfrac{6}{5}$

$C(6/5, -3/5)$ $D(-6/5, -3/5)$

$f(A) = -26$, $f(B) = -8$ $f(C) = f(D) = \dfrac{32}{5}$

* Como f es cont. sobre la elipse que es un compacto, el T. Weierstrass $\exists$ máx mín. absoluto. $\Rightarrow$ A se alcanza mín abs, en C y D max. absoluto

¿Qué es B?

$$H_L(B) = \begin{pmatrix} 12\lambda + 6 & 0 \\ 0 & 2\lambda - 4 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$d^2L = 6(2\lambda+1)dx^2 + 2(\lambda-2)dy^2$$

En B. tomamos la dif. de la ligadura. $12x\,dx + 2y\,dy = 0$

$\Rightarrow (0,-3) \Rightarrow \quad -6dy = 0 \Rightarrow dy = 0 \Rightarrow$

$$d^2L = 6(2\lambda+1)dx^2$$

Para calcular λ usamos 2)

$$2\lambda\cdot(-3) + 12 - 3 = 0 \qquad -6\lambda + 9 = 0 \qquad \lambda = 3/2 > 0$$

$\Rightarrow d^2L > 0 \quad (= 24\,dx^2) \Rightarrow$ Mínimo local!!

Máximos locales: C y D $(6/5, -3/5)$ $(-6/5, -3/5)$ ...

Mínimos locales: A y B, $(0,3)$, $(0,-3)$...

Puntos silla: ____, No, ____ ...

max abs C y D

min abs A

¿Tiene f extremos absolutos sobre T? Sí. *Justifica la respuesta y en su caso encuéntralos razonadamente.* T. Weierstrass (ver $*$)

GRUPO C

Problema 1 (3 ptos.) *Sea la ecuación*

$$F(x,y,z) = 3\,(x-1)\,(y-1)\,e^{z-1} + \left(y^2+x^2\right)\,z + \alpha\,.$$

1. *¿Para qué valores de a la ecuación anterior define una función $z = f(x,y)$ en el entorno U del punto $A = (1,1,1)$? Justifica la respuesta.* Valor de α ______.
2. *¿Cuántas veces podemos derivar la función resultante $z = f(x,y)$ en el entorno U del punto A? Justifica la respuesta. Nº de veces:* ______.

$F(A) = 0 = 2z + \alpha \Big|_A = 2 + \alpha \Rightarrow \alpha = -2$

$F'_z(A) = 3(x-1)(y-1)e^{z-1} + x^2 + y^2 \Big|_A = 2 \neq 0$

$F \in C^\infty(U(A))$ (de hecho es C^∞ en $\mathbb{R}^3$)

$\Rightarrow$ T.F.I $\exists\ z = f(x,y)$ en un entorno de $U(A)$

tal que $F(x,y,z(x,y)) = 0$ en dicho entorno

y $z = f(x,y) \in C^\infty(U(a))$ $a = (1,1)$.

$F'_x = 3(y-1)e^{z-1} + 2xz$

$F'_y = 3(x-1)e^{z-1} + 2yz$

3. *Calcula las derivadas parciales* $\frac{\partial f}{\partial x}$ *y* $\frac{\partial f}{\partial y}$ *en un entorno de A y en el propio punto A.*

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{3(y-1)e^{z-1}+2xz}{3(x-1)(y-1)e^{z-1}+x^2+y^2}\Bigg|_A = -1 \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(A) = -1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{3(x-1)\,e^{z-1}+2yz}{3(x-1)(y-1)e^{z-1}+x^2+y^2}\Bigg|_A = -1 \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(A) = -1$$

4. *Calcula la derivada direccional de* $f(x, y)$ *en* $a = (1, 1)$ *según la dirección* $u = (2, -3)$.

$$D_u(f(a)) = Df(a)\cdot v\cdot\frac{1}{\|v\|} = \begin{pmatrix}-1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{13}}$$

$$= 1/\sqrt{13}$$

5. *Escribe, si es posible, la ecuación del plano tangente a la superficie definida por la ecuación* $F(x, y, z) = 0$ *en el punto A.*

$$\vec{n} = (-1,-1,-1) \to \vec{n} = (1,1,1) \qquad \vec{v} = (x-1, y-1, z-1) \Rightarrow$$

$$0 = \langle\vec{n},\vec{v}\rangle = x-1+y-1+z-1 = x+y+z-3 = 0$$

Opcional: z_{yy} $\to$ derivando 2 veces $F'_{yy} = 0 \Rightarrow$
y sust. A y z_y,

$$2z_{yy} - 2 = 0 \Rightarrow z_{yy} = 1$$

Problema 2 (5 ptos.) Usar el método de los coeficientes indeterminados de Lagrange.

