

# 1. Extremos en $\mathbb{R}^n$ con Maxima CAS

## 1.1. Extremos libres. En cada caso decide si hay extremos globales en $\mathbb{R}^2$

**Ejemplo 1:** Encontrar los extremos de la función  $f(x, y) = x^4 + y^4 + 6x^2y^2 + 8x^3$ .

**Ejemplo 2:** Encontrar los extremos de la función  $f(x, y) = x^4 + y^4 - (x + y)^2 + 2$ .

**Ejemplo 3:** Encontrar los extremos de la función  $f(x, y, z) = x^4 + y^4 + z^4 - 2(x^2 + z^2) + y^2$ .

**Ejemplo 4:** Encontrar los extremos de la función  $f(x, y) = xy \log(x^2 + y^2)$  si  $(x, y) \neq (0, 0)$  y 0 si  $(x, y) = (0, 0)$ .

**Ejemplo 5:** Encontrar los extremos de la función  $f(x, y) = (x + y) \exp(-x^2 - y^2)$ .

**Ejemplo 6:** Encontrar los extremos de las funciones  $f(x, y) = xy \exp(-x^2 - y^2)$ ,  $f(x, y) = xy \exp(x^2 + y^2)$ .

**Ejemplo 7:** Encontrar los extremos de la función  $f(x, y) = x^3 - 9xy + y^3 + 27$ .

## 1.2. Extremos condicionados

**Ejemplo 1:** Encontrar los extremos de la función  $f(x, y) = xy$  sobre la curva  $x^2 + y^2 = 1$ .

**Ejemplo 2:** Encontrar los puntos de mayor y menor distancia al origen de la curva (hipérbola) definida por  $x^2 + 3xy + y^2 - 4 = 0$ .

**Ejemplo 3:** Encontrar la mínima distancia al origen de la curva  $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = a^2$  con  $a = 1$  y  $a = 9$ .

**Ejemplo 4:** Encontrar los puntos críticos y los extremos absolutos (si los tiene) de la función  $f(x, y) = x^2 + y^2 - x - y + 1$  en la región  $x^2 + y^2 \leq 2$ .

**Ejemplo 5:** Encontrar los puntos críticos y los posibles extremos de la función  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 3$  en el dominio definido por las desigualdades  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$  y  $x \geq 0$ .

**Ejemplo 6:** Encontrar los puntos de mayor y menor distancia al origen de la curva definida por  $y^2 - 8y + x^2 - 6x - 75 = 0$ .

**Ejemplo 7:** Encontrar los extremos de  $f(x, y) = x + y$  sobre la curva  $4y^2 + x^2 - 1 = 0$ .

**Ejemplo 8:** Encuentra los puntos del elipsoide  $x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 9$  más cercanos y alejados del punto  $(0, 0, 3)$ .

**Ejemplo 9:** Encuentra los extremos de  $f(x, y, z) = (x + y)^2 + (1 + z)^2 + 4$  en la región  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$ .

**Ejemplo 10:** Encuentra los extremos de  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + x + y + z$  sobre el cascarón esférico  $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ .

**Ejemplo 11:** Encuentra los extremos absolutos de  $f : D \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$  definida por  $f(x, y) = \log(x^2 + y^2)$  donde  $D$  es la región  $\{(x, y) : x \geq 1, (x - 1)^2 + y^2 \leq 4\}$ .

**Ejemplo 12:** Encuentra todos los puntos críticos de la función  $f(x, y) = (x - 1)^2 + y^2$  definida sobre la región  $D = \{(x, y) : y \geq -x, y^2 \leq 2x, (x - 2)^2 + y^2 \leq 4\}$  y decide si son extremos relativos. Encuentra los extremos absolutos.

**Ejemplo 13:** Sea la función  $f : A \subset \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ ,  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 4z - 4x$ , donde  $A$  es la región definida por  $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, |x^2 + 2y^2 + z^2 \leq 8, z \leq 1\}$ .

1. Calcula todos los puntos críticos de dicha función. Decide, si es posible si son extremos locales.
2. ¿Alcanza  $f$  su máximo y mínimo globales en  $A$ ? Justifica tu respuesta.
3. Calcula, si existen, dichos máximo y mínimo globales de  $f$ .

**Ejemplo 14:** Sea la curva definida por la intersección del paraboloides  $z = x^2 + y^2$  y el plano  $x + y + z = 12$ . Encontrar el punto más alto y el más bajo.

**Ejemplo 15:** Encontrar los puntos de mayor y menor distancia de la curva del Ejemplo 14 al punto  $(0, 0, 0)$ .

**Ejemplo 16:** Encontrar los puntos de mayor y menor distancia al origen de la curva definida por las ecuaciones  $x^2 + y^2 - z^2 - xy - 1 = 0$  y  $x^2 + y^2 - 1 = 0$ .