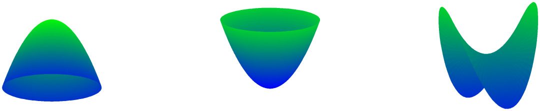
Extremos de funciones de varias variables

Renato Álvarez-Nodarse

Universidad de Sevilla



https://renato.ryn-fismat.es/clases.html

¿Cuándo una función $f(x)$ de una variable tiene extremo?

Definición

Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ con A abierto o cerrado.

1. *Si $f(x) \leq f(a)$ ($f(x) \geq f(a)$), $\forall x \in A$, $x \neq a$, decimos que f alcanza en el punto a el máximo (mínimo)* **absoluto** *en A.*
2. *Si existe un abierto $B \subset A$ t.q. $\forall x \in B$, $x \neq a$, $f(x) \leq f(a)$ ($f(x) \geq f(a)$) decimos que f alcanza en a un máximo (mínimo)* **relativo**.

Si las desigualdades sean estrictas los extremos son estrictos.

¿Cuándo una función $f(x)$ de una variable tiene extremo?

Definición

Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ con A abierto o cerrado.

1. *Si $f(x) \leq f(a)$ $(f(x) \geq f(a))$, $\forall x \in A$, $x \neq a$, decimos que f alcanza en el punto a el máximo (mínimo)* **absoluto** *en A.*
2. *Si existe un abierto $B \subset A$ t.q. $\forall x \in B$, $x \neq a$, $f(x) \leq f(a)$ $(f(x) \geq f(a))$ decimos que f alcanza en a un máximo (mínimo)* **relativo**.

Si las desigualdades sean estrictas los extremos son estrictos.

De lo anterior se deduce que todo extremo absoluto es un extremo relativo si este se encuentra en el interior de A.

En general, los extremos absolutos no tienen porque ser extremos relativos (si el extremo absoluto se alcanza el $x = a$ con $a \in \partial A$ no tiene por qué existir ninguna $B(a, \delta) \subset A$) ...

Definición

Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ con A abierto o cerrado.

1. *Si $f(x) \le f(a)$ ($f(x) \ge f(a)$), $\forall x \in A$, $x \neq a$, decimos que f alcanza en el punto a el máximo (mínimo)* **absoluto** *en A.*
2. *Si existe un abierto $B \subset A$ t.q. $\forall x \in B$, $x \neq a$, $f(x) \le f(a)$ ($f(x) \ge f(a)$) decimos que f alcanza en a un máximo (mínimo)* **relativo**.

Si las desigualdades sean estrictas los extremos son estrictos.

De lo anterior se deduce que todo extremo absoluto es un extremo relativo si este se encuentra en el interior de A.

En general, los extremos absolutos no tienen porque ser extremos relativos (si el extremo absoluto se alcanza el $x = a$ con $a \in \partial A$ no tiene por qué existir ninguna $B(a, \delta) \subset A$) ...ni los extremos relativos tienen por que ser absolutos (el extremo absoluto puede alcanzarse en ∂A).

Teorema

Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$*,* A *abierto y supongamos que* f *tiene en* $a \in A$ *un extremo relativo. Entonces, las derivadas parciales de* f*, si existen, son todas iguales a cero en* a*, i.e.,* $\dfrac{\partial f(a)}{\partial x_k} = 0$*,* $k = 1, \dots, n$*.*
Si además f *es diferenciable en* $a \Rightarrow Df(a) = 0$*.*

Condición necesaria de extremo relativo

Teorema

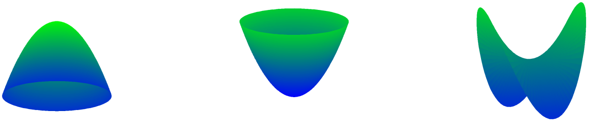
Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, A abierto y supongamos que f tiene en $a \in A$ un extremo relativo. Entonces, las derivadas parciales de f, si existen, son todas iguales a cero en a, i.e., $\dfrac{\partial f(a)}{\partial x_k} = 0$, $k = 1, \ldots, n$.
Si además f es diferenciable en $a \Rightarrow Df(a) = 0$.

Demostración: Sea $\phi_k(x_k) := f(a_1, \ldots, a_{k-1}, x_k, a_{k+1}, \ldots, a_n)$. ϕ_k es diferenciable y tiene un extremo en $x_k = a_k$. Aplicamos el lema de Fermat a ϕ_k y obtenemos resultado. $\square$

Teorema

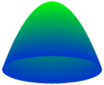
Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, A abierto y supongamos que f tiene en $a \in A$ un extremo relativo. Entonces, las derivadas parciales de f, si existen, son todas iguales a cero en a, i.e., $\dfrac{\partial f(a)}{\partial x_k} = 0$, $k = 1, \ldots, n$.
Si además f es diferenciable en $a \Rightarrow Df(a) = 0$.

