Problema 1 (3 ptos.) *Sea* $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(\alpha, 0)\} \mapsto \mathbb{R}$, $f(x,y) = \dfrac{|y|^{\alpha} e^{x^2-1} \sin(4y)}{\sqrt{x^2+4y^2}}$, ~~$\alpha \geq 0$.~~ $\alpha \in \mathbb{R}$

1. *Para que valores de* α *existen los siguientes límites y calcúlalos cuando sea posible*

   • $\alpha \in$ $\alpha > 0$ $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) =$ 0 • $\alpha \in$ $\alpha \geq 0$ $\lim_{(x,y)\to(1,-1)} f(x,y) =$ $\frac{-\operatorname{sen} 4}{\sqrt{5}}$

$$|f| \sim \frac{|y|^{\alpha}}{e} \frac{4|y|}{\sqrt{\cancel{x^2}+4y^2}} \leq \frac{4}{2e} |y|^{\alpha} \to 0 \quad \alpha > 0$$

$$\alpha = 0 \quad f \sim \frac{1}{e} \frac{4y}{\sqrt{x^2+4y^2}} = \frac{4}{e} \frac{m x}{\sqrt{1+4m^2}\,|x|} \to \text{N.T.L depende de } m$$

$x > 0$

$y = mx$

2. *¿Para algún valor de* α *se puede definir* $f(0,0)$ *de forma que* f *sea continua en* $\mathbb{R}^2$? *Justifica la respuesta.*

$\alpha > 0$ Si, pues $\exists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f = 0 = f(0,0)$ ✓ $\{(a,0)$ $\alpha > -1$

$\boxed{\alpha > 0}$

3. *Calcula, si es posible, las derivadas parciales de* f *en* $(0,0)$.

$f_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = 0$ $\quad f(a,0) = 0 \quad \forall a$

$f_y(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|^{\alpha-1} e^{-1} 4 \cancel{h}}{2|\cancel{h}|\,\cancel{h}} = \begin{cases} 0, & \alpha > 1 \\ \frac{2}{e} & \alpha = 1 \end{cases}$

4. *¿Para que valores de* α f *es diferenciable en* $(0,0)$? *Justifica la respuesta y calcula, si existe, la derivada total (diferencial) de* f *en* $(0,0)$. • $\alpha \in$ $\alpha > 1$, $Df(0,0) =$ $(0\ 0)$

$$\frac{f(x,y) - f(0,0) - Df(0,0)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}{\sqrt{x^2+y^2}} \xrightarrow{?} 0$$

$$\alpha > 1 \quad \frac{|f|}{\sqrt{x^2+y^2}} \sim \frac{|y|^{\alpha} e^{-1} 4|y|}{\sqrt{\cancel{x^2}+4y^2}\,\sqrt{\cancel{x^2}+y^2}} \leq M |y|^{\alpha-1} \to 0$$

$(a,0) \quad f \sim \dfrac{|y|^{\alpha} e^{a^2-1}\, 4y}{\sqrt{a^2+4y^2}}$

$\alpha > -1$

$|y|^{\alpha} y \to 0$

$\alpha+1 > 0 \qquad \alpha > -1$

$||y|^{\alpha} y| = |y|^{\alpha+1} \to 0$

$\alpha > -1$

$\alpha = -1 \Rightarrow \dfrac{y}{|y|} \not\to$ NTL.

Dif. $\alpha = 1$

$$g = \frac{|y|\, e^{x^2-1} \sin 4y}{\sqrt{x^2+4y^2}\sqrt{y^2+y^2}} - \frac{2}{e}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$y = mx$

$x \to 0$

$$g \sim \frac{|m\cancel{x}|\, e^{-1}\, 4mx}{|\cancel{x}|\sqrt{1+4m^2}\,|x|\sqrt{1+m^2}} - \frac{2}{e}\frac{mx}{|x|\sqrt{1+m^2}}$$

$\to$ NTL

dep. de m

Problema 2 (4 ptos.) *Sea $g : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, $g(x,y) = \pi x^2 e^y + (y+1)\sin(\pi x)$.*

1. *Decide si g es diferenciable en $\mathbb{R}^2$. Justifica la respuesta.*

Si, pues es combinación algebraica y composic. de funcs diferenciables

2. *Calcula las derivadas parciales $\frac{\partial g}{\partial x}$ y $\frac{\partial g}{\partial y}$.*

$g_x(x,y) = 2\pi x e^y + \pi(y+1)\cos \pi x$

$g_y(x,y) = \pi x^2 e^y + \operatorname{sen} \pi x$

$g_x(1,0) = \pi$

$g_y(1,0) = \pi$

$g(1,0) = \pi$

3. *¿Cuánto vale la derivada de g en el punto $A(1,0)$ según la dirección del vector $(1,-2)$.*

$D_u f(A) = Df(A)(u) = \begin{pmatrix} \pi & \pi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{-\pi}{\sqrt{5}} = \frac{-\pi\sqrt{5}}{5}$

