$\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha-1} \log 2 \ \text{arctg}(1) = \pi/4$

Problema 1 (2 3 ptos.) *Sea* $f(x,y) = \dfrac{|x|^\alpha \log(2+y^2)\arctan(2x)}{\sqrt{x^2+3y^2}}$ *si* $x \neq 0$ *y* β *en otro caso.*

1. *Para que valores de* $\alpha \in \mathbb{R}$ *existen los siguientes límites y calcúlalos cuando sea posible*

   $\bullet\, \alpha \in$ ____ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) =$ ________ $\bullet\, \alpha \in$ ____ $\lim\limits_{(x,y)\to(1/2,0)} f(x,y) = (1/2)^{\alpha+1}\pi \log 2$

$$f \sim \frac{|x|^\alpha \log 2 \cdot 2x}{\sqrt{x^2+3y^2}} \qquad |f| \le \frac{M|x|^{\alpha+1}}{\sqrt{x^2+y^2}} < M|x|^\alpha \to 0 \quad \alpha>0$$

$$\alpha = 0. \quad f \sim \frac{2x\log(2+y^2)}{\sqrt{x^2+3y^2}} \quad \{y = mx\} \sim \frac{2x \log 2}{|x|\sqrt{1+3m^2}} \not\to \quad \text{N.T.L}$$

2. *¿Para algún valores de* α *y* β *se puede definir* $f(0,0)$ *de forma que* f *sea continua en* $(0,0)$*? Justifica la respuesta. (Opcional: ¿y en* $\mathbb{R}$*?)*

$$\alpha > 0 \quad y \quad \beta = 0$$

3. *Calcula, si es posible, las derivadas parciales de* f *en* $(0,0)$. $\alpha > 0$

$f_x(0,0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x,0)-\cancel{f(0,0)}^{0}}{x} = \lim \dfrac{|x|^\alpha \log 2 \ \text{arctg}\, 2x}{|x|\, x} = \begin{cases} 0, & \alpha>1 \\ 2\log 2, & \alpha=1 \end{cases}$

$f_y(0,0) = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{\cancel{f(0,y)}^{0} - f(0,0)}{y} = 0$

4. *¿Para que valores de* α f *es diferenciable en* $(0,0)$*? Justifica la respuesta y calcula, si existe, la derivada total (diferencial) de* f *en* $(0,0)$. $\bullet\, \alpha \in$ ____, $Df(0,0) =$ ________

Diferenciabilidad depende de α. Si $\alpha > 1$ entonces

$$\left|\frac{f(x,y) - \cancel{f(0,0)}^{0} - \cancel{Df(0,0)\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}}^{0}}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \sim \left|\frac{|x|^\alpha 2\log 2 \cdot 2x}{\sqrt{x^2+3y^2}\sqrt{x^2+y^2}}\right| \le M|x|^{\alpha-1} \to 0$$

Si $\alpha = 1$

$$\frac{\dfrac{2\log 2 |x|\, x}{\sqrt{x^2+3y^2}} - 2\log 2 \cdot x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{2\log 2\, x}{\sqrt{x^2+y^2}}\left[\frac{|x|}{\sqrt{x^2+3y^2}} - 1\right] \ (y = mx)$$

$$= \frac{2\log 2\, x}{\sqrt{1+m^2}\,|x|}\left[\frac{\cancel{|x|}}{\cancel{|x|}\sqrt{1+3m^2}} - 1\right] \longrightarrow \text{N.T.L.}$$

Problema 2 (4 ptos.) *Sea $g : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, $g(x,y) = x^2\, e^{y-1} + e^{x+1}\, y^2 + 4\, x\, y$.*

1. *Decide si g es diferenciable en $\mathbb{R}^2$. Justifica la respuesta.*

$g(-1,1) = -2$

g es composición y combinación algebraica de funciones diferenciables bien definidas en $\mathbb{R}^2$.