Demostración: Sea $\phi_k(x_k) := f(a_1, \ldots, a_{k-1}, x_k, a_{k+1}, \ldots, a_n)$. ϕ_k es diferenciable y tiene un extremo en $x_k = a_k$. Aplicamos el lema de Fermat a ϕ_k y obtenemos resultado. $\square$



$f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ con un máximo local, un mínimo local y un punto silla

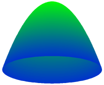
Ejemplo: Sea $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, $f(x, y) = -(x^2 + y^2)$.



- f tiene un máximo en $(0, 0)$.
- $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$.

Ejemplo: Sea $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, $f(x, y) = -(x^2 + y^2)$.

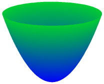
- f tiene un máximo en $(0, 0)$.
- $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$.



Ejemplo: Sea $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 + y^2$.

f tiene un mínimo local en $(0, 0)$.

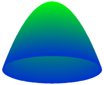
Además $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$



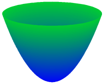
Tres ejemplos representativos

Ejemplo: Sea $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, $f(x, y) = -(x^2 + y^2)$.

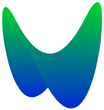
- f tiene un máximo en $(0, 0)$.
- $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$.



Ejemplo: Sea $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 + y^2$.
f tiene un mínimo local en $(0, 0)$.
Además $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$



Ejemplo: Sea $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 - y^2$. Se tiene que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$.
En cualquier entorno de $(0, 0)$, f toma valores positivos y negativos. En este caso el punto $(0, 0)$ se denomina *punto silla* de f.



¿Cómo saber si un punto crítico es un extremo local o un punto silla?

Para ello tenemos un teorema similar al del caso de una variable. Antes de enunciarlo conviene recordar que la segunda diferencial de una función de varias variables $f : A \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$, $f \in C^{(2)}(A)$ es la forma bilineal simétrica, que escribiremos convenientemente de la forma

$$d^2 f(a) := D^2 f(a)(x) = \sum_{i_1=1}^{n} \sum_{i_2=1}^{n} \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2}} x_{i_1} x_{i_2} = x^T H_f(a) x,$$

donde

$$H_f(a) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f(a)}{\partial^2 x_1} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f(a)}{\partial x_n \partial x_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 f(a)}{\partial x_1 \partial x_n} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f(a)}{\partial^2 x_n} \end{pmatrix}.$$

Condición suficiente de extremo

Teorema

Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dos veces diferenciable en $a \in A$, A abierto, y sea $x = a$ un punto crítico de f, i.e., $Df(a) = 0$. Entonces

1. *Si la segunda diferencial $D^2 f(a)(x)$ es definida positiva en a, entonces f tiene un mínimo relativo en a.*
2. *Si la segunda diferencial $D^2 f(a)(x)$ es definida negativa, entonces f tiene un máximo relativo en a.*
3. *Si la segunda diferencial $D^2 f(a)(x)$ es indefinida, i.e., si existen $x, y \in \mathbb{R}^n$ tales que $D^2 f(a)(x) > 0 > D^2 f(a)(y)$, entonces f tiene un punto de silla en a.*

Teorema

Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dos veces diferenciable en $a \in A$, A abierto, y sea $x = a$ un punto crítico de f, i.e., $Df(a) = 0$. Entonces

1. *Si la segunda diferencial $D^2f(a)(x)$ es definida positiva en a, entonces f tiene un mínimo relativo en a.*
2. *Si la segunda diferencial $D^2f(a)(x)$ es definida negativa, entonces f tiene un máximo relativo en a.*
3. *Si la segunda diferencial $D^2f(a)(x)$ es indefinida, i.e., si existen $x, y \in \mathbb{R}^n$ tales que $D^2f(a)(x) > 0 > D^2f(a)(y)$, entonces f tiene un punto de silla en a.*

Demostración: Usamos la fórmula local de Taylor con $x = a + h$, $h \neq 0$ $f(x) = f(a) + Df(a)(h) + \frac{1}{2}D^2f(a)(h) + o(\|h\|^2)$. Como $Df(a) = 0 \Rightarrow$

Teorema

Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dos veces diferenciable en $a \in A$, A abierto, y sea $x = a$ un punto crítico de f, i.e., $Df(a) = 0$. Entonces

1. *Si la segunda diferencial $D^2 f(a)(x)$ es definida positiva en a, entonces f tiene un mínimo relativo en a.*
2. *Si la segunda diferencial $D^2 f(a)(x)$ es definida negativa, entonces f tiene un máximo relativo en a.*
3. *Si la segunda diferencial $D^2 f(a)(x)$ es indefinida, i.e., si existen $x, y \in \mathbb{R}^n$ tales que $D^2 f(a)(x) > 0 > D^2 f(a)(y)$, entonces f tiene un punto de silla en a.*

