Problema 1 (3 ptos.) *Sea* $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \mapsto \mathbb{R}$, $f(x,y) = \dfrac{|x|^\alpha \sin(1-2x^2)\arctan(3y)}{\sqrt{x^2+3y^2}}$, $\alpha \geq 0$.

1. *Para qué valores de α existen los siguientes límites y calcúlalos cuando sea posible*

   • $\alpha \in \underline{\alpha > 0}$ $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \underline{0}$ • $\alpha \in \underline{\alpha \geq 0}$ $\lim_{(x,y)\to(1,-1)} f(x,y) = \underline{\frac{+\text{sen}\,1 \,\text{artg}\,3}{2}}$

   $|f| \sim \dfrac{|x|^\alpha |\text{sen}\,1|\,|3y|}{\sqrt{\cancel{x^2}+3y^2}} \leq M|x|^\alpha \dfrac{|\cancel{y}|}{|\cancel{y}|} \longrightarrow 0 \quad \alpha > 0$

   $\alpha = 0 \quad f = \dfrac{\text{sen}(1-2x^2)\,\text{artg}\,3y}{\sqrt{x^2+3y^2}} \qquad y = mx \quad f(x,mx) = \quad x > 0$

   $\dfrac{\text{sen}(1-2x^2)\,\text{artg}\,3mx}{|x|\sqrt{1+3m^2}} \not\to$ NIL.

2. *¿Para algún valor de α se puede definir $f(0,0)$ de forma que f sea continua en $\mathbb{R}^2$? Justifica la respuesta.*

   Si $\alpha > 0$ $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f = 0 = f(0,0)$ f es cont en $\mathbb{R}^2$

$\alpha > 0$

3. *Calcula, si es posible, las derivadas parciales de f en $(0,0)$.*

   $f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \dfrac{\overset{=0}{\cancel{f(h,0)}} - \overset{=0}{\cancel{f(0,0)}}}{h} = 0$

   $f_y(0,0) = \lim_{h\to 0} \dfrac{\cancel{f(0,h)} - \overset{\to 0}{\cancel{f(0,0)}}}{h} = 0$

4. *¿Para que valores de α f es diferenciable en $(0,0)$? Justifica la respuesta y calcula, si existe, la derivada total (diferencial) de f en $(0,0)$.* • $\alpha \in$ _____, $Df(0,0) =$ __________

$\alpha > 0$

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{f(x,y) - \cancel{f(0,0)} - \cancel{Df(0,0)}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}{\sqrt{x^2+y^2}} \overset{?}{\longrightarrow} 0 \qquad \dfrac{|f|}{\sqrt{x^2+y^2}} \simeq$

$\dfrac{|x|^\alpha |\text{sen}\,1|\; 3|y|}{\sqrt{x^2+3y^2}\;\sqrt{x^2+y^2}} \leq \dfrac{|x|^\alpha |\text{sen}\,1|\; 3\;|y|}{x^2+y^2} = \dfrac{|x||y|}{x^2+y^2} |x|^{\alpha-1} 3|\text{sen}\,1| \quad \leq \frac{1}{2}$

$\to 0$ si $\alpha > 1$ ✓ ¿y si $\alpha = 1$?

$\alpha = 1 \qquad \dfrac{f}{\sqrt{x^2+y^2}} = \dfrac{|x| \,\operatorname{sen}(1-2x^2)\, \operatorname{arctg} 3y}{\sqrt{x^2+3y^2}\,\sqrt{x^2+y^2}}$

$y = mx \qquad \dfrac{\cancel{|x|}\, \operatorname{sen}(1-2x^2)\, \operatorname{arctg} 3mx}{\cancel{|x|}\,\sqrt{1+3m^2}\,\sqrt{1+m^2}\,|x|}$

$\sim \dfrac{\operatorname{sen} 1}{\sqrt{1+3m^2}\,\sqrt{1+m^2}} \dfrac{mx}{|x|} \xrightarrow{x \to 0}$ NTL.