4. *Encuentra la dirección de máxima la variación de g en dicho punto A. Encuentra la dirección donde dicha variación es mínima.* **Justifica** *la respuesta.*

f · es dif $\Rightarrow$ $D_u f = \langle \nabla f . u \rangle$ $\quad \|u\| = 1$

u max corresponde $u \parallel \nabla f$ $\quad u = \pm(\pi, \pi)$

u min corresp. $u \perp \nabla f$ $\quad u = (u_x, u_y) \Rightarrow u_x + u_y = 0$

5. *Escribe la expresión del plano tangente a la superficie definida por $z = g(x,y)$ en A.*

$(1, 0, \pi)$, $\pi = g(1,0)$

$\vec{u} = (\pi, \pi, -1)$ $\quad 0 = \langle \vec{u}, (x-1, y, z-\pi) \rangle = 0$

$\pi(x-1) + \pi y - z + \pi = 0$ $\quad \pi x + \pi y - z = 0$

6. *Escribe el polinomio de Taylor de orden 2 en el punto A.*

$g(x,y) = g(1,0) + Dg(1,0)\begin{pmatrix} x-1 \\ y \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(x-1 \ \ y) H_g \begin{pmatrix} x-1 \\ y \end{pmatrix}$

$= \pi + \pi(x-1) + \pi y + \pi(x-1)^2 + \frac{\pi}{2} y^2 + \pi(x-1)y$

7. *Opcional* **(no puntúa)**. *Estima el error de la fórmula de Taylor en un entorno de A de radio 1.*

$$g_x = 2\pi x e^y + \pi(y+1)\cos\pi x \qquad A(1,0)$$

$$g_y = \pi x^2 e^y + \sin\pi x$$

$$g_{xx} = 2\pi e^y - \pi^2(y+1)\sin\pi x \Big|_A = 2\pi$$

$$g_{yy} = \pi x^2 e^y \Big|_A = \pi$$

$$g_{xy} = 2\pi x e^y + \pi\cos\pi x \Big|_A = \pi$$

$$H_g = \begin{pmatrix} g_{xx} & g_{xy} \\ g_{yx} & g_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\pi & \pi \\ \pi & \pi \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{2}(x-1 \;\; y)\begin{pmatrix} 2\pi & \pi \\ \pi & \pi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-1 \\ y \end{pmatrix} =$$

$$\pi(x-1)^2 + \frac{\pi}{2}y^2 + \pi y(x-1)$$

Problema 1 (2 ptos.) *Sea* $f(x,y) = \dfrac{|x|^\alpha e^{xy}\sin(2y)}{\sqrt{5x^2+y^2}}$ *si* $x \neq 0$ *y* β *en otro caso.* $(0,a)$

1. *Para que valores de* $\alpha \in \mathbb{R}$ *existen los siguientes límites y calcúlalos cuando sea posible*

   • $\alpha \in$ $\alpha>0$ $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) =$ 0 • $\alpha \in$ $\mathbb{R}$ $\lim_{(x,y)\to(1,0)} f(x,y) =$ 0

$$|f| \sim \frac{|x|^\alpha 2|y|}{\sqrt{5\cancel{x^2}+y^2}} \leq 2|x|^\alpha \longrightarrow 0 \qquad \alpha>0$$

$\alpha=0$ $$f \sim \frac{2y}{\sqrt{5x^2+y^2}} = \frac{2mx}{\sqrt{5m^2+1}\;|x|} \quad \nexists \text{ por dep. de } m$$

$y=mx$ $\qquad x>0$

2. *¿Para algún valores de* α *y* β *se puede definir* $f(0,0)$ *de forma que* f *sea continua en* $(0,0)$*? Justifica la respuesta. (Opcional: ¿y en* $\mathbb{R}^2$*?)*

Si, porque $\exists \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0) = \beta$

opcional después del todo x $\qquad \alpha>0$

3. *Calcula, si es posible, las derivadas parciales de* f *en* $(0,0)$.

$\alpha>0$

$$f_x(0,0) = \lim_{h\to0} \frac{\cancel{f(h,0)}^{0} - \cancel{f(0,0)}^{0}}{h} = 0$$

$$f_y(0,0) = \lim_{h\to0} \frac{f(0,h)^{0} - f(0,0)^{0}}{h} = 0$$

4. *¿Para que valores de* α f *es diferenciable en* $(0,0)$*? Justifica la respuesta y calcula, si existe, la derivada total (diferencial) de* f *en* $(0,0)$. • $\alpha \in$ $\alpha>1$, $Df(0,0) =$ $(0,0)$

$$\left| \frac{f(x,y) - \cancel{f(0,0)}^{0} - \cancel{Df(0,0)}^{0}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}{\sqrt{x^2+y^2}} \right| \xrightarrow{?} 0$$

$$|\,| \sim \frac{|x|^\alpha 2|y|}{\sqrt{5\cancel{x^2}+y^2}\,\sqrt{x^2+\cancel{y^2}}} \leq 2|x|^{\alpha-1} \longrightarrow 0 \qquad \alpha>1$$

$$\leq \frac{|x|^\alpha 2|y|}{x^2+y^2}$$

$$\alpha=1 \quad f/r \sim \frac{2|x|\,y}{\sqrt{5x^2+y^2}\,\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{2|x|\,mx}{\sqrt{5+m^2}\sqrt{1+m^2}\;x^2} \nrightarrow 0$$