Demostración: Usamos la fórmula local de Taylor con $x = a + h$, $h \neq 0$ $f(x) = f(a) + Df(a)(h) + \frac{1}{2} D^2 f(a)(h) + o(\|h\|^2)$. Como $Df(a) = 0 \Rightarrow$

$$f(x) - f(a) = \frac{1}{2} D^2 f(a)(h) + o(\|h\|^2) = \frac{1}{2}\left(\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i \partial x_j} h_i h_j + o(\|h\|^2) \right)$$

$$f(x) - f(a) = \frac{1}{2}\|h\|^2 \left(\overbrace{\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i \partial x_j} \frac{h_i}{\|h\|} \frac{h_j}{\|h\|}}^{Q(h',a), \quad h'=h/\|h\|} + o(1) \right)$$

$$\text{signo}(f(x) - f(a)) = \text{signo}(Q(h', a) + o(1))$$

❶ $Q(h', a)$ está definida sobre un cerrado y acotado (esfera de radio 1 pues $\|h'\| = 1$) $\Rightarrow$ alcanza máx y mín absolutos: $m \leq Q(h', a) \leq M$.

❷ $o(1) \to 0 \Rightarrow \forall \epsilon > 0 \; \exists$ un $U_\delta(a)$ t.q. $-\epsilon < o(1) < \epsilon$

$$f(x)-f(a)=\frac{1}{2}\|h\|^2\left(\overbrace{\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i\partial x_j}\frac{h_i}{\|h\|}\frac{h_j}{\|h\|}}^{Q(h',a),\quad h'=h/\|h\|}+o(1)\right)$$

$$\text{signo}(f(x)-f(a))=\text{signo}(Q(h',a)+o(1))$$

❶ $Q(h',a)$ está definida sobre un cerrado y acotado (esfera de radio 1 pues $\|h'\|=1$) $\Rightarrow$ alcanza máx y mín absolutos: $m\leq Q(h',a)\leq M$.

❷ $o(1)\to 0 \Rightarrow \forall\epsilon>0\ \exists$ un $U_\delta(a)$ t.q. $-\epsilon<o(1)<\epsilon$

►Si $D^2f(a)(x)$ es definida positiva en a entonces $m>0$. Como $o(1)\to 0$ tomando $\epsilon=m/2\Rightarrow\exists$ un entorno de a suf. pequeño $o(1)>-m/2$ y, por tanto, $Q(h',a)+o(1)>0$ $f(x)-f(a)\geq 0\Rightarrow$ **mínimo local**

$$f(x)-f(a)=\frac{1}{2}\|h\|^2\left(\overbrace{\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i\partial x_j}\frac{h_i}{\|h\|}\frac{h_j}{\|h\|}}^{Q(h',a),\quad h'=h/\|h\|}+o(1)\right)$$

$$\text{signo}(f(x)-f(a))=\text{signo}(Q(h',a)+o(1))$$

❶ $Q(h',a)$ está definida sobre un cerrado y acotado (esfera de radio 1 pues $\|h'\|=1$) $\Rightarrow$ alcanza máx y mín absolutos: $m\leq Q(h',a)\leq M$.

❷ $o(1)\to 0\Rightarrow\forall\epsilon>0$ $\exists$ un $U_\delta(a)$ t.q. $-\epsilon<o(1)<\epsilon$

►Si $D^2f(a)(x)$ es definida positiva en a entonces $m>0$. Como $o(1)\to 0$ tomando $\epsilon=m/2\Rightarrow\exists$ un entorno de a suf. pequeño $o(1)>-m/2$ y, por tanto, $Q(h',a)+o(1)>0$ $f(x)-f(a)\geq 0$ $\Rightarrow$ **mínimo local**

►Si $D^2f(a)(x)$ es definida negativa en a entonces $M<0$. Como $o(1)\to 0$ tomando $\epsilon=|M|/2\Rightarrow\exists$ un entorno de a suf. pequeño $o(1)<|M|/2$ y, por tanto, $Q(h',a)+o(1)<0\Rightarrow f(x)-f(a)\leq 0$ $\Rightarrow$ **máximo local**

$$f(x) - f(a) = \frac{1}{2}\|h\|^2 \left(\overbrace{\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i \partial x_j} \frac{h_i}{\|h\|} \frac{h_j}{\|h\|}}^{Q(h',a)} + o(1) \right)$$

$$\text{signo}(f(x) - f(a)) = \text{signo}(Q(h', a) + o(1))$$

▶Sean a_m y a_M los puntos donde Q alcanza su mínimo y máximo absolutos sobre S. Como Q es indefinida $m < 0 < M$.

$$f(x)-f(a)=\frac{1}{2}\|h\|^2\left(\overbrace{\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i\partial x_j}\frac{h_i}{\|h\|}\frac{h_j}{\|h\|}}^{Q(h',a)}+o(1)\right)$$

$$\text{signo}(f(x)-f(a))=\text{signo}(Q(h',a)+o(1))$$

▶Sean a_m y a_M los puntos donde Q alcanza su mínimo y máximo absolutos sobre S. Como Q es indefinida $m<0<M$.