2. *Calcula las derivadas parciales $\frac{\partial g}{\partial x}$ y $\frac{\partial g}{\partial y}$.*

$g_x(x,y) = 2xe^{y-1} + e^{x+1}y^2 + 4y \Big|_A = 3$

$g_y(x,y) = x^2e^{y-1} + 2ye^{x+1} + 4x \Big|_A = -1$

3. *¿Cuánto vale la derivada de g en el punto $A(-1,1)$ según la dirección del vector $(3,4)$.*

$\|u\| = 5$ $\qquad D_u f(A) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \frac{1}{5} = \frac{9-4}{5} = 1$

4. *Encuentra la dirección de máxima la variación de g en dicho punto A. Encuentra la dirección donde dicha variación es mínima.* ***Justifica*** *la respuesta.*

dir max $\lambda(3,-1)$ $\qquad$ dir mínima $3d_x - d_y = 0$

$3d_x = d_y$ $\qquad \lambda(1,3)$

5. *Escribe la expresión para el plano tangente a la superficie definida por $z = g(x,y)$ en A?*

$\bar{n} = (3,-1,-1)$ $\qquad v = (x+1, y-1, z+2)$

$0 = 3(x+1) - (y-1) - (z+2) = \boxed{3x - y - z + 2 = 0}$

6. *Escribe el polinomio de Taylor de orden 2 en el punto A.*

$$Hg = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$f = -2 + (3,-1)\begin{pmatrix} x+1 \\ y-1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x+1 & y-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x+1 \\ y-1 \end{pmatrix}$$

$$= -2 + 3(x+1) - (y-1) + \frac{3}{2}(x+1)^2 + \frac{3}{2}(y-1)^2 + 4(x-1)(y+1)$$

$$= 3x^2/2 + 3y^2/2 + 4xy + 2x + 1$$

Problema 1 (2.~~5~~3 ptos.) *Sea la ecuación*

$$F(x,y,z) = \alpha\, e^{z-2} + \left(x^2 - y^2\right)\, z^2 + y^2\, z = 0.$$

1. *¿Para qué valores de α la ecuación anterior define una función $z = f(x,y)$ en el entorno U del punto $A = (-1,1,2)$? Justifica la respuesta.* *Valor de α* -2.

$\alpha = -2$ $\qquad F'_z = -2e^{z-2} + 2z(x^2-y^2) + y^2 \Big|_A = -1$

$F(A) = 0 \iff \alpha = -2,$

2. *¿Cuántas veces podemos derivar la función resultante $z = f(x,y)$ en el entorno U del punto A? Justifica la respuesta. Nº de veces:* ∞.

$F \in C^\infty(\mathbb{R}^3) \Rightarrow z = f(x,y) \in C^\infty(U(-1,1))$.

por el T.F.I.

3. *Calcula las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ en un entorno de A y en el propio punto A.*

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{2xz^2}{-2e^{z-2} + 2z(x^2-y^2) + y^2}\Bigg|_A = -\frac{-8}{-1} \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(A) = -8$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{-2yz^2 + 2yz}{-2e^{z-2} + 2z(x^2-y^2) + y^2}\Bigg|_A = -\frac{-4}{-1} \qquad \frac{\partial f}{\partial x}(A) = -4$$

4. *Calcula la derivada direccional de $f(x,y)$ en $a = (-1,1)$ según la dirección $u = (1,-3)$.*

$$D_u(f(a)) = \begin{pmatrix} -8 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{4}{\sqrt{10}} \qquad \|u\| = \sqrt{10}$$

5. *Escribe, si es posible, la ecuación del plano tangente a la superficie definida por la ecuación $F(x,y,z) = 0$ en el punto A.*

$\vec{n} = (-8, -4, -1) \rightarrow (8\ 4\ 1)(x+1, y-1, z-2) =$

$8(x+1) + 4(y-1) + (z-2) = 0 = \boxed{8x + 4y + z + 2 = 0}$

6. *Encuentra el valor de z_{xy} en el punto A.*

$\boxed{z_{xx} = 8}$ $\qquad \boxed{z_{xy} = 16}$

$\boxed{z_{yy} = 12}$

$4x^2 + 6y^2 + 16xy$

$-16x - 8$

Polinomio de Taylor

5

Problema 2 (3.5 ptos.) Usar el método de los coeficientes indeterminados de Lagrange.