$y=mx \qquad x>0$

$(0, a) \qquad a \neq 0$

$2a = k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

$$f \sim \frac{|x|^{\alpha} \, | \, \text{sen}\, 2a}{\sqrt{5x^2 + a^2}}$$

$\left(0, \frac{k\pi}{2}\right) \quad f = 0$

$\alpha > 0 \qquad f \to 0 \qquad (0, a)$

$$\alpha = 0 \qquad \frac{\text{sen}\, 2a}{|a|}$$

Problema 2 (4 ptos.) *Sea* $g : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, $g(x, y) = \frac{1}{4}(x + y)^2 \exp(x + y - 2)$ $= \frac{1}{2}(x+y)^2 e^{x+y-2}$

1. *Decide si g es diferenciable en $\mathbb{R}^2$. Justifica la respuesta.*

Si pues g es combinación algeb. y composic. de funciones difenbles ($g \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$)

2. *Calcula las derivadas parciales $\frac{\partial g}{\partial x}$ y $\frac{\partial g}{\partial y}$.*

$g_x(x, y) = \frac{1}{2}(x+y)e^{x+y-2} + \frac{1}{4}(x+y)^2 e^{x+y-2} = \left[\frac{(x+y)^2}{2} + x+y\right]\frac{e^{x+y-2}}{2}$

$\parallel$

$g_y(x, y) = \left[\frac{(x+y)^2}{2} + x+y\right]\frac{e^{x+y-2}}{2}$

$g_x(A) = 2$ $g(A) = 1$

$g_y(A) = 2$

3. *¿Cuánto vale la derivada de g en el punto $A(2, 0)$ según la dirección del vector $(-4, 3)$.*

$D_u f(A) = Df(A)(u) = (2\ 2)\begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix}\frac{1}{5} = -\frac{2}{5}$

$\|u\| = 1$

4. *Encuentra la dirección de máxima la variación de g en dicho punto A. Encuentra la dirección donde dicha variación es mínima.* **Justifica** *la respuesta.*

Como $g \in C^\infty(\mathbb{R}^2) \Rightarrow D_u g(A) = \langle \nabla g, u\rangle$ $\|u\| = 1$

D_u max $\Rightarrow u \parallel \nabla g$ $u = \pm(2, 2)$

D_u min $\Rightarrow u \perp \nabla g$ $u = (u_x, u_y)$ $u_x + u_y = 0$

5. *Escribe la expresión para el plano tangente a la superficie definida por $z = g(x, y)$ en el punto A?*

$\vec{n} = (2, 2, -1)$ $0 = \langle n, (x-2, y, z-1)\rangle =$

$= 2(x-2) + 2y - z + 1 = 0$ $2x + 2y - z - 3 = 0$

6. *Escribe el polinomio de Taylor de orden 2 en el punto A.* $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$

$f(x,y) = f(2,0) + Df(2,0)\begin{pmatrix}x-2\\y\end{pmatrix} + \frac{1}{2}(x-2\ \ y)H_f\begin{pmatrix}x-2\\y\end{pmatrix}$

$= 1 + 2(x-2) + 2y + \frac{7}{4}(x-2)^2 + \frac{7}{4}y^2 + \frac{7}{2}(x-2)y$

$$g_x = \left[\frac{(x+y)^2}{2} + (x+y)\right]\frac{e^{x+y-2}}{2}$$

$$g_y = \quad ''$$

$$g_{xx} = (x+y+1)\frac{e^{x+y-2}}{2} + \left[\frac{(x+y)^2}{2} + x+y\right]\frac{e^{x+y-2}}{2}\Bigg|_A$$

$$= \frac{3}{2} + 2 = \frac{7}{2}$$

$$g_{yy} = \frac{7}{2} \quad (\text{por simetría})$$

$$g_{xy} = \frac{7}{2} \quad \text{por simetría}$$

$$H_g = \frac{7}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\frac{7}{2}\,\frac{1}{2}(x-2 \quad y)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-2 \\ y \end{pmatrix} =$$

$$\frac{7}{4}(x-1)^2 + \frac{7}{4}y^2 + \frac{7}{2}(x-2)y$$

$$A = (0,0)$$

$$D^3 f = D(D^2 f) = D\left(g_{xx}x^2 + 2g_{xy}xy + g_{yy}y^2\right)$$

$$\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

$$\left(h_x\frac{\partial}{\partial x} + h_y\frac{\partial}{\partial y}\right)^3 f(x,y) = D\,($$

$-$

$$x\left(g_{xxx}\,x^2 + 2g_{xxy}\,xy + g_{xyy}\,y^2 \right)$$
$$+\, y\left(g_{xxy}\,x^2 + 2g_{xyy}\,xy + g_{yyy}\,y^2 \right)\Big|_A$$