Si elegimos $h=x-a=ta_m$ con $t\ll 1$ tendremos que $f(x)-f(a)=\frac{t^2}{2}(m+o(1))$ y entonces para ciertos valores de x en un entorno de a $\text{signo}(f(x)-f(a))=\text{signo}(m)<0\Rightarrow f(x)-f(a)<0$.

$$f(x) - f(a) = \tfrac{1}{2}\|h\|^2 \left(\overbrace{\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i \partial x_j} \frac{h_i}{\|h\|} \frac{h_j}{\|h\|}}^{Q(h',a)} + o(1) \right)$$

$$\text{signo}(f(x) - f(a)) = \text{signo}(Q(h', a) + o(1))$$

▶Sean a_m y a_M los puntos donde Q alcanza su mínimo y máximo absolutos sobre S. Como Q es indefinida $m < 0 < M$.

Si elegimos $h = x - a = ta_m$ con $t \ll 1$ tendremos que $f(x) - f(a) = \frac{t^2}{2}(m + o(1))$ y entonces para ciertos valores de x en un entorno de a $\text{signo}(f(x) - f(a)) = \text{signo}(m) < 0 \Rightarrow f(x) - f(a) < 0$.

Repitiendo el razonamiento para $h = x - a = ta_M$ con $t \ll 1$ obtendremos que para ciertos x en un entorno de a $f(x) - f(a) > 0$, luego en a no puede haber ningún extremo.

Teorema

Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dos veces diferenciable en $a \in A$, A abierto, y sea $x = a$ un punto crítico de f, i.e., $Df(a) = 0$. Entonces

1. *Si la segunda diferencial $D^2 f(a)(x)$ es definida positiva en a, entonces f tiene un mínimo relativo en a.*
2. *Si la segunda diferencial $D^2 f(a)(x)$ es definida negativa, entonces f tiene un máximo relativo en a.*
3. *Si la segunda diferencial $D^2 f(a)(x)$ es indefinida, i.e., si existen $x, y \in \mathbb{R}^n$ tales que $D^2 f(a)(x) > 0 > D^2 f(a)(y)$, entonces f tiene un punto de silla en a.*

¿Cómo saber el signo de $D^2 f(a)(x)$?

Sea $B(x, y)$ una aplicación bilineal simétrica y sea $B = [b_{i,j}]_{i,j=1,n}$ su matriz. Las siguientes condiciones son equivalentes:

1. B es definida positiva.
2. Todos los autovalores de B son positivos.
3. Los menores principales Δ_k de B son positivos, i.e. $\Delta_k > 0$, $k = 1, 2, \dots, n$ donde

$$\Delta_k := \det \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \cdots & b_{1,k} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \cdots & b_{2,k} \\ & & & \\ \vdots & \ddots & \vdots & \\ b_{k,1} & b_{k,2} & \cdots & b_{1,k} \end{pmatrix}, \quad \forall k = 1, 2, \dots n.$$

Análogamente se tiene para las formas biliniales definidas negativas las siguientes condiciones equivalentes:

1. B es definida negativa.
2. Todos los autovalores de B son negantivos.
3. Los menores principales Δ_k de B son tales que $(-1)^k \Delta_k > 0$, $k = 1, 2, \dots, n$.

Corolario (Condición suficiente de extremo)

Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dos veces diferenciable en $a \in A$, A abierto, y sea $x = a$ un punto crítico de f, i.e., $Df(a) = 0$ y sea

$$\Delta_k := \det \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f(a)}{\partial^2 x_1} & \dots & \dfrac{\partial^2 f(a)}{\partial x_k \partial x_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 f(a)}{\partial x_1 \partial x_k} & \dots & \dfrac{\partial^2 f(a)}{\partial^2 x_k} \end{pmatrix}.$$

1. *Si todos los menores principales $\Delta_k > 0$, $k = 1, 2, \dots, n$, entonces f tiene un mínimo relativo en a.*
2. *Si todos los menores principales son tales que $(-1)^k \Delta_k > 0$, $k = 1, 2, \dots, n$, entonces f tiene un máximo relativo en a.*

Corolario (Condición suficiente de extremo)

Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *dos veces diferenciable en* $a \in A$, A *abierto, y sea* $x = a$ *un punto crítico de* f, *i.e.,* $Df(a) = 0$ *y sea*

$$\Delta_k := \det \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f(a)}{\partial^2 x_1} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f(a)}{\partial x_k \partial x_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 f(a)}{\partial x_1 \partial x_k} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f(a)}{\partial^2 x_k} \end{pmatrix}.$$

1. *Si todos los menores principales* $\Delta_k > 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$, *entonces* f *tiene un mínimo relativo en* a.
2. *Si todos los menores principales son tales que* $(-1)^k \Delta_k > 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$, *entonces* f *tiene un máximo relativo en* a.