1. *Dado el elipsoide de ecuación* $(x-1)^2 + 4y^2 + (z-2)^2 = 1$, *encuentra, si existen, los puntos más cercanos y alejados del punto* $(1, 2, 2)$.

$$L = (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-2)^2 + \lambda\left((x-1)^2 + 4y^2 + (z-2)^2 - 1\right)$$

1) $\frac{\partial L}{\partial x} = 2(x-1) + 2\lambda(x-1) = 2(x-1)(\lambda+1) = 0$

2) $\frac{\partial L}{\partial y} = 2(y-2) + 8\lambda y = 0$

3) $\frac{\partial L}{\partial z} = 2(z-2) + 2\lambda(z-2) = 2(z-2)(\lambda+1) = 0$

4) $(x-1)^2 + 4y^2 + (z-2)^2 = 1$

1) $x = 1$ o $\cancel{\lambda = -1}$

3) $z = 2$

4) $\Rightarrow 4y^2 = 1 \quad y = \pm 1/2$

MAX: $\boxed{A(1, -1/2, 2)}$ MIN: $\boxed{B(1, 1/2, 2)}$

$d(A) = (2 + 1/2)^2 > (2 - 1/2)^2 = d(B)$

Si $\lambda = -1$ 2) $2y - 4 - 8y = 0$

$-6y - 4 = 0 \quad y = -2/3$

$(x-1)^2 + 4 \cdot \frac{4}{9} + (z-2)^2 = 1$

$(x-1)^2 + (z-2)^2 = 1 - \frac{16}{9} < 0$

$\boxed{\text{imposible}}$

A - máx B mín pues por el T. de Weierstrass d es continua sobre el elipsoide que es un cerrado y acotado.

2. *Sea* $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2 + 8x - 3y^2 + 1$.

2a. *Decide si f tiene puntos críticos en $\mathbb{R}^2$ y en caso de que los tenga clasifícalos.*

$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x+8 = 0 \quad x=-4 \qquad (-4,0) \qquad H_f = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$

$\frac{\partial f}{\partial y} = -6y = 0 \quad y=0$ plo silla

2b. *Encuentra,* **usando el método de Lagrange**, *todos los puntos críticos de f sobre la elipse $T : x^2 + 3y^2 - 8 = 0$ y decide si son extremos o puntos silla.*

Máximos locales: $(2\sqrt{2}, 0)$, $(-2\sqrt{2}, 0)$, ______, ...

max. global

Mínimos locales: $(-2, -2/\sqrt{3})$, $(-2, 2/\sqrt{3})$ ______ ... $\Rightarrow$ min globale

Puntos silla: ______, NO, ______ ...

¿Tiene f extremos absolutos sobre T? Si. *Justifica la respuesta y en su caso encuéntralos razonadamente.* T. Weisshess

$L = x^2+8x-3y^2+1 + \lambda(x^2+3y^2-8) \quad \Big| \; x^2+3y^2=8 \quad 3)$

$1) \; \frac{\partial L}{\partial x} = 2x+8+2\lambda x = 2(x+4+\lambda x) = 0 \qquad 2) \; \frac{\partial L}{\partial y} = -6y + 6\lambda y = 6y(\lambda-1) = 0$

1) I, $y=0$ $\quad$ 3) $x = \pm 2\sqrt{2} \qquad (2\sqrt{2},0) \quad (-2\sqrt{2},0)$

II $\lambda=1$ $\quad$ 2) $x+4+x=0 \quad x=-2 \qquad$ 3) $4+3y^2=8 \qquad y^2 = 4/3$

$y = \pm 2/\sqrt{3} \qquad A(2\sqrt{2},0) \quad B(-2\sqrt{2},0) \quad C(-2, 2/\sqrt{3}) \quad D(-2,-2/\sqrt{3})$

$f(A) = 8+16\sqrt{2}+1 \qquad f(C)=f(D) = 4-16-3\cdot\frac{4}{3}+1 = -15$

$f(B) = 8-16\sqrt{2}+1$ $\Big|$ en B $\quad 2x\,dx + 6y\,dy = 0 \Rightarrow dx = 0$

en B $0 = 2\sqrt{2} + 4 + 2\sqrt{2}\lambda \qquad \lambda = \frac{-2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}-1$

$d^2L = 2(\lambda+1)\underbrace{dx^2}_{0} + 6(\lambda-1)dy^2 = 6(\sqrt{2}-2)dy^2 < 0$

2c. *(Opcional) Encontrar los puntos críticos de f en $D : x^2 + 3y^2 \le 8$ y clasifícalos.*

$8-\sqrt{2}\,16+1+15 = 24-16\sqrt{2} = 8(3-2\sqrt{2}) > 0 \qquad f(B) > f(C)$

$f(B) - f(C)$ //

El T. de Weisshess asegura que en T se alcanzan max y min. absoluto

$\Rightarrow$ A: max abs y local, C y D min abs y locales.