1. Extremos en $\mathbb{R}^n$ con Maxima CAS

1.1. Extremos libres. En cada caso decide si hay extremos globales en $\mathbb{R}^2$

Ejemplo 1: Encontrar los extremos de la función $f(x,y) = x^4 + y^4 + 6x^2y^2 + 8x^3$.

Ejemplo 2: Encontrar los extremos de la función $f(x,y) = x^4 + y^4 - (x+y)^2 + 2$.

Ejemplo 3: Encontrar los extremos de la función $f(x,y,z) = x^4 + y^4 + z^4 - 2(x^2+z^2) + y^2$.

Ejemplo 4: Encontrar los extremos de la función $f(x,y) = xy\log(x^2+y^2)$ si $(x,y) \neq (0,0)$ y 0 si $(x,y) = (0,0)$.

Ejemplo 5: Encontrar los extremos de la función $f(x,y) = (x+y)\exp(-x^2-y^2)$.

Ejemplo 6: Encontrar los extremos de las funciones $f(x,y) = xy\exp(-x^2-y^2)$, $f(x,y) = xy\exp(x^2+y^2)$.

Ejemplo 7: Encontrar los extremos de la función $f(x,y) = x^3 - 9xy + y^3 + 27$.

1.2. Extremos condicionados

Ejemplo 1: Encontrar los puntos de mayor y menor distancia al origen de la curva (hipérbola) definida por $x^2 + 3xy + y^2 - 4 = 0$.

Ejemplo 2: Encontrar la mínima distancia al origen de la curva $(x-3)^2 + (y-4)^2 = a^2$ con $a = 1$ y $a = 9$.

Ejemplo 3: Encontrar los extremos de la función $f(x,y) = xy$ sobre la curva $x^2 + y^2 = 1$.

Ejemplo 4: Encontrar los puntos críticos y los extremos absolutos (si los tiene) de la función $f(x,y) = x^2 + y^2 - x - y + 1$ en la región $x^2 + y^2 \leq 2$.

Ejemplo 5: Encontrar los puntos críticos y los posibles extremos de la función $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-2x+4y-3$ en el dominio definido por las desigualdades $x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$ y $x \geq 0$.

Ejemplo 6: Encontrar los puntos de mayor y menor distancia al origen de la curva definida por $y^2 - 8y + x^2 - 6x - 75 = 0$.

Ejemplo 7: Encontrar los extremos de $f(x,y) = x + y$ sobre la curva $4y^2 + x^2 - 1 = 0$.

Ejemplo 8: Encuentra los puntos del elipsoide $x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 9$ más cercanos y alejados del punto $(0,0,3)$.

Ejemplo 9: Encuentra los extremos de $f(x,y,z) = (x+y)^2 + (1+z)^2 + 4$ en la región $x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$.

Ejemplo 10: Encuentra los extremos de $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + x + y + z$ sobre el cascarón esférico $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

Ejemplo 11: Encuentra los extremos absolutos de $f : D \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = \log\left(x^2 + y^2\right)$ donde D es la región $\{(x,y) : x \geq 1, (x-1)^2 + y^2 \leq 4\}$.

Ejemplo 12: Encuentra todos los puntos críticos de la función $f(x,y) = (x-1)^2 + y^2$ definida sobre la región $D = \left\{(x,y) : y \geq -x, y^2 \leq 2x, (x-2)^2 + y^2 \leq 4\right\}$ y decide si son extremos relativos. Encuentra los extremos absolutos.

Ejemplo 13: Sea la función $f : A \subset \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$, $\quad f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 + 4z - 4x$, donde A es la región definida por $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\, |\, x^2 + 2y^2 + z^2 \leq 8,\ z \leq 1\}$.

1. Calcula todos los puntos críticos de dicha función. Decide, si es posible si son extremos locales.
2. ¿Alcanza f su máximo y mínimo globales en A? Justifica tu respuesta.
3. Calcula, si existen, dichos máximo y mínimo globales de f.

Ejemplo 14: Sea la curva definida por la intersección del paraboloide $z = x^2 + y^2$ y el plano $x + y + z = 12$. Encontrar el punto más alto y el más bajo.

Ejemplo 15: Encontrar los puntos de mayor y menor distancia de la curva del Ejemplo 14 al punto $(0,0,0)$.

Ejemplo 16: Encontrar los puntos de mayor y menor distancia al origen de la curva definida por las ecuaciones $x^2 + y^2 - z^2 - xy - 1 = 0$ y $x^2 + y^2 - 1 = 0$.