En el caso especial de dos variables se puede ir más allá:

Corolario

Sea $f : A \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *dos veces diferenciable en* $a \in A$, A *abierto,* $Df(a) = 0$.

1. *Si* $\dfrac{\partial^2 f(a)}{\partial^2 x_1} > 0$ *y* $\det \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f(a)}{\partial^2 x_1} & \dfrac{\partial^2 f(a)}{\partial x_2 \partial x_1} \\ \dfrac{\partial^2 f(a)}{\partial x_1 \partial x_2} & \dfrac{\partial^2 f(a)}{\partial^2 x_2} \end{pmatrix} > 0$, f *tiene un mínimo relativo en* a.
2. *Si* $\dfrac{\partial^2 f(a)}{\partial^2 x_1} < 0$ *y* $\det \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f(a)}{\partial^2 x_1} & \dfrac{\partial^2 f(a)}{\partial x_2 \partial x_1} \\ \dfrac{\partial^2 f(a)}{\partial x_1 \partial x_2} & \dfrac{\partial^2 f(a)}{\partial^2 x_2} \end{pmatrix} > 0$, f *tiene un máximo relativo en* a.
3. *Si* $\det \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f(a)}{\partial^2 x_1} & \dfrac{\partial^2 f(a)}{\partial x_2 \partial x_1} \\ \dfrac{\partial^2 f(a)}{\partial x_1 \partial x_2} & \dfrac{\partial^2 f(a)}{\partial^2 x_2} \end{pmatrix} < 0$, f *tiene un punto silla en* a.
4. *Si el* $\det H_f(a) = 0$, *nada puede decirse.*

▶1. Calcular los extremos de $f(x, y) = x^4 + y^4 + 6x^2y^2 + 8x^3$.

▶1. Calcular los extremos de $f(x,y) = x^4 + y^4 + 6x^2y^2 + 8x^3$.

Puntos críticos: $(0,0)$ $(-6,0)$

▶1. Calcular los extremos de $f(x,y) = x^4 + y^4 + 6x^2y^2 + 8x^3$.

Puntos críticos: $(0,0)$ $(-6,0)$

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 12\,y^2 + 12\,x^2 + 48\,x & 24\,x\,y \\ 24\,x\,y & 12\,y^2 + 12\,x^2 \end{pmatrix}$$

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

▶1. Calcular los extremos de $f(x,y)=x^4+y^4+6x^2y^2+8x^3$.

Puntos críticos: $(0,0)$ $(-6,0)$

$$H_f(x,y)=\begin{pmatrix} 12\,y^2+12\,x^2+48\,x & 24\,x\,y \\ 24\,x\,y & 12\,y^2+12\,x^2 \end{pmatrix}$$

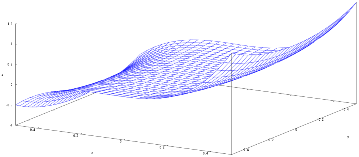
$$H_f(0,0)=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad H_f(-6,0)=\begin{pmatrix} 144 & 0 \\ 0 & 432 \end{pmatrix}$$

▶1. Calcular los extremos de $f(x,y) = x^4 + y^4 + 6x^2y^2 + 8x^3$.

Puntos críticos: $(0,0)$ $(-6,0)$

$$H_f(x,y) = \begin{pmatrix} 12\,y^2 + 12\,x^2 + 48\,x & 24\,x\,y \\ 24\,x\,y & 12\,y^2 + 12\,x^2 \end{pmatrix}$$

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad H_f(-6,0) = \begin{pmatrix} 144 & 0 \\ 0 & 432 \end{pmatrix}$$



▶2a. Calcular los extremos de $f(x, y) = x^4 + y^4 - (x + y)^2 + 2$.

▶2a. Calcular los extremos de $f(x,y) = x^4 + y^4 - (x+y)^2 + 2$.

Las soluciones reales son tres: $A(-1,-1)$, $B(1,1)$ y $C(0,0)$.

▶2a. Calcular los extremos de $f(x,y) = x^4 + y^4 - (x+y)^2 + 2$.

Las soluciones reales son tres: $A(-1,-1)$, $B(1,1)$ y $C(0,0)$.

▶2b. Calcular los extremos de $f(x,y) = x^4 + y^4 + (x+y)^2 + 2$.