1. *Dado el elipsoide de ecuación* $(x-1)^2 + 2y^2 + (z-3)^2 = 8$, *encuentra, si existen, los puntos más cercanos y alejados del punto* $(1,3,3)$.

$$L = (x-1)^2 + (y-3)^2 + (z-3)^2 + \lambda\left((x-1)^2 + 2y^2 + (z-3)^2 - 8\right)$$

1) $\dfrac{\partial L}{\partial x} = 2(x-1)(\lambda+1) = 0$ 3) $\dfrac{\partial L}{\partial z} = 2(z-3)(\lambda+1) = 0$

2) $\dfrac{\partial L}{\partial y} = 2(y-3+2\lambda y) = 0$ 4) $\dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = (x-1)^2 + 2y^2 + (z-3)^2 - 8 = 0$

1) $\to$ I, $x=1$ II, $\lambda=-1$ ~~de 2)~~ $y=-3$

3) $\to$ $\cancel{(x-1)^2 + 18 + (z-3)^2 = 8}$ imposible

3) $z=3$ $\lambda \neq -1$

$\Rightarrow$ 4) $2y^2 = 8$ $y = \pm 2$

A $(1,2,3)$ $B = (1,-2,3)$

$d(A) = 1 < d(B) = 25$ T-Weierstrass $\Rightarrow$ A mín abs. y B máx abs

$\Downarrow$

A pto menor distancia y B de mayor distancia

2. *Sea* $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, $f(x, y) = 2x^2 - 3y^2 - 8x + 4$.

2a. *Decide si f tiene puntos críticos en $\mathbb{R}^2$ y en caso de que los tenga clasifícalos.*

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x - 8 = 0 \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -6y = 0 \quad \Rightarrow \quad (2,0)$$

$$H_f = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -6 \end{pmatrix} \Rightarrow$$ pto silla (autovalores de signos distintos)

2b. *Encuentra,* **usando el método de Lagrange**, *todos los puntos críticos de f sobre la elipse $T : 2x^2 + 3y^2 - 8 = 0$ y decide si son extremos o puntos silla.*

$$L = 2x^2 - 3y^2 - 8x + 4 + \lambda(2x^2 + 3y^2 - 8)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 4x - 8 + 4\lambda x = 0 \qquad \frac{\partial L}{\partial y} = 6y(\lambda - 1) \qquad 3)\ 2x^2 + 3y^2 = 8$$

de 2) $\lambda = 1 \Rightarrow$ 1) $x = 1$ y 3) $y^2 = 2 \Rightarrow A(1, \sqrt{2}) \quad B(1, -\sqrt{2})$

de 2) $y = 0 \Rightarrow$ de 3) $x^2 = 4 \Rightarrow C(2, 0) \quad D(-2, 0)$

$f(A) = f(B) = -8$, $f(C) = -4$, $f(D) = 28$

T. Weierstrass (f cont sobre un compacto) $\Rightarrow$

A y B mín. absolutos (luego locales)

D – máx absoluto (luego local)

**

¿ c ? $\quad d^2L = 4(\lambda+1)\,dx^2 + 6(\lambda-1)\,dy^2$

en $C(2,0)$ $\quad 4x\,dx + \cancel{6y}\,dy = 0 \Rightarrow dx = 0$

$ 0$

de 1) $\quad 8\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0 \Rightarrow d^2L = -6dx^2 < 0$

max local

Máximos locales: $C(2,0)$, $D(-2,0)$, ______, ...

Mínimos locales: $A(1,\sqrt{2})$, $B(1,-\sqrt{2})$, ______ ...

Puntos silla: NO ______, ______, ______ ...

¿Tiene f extremos absolutos sobre T? sí. *Justifica la respuesta y en su caso encuéntralos razonadamente.*

T-W. ver **

A y B min. globales (absolutos) y D es max. absoluto.