$\alpha = 1$

$|f|/\rho \not\to 0$

$z = f(x,y) \qquad (a, b, c)$

$x = a \quad y = b \quad z = c$??

$z = c \to \quad f(a,b) = c$

Problema 2 (4 ptos.) *Sea* $g : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, $g(x,y) = (x-1)^2\, e^{2y} - y\, e^{x^2-1}$.

1. *Decide si* g *es diferenciable en* $\mathbb{R}^2$. *Justifica la respuesta.*

g es dif. en $\mathbb{R}^2$ pues es combinación algebra y composición de funciones difuntibles en $\mathbb{R}^2$

2. *Calcula las derivadas parciales* $\frac{\partial g}{\partial x}$ *y* $\frac{\partial g}{\partial y}$.

$g_x(x,y) = 2(x-1)\, e^{2y} - 2xy e^{x^2-1}$ $\qquad g_x(-1,0) = -4$

$g_y(x,y) = 2(x-1)^2 e^{2y} - e^{x^2-1}$ $\qquad g_y(-1,0) = 7$

$g(-1,0) = 4$

3. *¿Cuánto vale la derivada de* g *en el punto* $A(-1,0)$ *según la dirección del vector* $(2,1)$.

Como g es dif. en $\mathbb{R}^2$ $\Rightarrow$ $D_u g(-1,0) = Dg(-1,0)(u)$

$\|u\| = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$ $\qquad D_u g = \begin{pmatrix} -4 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5}$

4. *Encuentra la dirección de máxima la variación de la función* g *en dicho punto* A. *Encuentra la dirección donde dicha variación es mínima.* **Justifica** *la respuesta.*

Como g es dif. $\Rightarrow$ $D_u g = \langle \nabla f, u \rangle$ $\quad (\|u\|=1)$

$\Rightarrow$ max var $u \parallel \nabla f$ $\quad u = \pm(-4,7)$

min $u \perp \nabla f$ $\quad -v_x 4 + v_y 7 = 0$ con $v = (v_x, v_y)$

5. *Escribe la expresión del plano tangente a la superficie definida por* $w = g(x,y)$ *en* A.

$\vec{n} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, -1\right)$ $\qquad \langle \vec{n}, (x+1, y, z-4) \rangle = 0$

$0 = (-4, 7, -1)(x+1, y, z-4) = -4(x+1) + 7y - z + 4 = 0$

6. *Escribe el polinomio de Taylor de orden 2 en el punto* A.

$P_2(x,y) = f(-1,0) + Df(-1,0)\begin{pmatrix} x+1 \\ y \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(x+1, y) H_g \begin{pmatrix} x+1 \\ y \end{pmatrix}$

$= 4 - 4(x+1) + 7y + (x+1)^2 + 8y^2 + 6y(x+1)$

7. *Opcional* **(no puntúa)**. *Estima el error de la fórmula de Taylor en un entorno de* A *de radio 1.*

$$g = (x-1)^2 e^{2y} - y e^{x^2-1}$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = 2(x-1)e^{2y} - 2xy\, e^{x^2-1} \qquad A(-1,0)$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = 2(x-1)^2 e^{2y} - e^{x^2-1}$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = 2e^{2y} - \cancelto{0}{2ye^{x^2-1}} \cancelto{0}{-2xy(2x)e^{x^2-1}} \Bigg|_A = 2$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 4(x-1)^2 e^{2y} \Bigg|_A = 16$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = 4(x-1)e^{2y} - 2x e^{x^2-1} \Bigg|_A = -8+2 = -6$$

$$H_g = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -6 & 16 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{2}(x+1, y)\begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -6 & 16 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x+1 \\ y \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\, 2(x+1)^2 + \frac{1}{2}\, 16y^2 - \frac{1}{2}\cdot 2(-6)\, y(x+1)$$

$$= (x+1)^2 + 8y^2 + 6(x+1)y$$

Problema 1 (2 ptos.) *Sea* $f(x,y) = \dfrac{|x|^\alpha \log(2+y^2)\arctan(2x)}{\sqrt{x^2+3y^2}}$ *si* $x \neq 0$ *y* β *en otro caso.*