▶2a. Calcular los extremos de $f(x, y) = x^4 + y^4 - (x + y)^2 + 2$.

Las soluciones reales son tres: $A(-1, -1)$, $B(1, 1)$ y $C(0, 0)$.

▶2b. Calcular los extremos de $f(x, y) = x^4 + y^4 + (x + y)^2 + 2$.

Una solución real: $A(0, 0)$.

▶2a. Calcular los extremos de $f(x,y) = x^4 + y^4 - (x+y)^2 + 2$.

Las soluciones reales son tres: $A(-1,-1)$, $B(1,1)$ y $C(0,0)$.

▶2b. Calcular los extremos de $f(x,y) = x^4 + y^4 + (x+y)^2 + 2$.

Una solución real: $A(0,0)$.

▶3. Calcular los extremos de $f(x,y,z) = x^4 + y^4 + z^4 - 2(x^2 + z^2) + y^2$.

Ejemplos

▶2a. Calcular los extremos de $f(x,y) = x^4 + y^4 - (x+y)^2 + 2$.

Las soluciones reales son tres: $A(-1,-1)$, $B(1,1)$ y $C(0,0)$.

▶2b. Calcular los extremos de $f(x,y) = x^4 + y^4 + (x+y)^2 + 2$.

Una solución real: $A(0,0)$.

▶3. Calcular los extremos de $f(x,y,z) = x^4 + y^4 + z^4 - 2(x^2+z^2) + y^2$.

Soluciones $(0,0,0)$ $(0,0,\pm 1)$ $(\pm 1,0,0)$ $(\pm 1,0,1)$ $(-1,0,\pm 1)$.

▶2a. Calcular los extremos de $f(x,y) = x^4 + y^4 - (x+y)^2 + 2$.

Las soluciones reales son tres: $A(-1,-1)$, $B(1,1)$ y $C(0,0)$.

▶2b. Calcular los extremos de $f(x,y) = x^4 + y^4 + (x+y)^2 + 2$.

Una solución real: $A(0,0)$.

▶3. Calcular los extremos de $f(x,y,z) = x^4 + y^4 + z^4 - 2(x^2+z^2) + y^2$.

Soluciones $(0,0,0)$ $(0,0,\pm 1)$ $(\pm 1,0,0)$ $(\pm 1,0,1)$ $(-1,0,\pm 1)$.

¿Qué hace MAXIMA?

▶4. Calcular los extremos de $f(x,y) = xy\log(x^2+y^2)$.

▶2a. Calcular los extremos de $f(x,y) = x^4 + y^4 - (x+y)^2 + 2$.

Las soluciones reales son tres: $A(-1,-1)$, $B(1,1)$ y $C(0,0)$.

▶2b. Calcular los extremos de $f(x,y) = x^4 + y^4 + (x+y)^2 + 2$.

Una solución real: $A(0,0)$.

▶3. Calcular los extremos de $f(x,y,z) = x^4 + y^4 + z^4 - 2(x^2+z^2) + y^2$.

Soluciones $(0,0,0)$ $(0,0,\pm 1)$ $(\pm 1,0,0)$ $(\pm 1,0,1)$ $(-1,0,\pm 1)$.

¿Qué hace Maxima?

▶4. Calcular los extremos de $f(x,y) = xy\log(x^2+y^2)$.

▶5. Calcular los extremos de $f(x,y) = (x \pm y)e^{-x^2-y^2}$.

▶2a. Calcular los extremos de $f(x,y) = x^4 + y^4 - (x+y)^2 + 2$.

Las soluciones reales son tres: $A(-1,-1)$, $B(1,1)$ y $C(0,0)$.

▶2b. Calcular los extremos de $f(x,y) = x^4 + y^4 + (x+y)^2 + 2$.

Una solución real: $A(0,0)$.

▶3. Calcular los extremos de $f(x,y,z) = x^4 + y^4 + z^4 - 2(x^2+z^2) + y^2$.

Soluciones $(0,0,0)$ $(0,0,\pm 1)$ $(\pm 1,0,0)$ $(\pm 1,0,1)$ $(-1,0,\pm 1)$.

¿Qué hace MAXIMA?

▶4. Calcular los extremos de $f(x,y) = xy\log(x^2+y^2)$.

▶5. Calcular los extremos de $f(x,y) = (x \pm y)e^{-x^2-y^2}$.

▶6. Calcular los extremos de $f(x,y) = x\,y\,e^{-x^2-y^2}$.

Ejemplos

▶2a. Calcular los extremos de $f(x, y) = x^4 + y^4 - (x + y)^2 + 2$.

Las soluciones reales son tres: $A(-1, -1)$, $B(1, 1)$ y $C(0, 0)$.

