

1. Extremos¹ en \mathbb{R}^n con MAXIMA CAS

1.1. Extremos libres² en \mathbb{R}^2

Ejemplo 1: Encontrar los extremos de la función $f(x, y) = x^4 + y^4 + 6x^2y^2 + 8x^3$.

Ejemplo 2: Encontrar los extremos de la función $f(x, y) = x^4 + y^4 \pm (x + y)^2 + 2$.

Ejemplo 3: Encontrar los extremos de la función $f(x, y, z) = x^4 + y^4 + z^4 - 2(x^2 + z^2) + y^2$.

Ejemplo 4: Encontrar los extremos de la función $f(x, y) = xy \log(x^2 + y^2)$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ y 0 si $(x, y) = (0, 0)$.

Ejemplo 5: Encontrar los extremos de la función $f(x, y) = (x \pm y) \exp(-x^2 - y^2)$.

Ejemplo 6: Encontrar los extremos de las funciones $f(x, y) = xy \exp(-x^2 - y^2)$, $f(x, y) = xy \exp(x^2 + y^2)$.

Ejemplo 7: Encontrar los extremos de la función $f(x, y) = x^3 - 9xy + y^3 + 27$.

1.2. Extremos condicionados³

Ejemplo 1: Encontrar los puntos de mayor y menor distancia al origen de la curva (hipérbola) definida por $x^2 + 3xy + y^2 - 4 = 0$.

Ejemplo 2: Encontrar la mínima distancia al origen de la curva $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = a^2$ con $a = 1$ y $a = 10$.

Ejemplo 3: Encontrar los extremos de la función $f(x, y) = xy$ sobre la curva $x^2 + y^2 = 1$.

Ejemplo 4: Encontrar los puntos críticos y los extremos absolutos (si los tiene) de la función $f(x, y) = x^2 + y^2 - x - y + 1$ en la región $x^2 + y^2 \leq 2$.

Ejemplo 5: Encontrar los puntos críticos y los posibles extremos de la función $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 3$ en el dominio definido por las desigualdades $x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$ y $x \geq 0$.

Ejemplo 6: Encuentra los puntos más cercanos y alejados del elipsoide $4x^2 + y^2 + (z - 2)^2 = 1$ al punto $(-1, 0, 2)$.

Ejemplo 7: Sea la curva definida por la intersección del paraboloides $z = x^2 + y^2$ y el plano $x + y + z = 12$. Encontrar el punto más alto y el más bajo.

Ejemplo 8: Encontrar los puntos de mayor y menor distancia de la curva del Ejemplo 7 al punto $(0, 0, 0)$.

Ejemplo 9: Encontrar los puntos de mayor y menor distancia al origen de la curva definida por las ecuaciones $x^2 + y^2 - z^2 - xy - 1 = 0$ y $x^2 + y^2 - 1 = 0$.

Ejemplo 10: Encuentra los extremos absolutos de $f : D \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = \log(x^2 + y^2)$ donde D es la región $\{(x, y) : x \geq 1, (x - 1)^2 + y^2 \leq 4\}$.

1.3. Problemas propuestos (ver file de MAXIMA, ejemplos 11–15)

Problema 1: Sea la curva definida por $x^2 + y^2 + z^2 = 11$ y el plano $x + y + z = 3$. Encontrar los extremos de $f(x, y, z) = z^2 + 2x + 2y + 20$ sobre dicha curva.

Problema 2: Encontrar los extremos de $f(x, y) = x + y$ sobre la curva $4y^2 + x^2 - 1 = 0$.

Problema 3: Encuentra los puntos del elipsoide $x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 9$ más cercanos y alejados del punto $(0, 0, 3)$.

Problema 4: Encontrar los puntos de mayor y menor distancia al origen de la curva definida por $y^2 - 8y + x^2 - 6x - 75 = 0$.

Problema 5: Encuentra todos los puntos críticos de la función $f(x, y) = (x - 1)^2 + y^2$ definida sobre la región $D = \{(x, y) : y \geq -x, y^2 \leq 2x, (x - 2)^2 + y^2 \leq 4\}$ y decide si son extremos relativos. Encuentra, caso que los tenga, los extremos absolutos en D .

¹En todos los casos decide si hay extremos absolutos y/o relativos así como puntos silla.

²Ver el fichero de MAXIMA `problemas-extremos-clase.wxmx`

³Ver el fichero de MAXIMA `problemas-extremos-condicionados-clase-2024.wxmx`