1. *Para que valores de* $\alpha \in \mathbb{R}$ *existen los siguientes límites y calcúlalos cuando sea posible*

   • $\alpha \in$ $\alpha > 0$ $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) =$ 0 • $\alpha \in$ $\mathbb{R}$, $\lim_{(x,y)\to(1/2,0)} f(x,y) =$ $2(1/2)^\alpha \log 2\ \pi$

y^2

$|f| \sim \dfrac{2|x|^\alpha \log 2\ |x|}{\sqrt{x^2+3y^2}} \leq$ $M|x|^\alpha \to 0$ $\alpha > 0$

$x > 0$

$\alpha = 0$ $\dfrac{\log(2+y^2)\operatorname{artg} 2x}{\sqrt{x^2+3y^2}} = \dfrac{\log(2+m^2x^2)\operatorname{artg} 2x}{\sqrt{1+3m^2}\ |x|} \to$ NT; depende de m!

$\log 2$

$y = mx$

2. *¿Para algún valores de* α *y* β *se puede definir* $f(0,0)$ *de forma que* f *sea continua en* $(0,0)$*? Justifica la respuesta. (Opcional: ¿y en* $\mathbb{R}^2$*?)*

Si $\alpha > 0$ y $\beta = 0$ $\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$ }

$a \neq 0$ $\exists \lim_{(x,y)\to(0,a)} f = 0$ $\forall \alpha > -1$ $\forall (0,a)$ $a \neq 0$

3. *Calcula, si es posible, las derivadas parciales de* f *en* $(0,0)$.

$\alpha > 0$

$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(h,0) - \cancel{f(0,0)}^{0}}{h} = \lim_{h\to 0} \dfrac{|h|^{\alpha-1} \log 2\ 2\cancel{h}}{\cancel{|h|}} = \begin{cases} 0 & \alpha > 1 \\ 2\log 2 & \alpha = 1 \end{cases}$

$f_y(0,0) = \lim_{h\to 0} \dfrac{\cancel{f(0,h)}^{0} - \cancel{f(0,0)}^{0}}{h} = 0$

4. *¿Para que valores de* α f *es diferenciable en* $(0,0)$*? Justifica la respuesta y calcula, si existe, la derivada total (diferencial) de* f *en* $(0,0)$. • $\alpha \in$ $\alpha > 1$, $Df(0,0) =$ $(0\ 0)$

$\alpha \geq 1$

$\dfrac{f(x,y) - f(0,0) - Df(0,0)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}{\sqrt{x^2+y^2}} \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{?} 0$ $\alpha > 1$

$\alpha > 1$, $\dfrac{|f|}{\sqrt{x^2+y^2}} \sim \dfrac{|x|^\alpha \log 2 \cdot 2|x|}{\sqrt{x^2+3\cancel{y^2}}\ \sqrt{x^2+\cancel{y^2}}} \leq 2\log 2 \cdot |x|^{\alpha-1} \to 0$

$$\frac{|x|^{\alpha}\log(2+y^2)\,\operatorname{arctg}(2x)}{\sqrt{x^2+3y^2}} \to 0 \qquad (0,a) \quad a\neq 0$$

$\forall \alpha > -1$

$$f \sim 2\log(2+a^2)\,|x|^{\alpha}\,\frac{x}{\sqrt{\cancel{x^2+3y^2}}} \qquad \sqrt{3a^2}$$

$\alpha > -1$

$$|f| \approx \frac{2\log(2+a^2)\,|x|^{\alpha+1}}{\sqrt{3}\,|a|} \to 0$$

$\alpha = -1$ $\quad \dfrac{x}{|x|} \nexists$ N.T.L.