▶2b. Calcular los extremos de $f(x, y) = x^4 + y^4 + (x + y)^2 + 2$.

Una solución real: $A(0, 0)$.

▶3. Calcular los extremos de $f(x, y, z) = x^4 + y^4 + z^4 - 2(x^2 + z^2) + y^2$.

Soluciones $(0, 0, 0)$ $(0, 0, \pm 1)$ $(\pm 1, 0, 0)$ $(\pm 1, 0, 1)$ $(-1, 0, \pm 1)$.

¿Qué hace MAXIMA?

▶4. Calcular los extremos de $f(x, y) = xy \log(x^2 + y^2)$.

▶5. Calcular los extremos de $f(x, y) = (x \pm y)e^{-x^2-y^2}$.

▶6. Calcular los extremos de $f(x, y) = x\, y\, e^{-x^2-y^2}$.

▶7. Calcular los extremos de $f(x, y) = y^3 - 9xy + x^3 + 27$.

Extremos condicionados

Pasemos ahora a un problema muy relacionado con el anterior. Imaginemos que queremos encontrar los extremos de una función $f : A \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ donde las variables no son todas independientes sino que han de satisfacer $m < n$ condiciones de *ligaduras*

$$\Phi_1(x_1, \cdots, x_n) = 0, \quad \Phi_2(x_1, \cdots, x_n) = 0, \quad \Phi_m(x_1, \cdots, x_n) = 0.$$

Ejemplos representativos

Ejemplo 1: Hallar la distancia mínima del origen de coordenadas a la cónica de ecuación $x^2 + 3xy + y^2 = 4$.

Ejemplo 2: Encontrar en mínimo de $f(x, y) = xy$ si $x^2 + y^2 = 1$.

Pasemos ahora a un problema muy relacionado con el anterior. Imaginemos que queremos encontrar los extremos de una función $f : A \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ donde las variables no son todas independientes sino que han de satisfacer $m < n$ condiciones de *ligaduras*

$$\Phi_1(x_1, \cdots, x_n) = 0, \quad \Phi_2(x_1, \cdots, x_n) = 0, \quad \Phi_m(x_1, \cdots, x_n) = 0.$$

Ejemplos representativos

Ejemplo 1: Hallar la distancia mínima del origen de coordenadas a la cónica de ecuación $x^2 + 3xy + y^2 = 4$.

Ejemplo 2: Encontrar en mínimo de $f(x, y) = xy$ si $x^2 + y^2 = 1$.

¿Cómo proceder?

Queremos encontrar el máximo y/o mínimo absolutos de $f : A \subset \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, si sus variables satisfacen la ecuación $\Phi(x, y) = 0$.

Una forma de resolver el problema es como sigue:

Queremos encontrar el máximo y/o mínimo absolutos de $f : A \subset \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, si sus variables satisfacen la ecuación $\Phi(x, y) = 0$.

Una forma de resolver el problema es como sigue:

❶ Resolvemos la ecuación $\Phi(x, y) = 0$ respecto a una variable, digamos $y = g(x)$, y sustituimos la función resultante en nuestra f.

Queremos encontrar el máximo y/o mínimo absolutos de $f : A \subset \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, si sus variables satisfacen la ecuación $\Phi(x, y) = 0$.

Una forma de resolver el problema es como sigue:

❶ Resolvemos la ecuación $\Phi(x, y) = 0$ respecto a una variable, digamos $y = g(x)$, y sustituimos la función resultante en nuestra f.

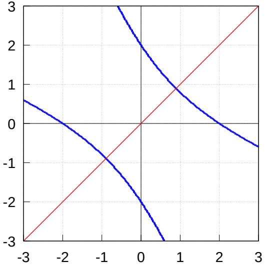
❷ Obtenemos una función de una variable $F(x) = f(x, g(x))$ a la que podemos calcularle los extremos al ser x una variable *libre*.

Por el teorema de la función implícita bastaría que $\Phi'_y(x, y) \neq 0$ en A para tener garantizado que exista la función $y = g(x)$.

Hallar la distancia mínima del $(0,0)$ a la cónica $x^2+3xy+y^2=4$.

En vez de usar la distancia vamos a usar el cuadrado de la distancia $d(x,y)=x^2+y^2$ ¿por qué?

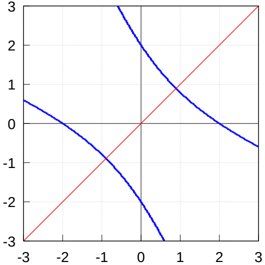
En vez de usar la distancia vamos a usar el cuadrado de la distancia $d(x,y) = x^2 + y^2$ ¿por qué?