$\alpha = 1$

$$\frac{\dfrac{|x|\log(2+y^2)\,\operatorname{arctg} 2x}{\sqrt{x^2+3y^2}} - 2\log 2\cdot x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$y = mx$

$$\frac{|x|\,2x\,\log 2}{|x|^2(1+3m^2)^{1/2}\sqrt{1+m^2}}$$

$$-\frac{2\log 2\cdot x}{|x|\sqrt{1+m^2}} \xrightarrow{x\to 0} \text{N.T.L.}$$

(dep de m)

Problema 2 (4 ptos.) *Sea* $g : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, $g(x,y) = x^2\, e^{y-1} + e^{x+1}\, y^2 + 4\,x\,y$.

1. *Decide si g es diferenciable en $\mathbb{R}^2$. Justifica la respuesta.*

g es composic. y comb. algebraica de func. diferenciables en $\mathbb{R}^2$ → g es dif en $\mathbb{R}^2$

2. *Calcula las derivadas parciales $\frac{\partial g}{\partial x}$ y $\frac{\partial g}{\partial y}$.*

$g_x(x,y) = 2x e^{y-1} + y^2 e^{x+1} + 4y$

$g_y(x,y) = x^2 e^{y-1} + 2y e^{x+1} + 4x$

$g_x(-1,1) = 3$

$g_y(-1,1) = -1$

$g(-1,1) = -2$

3. *¿Cuánto vale la derivada de g en el punto $A(-1,1)$ según la dirección del vector $(3,4)$.*

$g \in C^1(\mathbb{R}^2)$ $D_u g(A) = (3,-1)\cdot(3,4)\frac{1}{5} = 1$

4. *Encuentra la dirección de máxima la variación de g en dicho punto A. Encuentra la dirección donde dicha variación es mínima.* **Justifica** *la respuesta.*

$g \in C^1(\mathbb{R}^2) \Rightarrow$ $D_u f = \langle \nabla f, u \rangle$, $\|u\| = 1$

max $u \Rightarrow u \parallel \nabla f$ $u = \pm(3,-1)$

min (u_x, u_y) $u \perp \nabla f$ $3u_x - u_y = 0$

5. *Escribe la expresión para el plano tangente a la superficie definida por $z = g(x,y)$ en A?*

$\vec{n} = (3,-1,-1)$ $\langle \vec{n} \cdot (x+1, y-1, z+2) \rangle = 0$

$3(x+1) - y + 1 - z - 2 = 0$ $3x - y - z + 2 = 0$

6. *Escribe el polinomio de Taylor de orden 2 en el punto A.*

$$g(x,y) = g(-1,1) + Dg(-1,1)\begin{pmatrix} x+1 \\ y-1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x+1 & y-1 \end{pmatrix} H_g \begin{pmatrix} x+1 \\ y-1 \end{pmatrix}$$

$$= -2 + 3(x+1) - (y-1) + \frac{3}{2}(x+1)^2 + \frac{3}{2}(y-1)^2 +$$

$$+ 4(x+1)(y-1)$$

$A(-1,1)$

$$g_x = 2xe^{y-1} + y^2 e^{x+1} + 4y$$

$$g_y = x^2 e^{y-1} + 2y e^{x+1} + 4x$$

$$g_{xx} = 2e^{y-1} + y^2 e^{x+1} \Big|_A = 3$$

$$g_{yy} = x^2 e^{y-1} + 2e^{x+1} \Big|_A = 3$$

$$g_{xy} = 2xe^{y-1} + 2ye^{x+1} + 4 \Big|_A = 4$$

$$H = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} x+1 & y-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x+1 \\ y-1 \end{pmatrix} = \frac{3(x-1)^2}{2} + \frac{3(y-1)^2}{2}$$

$$+ 4(x+1)(y-1)$$