Resolvemos $x^2 + 3xy + y^2 = 4$ respecto a "y"

$$y_{\pm} = \frac{-3x \pm \sqrt{5x^2 + 16}}{2}.$$

En vez de usar la distancia vamos a usar el cuadrado de la distancia $d(x,y)=x^2+y^2$ ¿por qué?



Resolvemos $x^2+3xy+y^2=4$ respecto a "y"

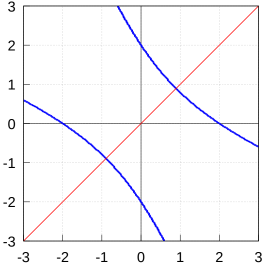
$$y_{\pm}=\frac{-3x\pm\sqrt{5x^2+16}}{2}.$$

Sustituimos y_+ en $d(x,y)$:

$$d_+(x)=x^2+\frac{(-3x\pm\sqrt{5x^2+16})^2}{4}$$

Hallar la distancia mínima del $(0,0)$ a la cónica $x^2+3xy+y^2=4$.

En vez de usar la distancia vamos a usar el cuadrado de la distancia $d(x,y)=x^2+y^2$ ¿por qué?



Resolvemos $x^2+3xy+y^2=4$ respecto a "y"

$$y_\pm=\frac{-3x\pm\sqrt{5x^2+16}}{2}.$$

Sustituimos y_+ en $d(x,y)$:

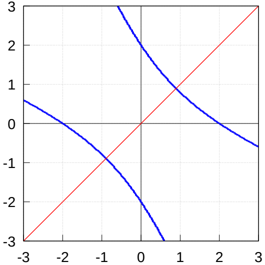
$$d_+(x)=x^2+\frac{(-3x\pm\sqrt{5x^2+16})^2}{4}$$

Calculamos los extremos de $d_+(x)$, $d_+'(x_0)=0$, signo$(d''(x_0))$:

$$d_+'(x)=\frac{9\,x\sqrt{5\,x^2+16}-15\,x^2-24}{\sqrt{5\,x^2+16}}=0 \quad\Rightarrow x_1=-\frac{2}{\sqrt{5}},\quad x_2=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

Hallar la distancia mínima del $(0,0)$ a la cónica $x^2+3xy+y^2=4$.

En vez de usar la distancia vamos a usar el cuadrado de la distancia $d(x,y)=x^2+y^2$ ¿por qué?



Resolvemos $x^2+3xy+y^2=4$ respecto a "y"

$$y_{\pm}=\frac{-3x\pm\sqrt{5x^2+16}}{2}.$$

Sustituimos y_+ en $d(x,y)$:

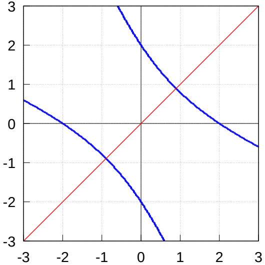
$$d_+(x)=x^2+\frac{(-3x\pm\sqrt{5x^2+16})^2}{4}$$

Calculamos los extremos de $d_+(x)$, $d_+'(x_0)=0$, signo$(d''(x_0))$:

$$d_+'(x)=\frac{9\,x\sqrt{5\,x^2+16}-15\,x^2-24}{\sqrt{5\,x^2+16}}=0 \quad \Rightarrow x_1=-\frac{2}{\sqrt{5}},\quad x_2=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

Solo sirve la segunda solución. Finalmente $d_+''(x_2)=24/5 \Rightarrow$ mínimo.

En vez de usar la distancia vamos a usar el cuadrado de la distancia $d(x,y)=x^2+y^2$ ¿por qué?



Resolvemos $x^2+3xy+y^2=4$ respecto a "y"

$$y_{\pm}=\frac{-3x\pm\sqrt{5x^2+16}}{2}.$$

Sustituimos y_+ en $d(x,y)$:

$$d_+(x)=x^2+\frac{(-3x\pm\sqrt{5x^2+16})^2}{4}$$

Calculamos los extremos de $d_+(x)$, $d_+'(x_0)=0$, signo$(d''(x_0))$:

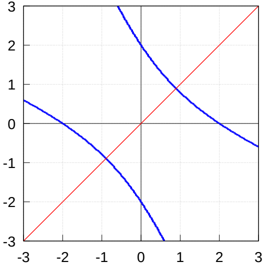
$$d_+'(x)=\frac{9\,x\sqrt{5\,x^2+16}-15\,x^2-24}{\sqrt{5\,x^2+16}}=0 \quad\Rightarrow x_1=-\frac{2}{\sqrt{5}},\quad x_2=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

Solo sirve la segunda solución. Finalmente $d_+''(x_2)=24/5\Rightarrow$ mínimo.

¿Es "bueno" este método?

Hallar la distancia mínima del $(0,0)$ a la cónica $x^2+3xy+y^2=4$.

En vez de usar la distancia vamos a usar el cuadrado de la distancia $d(x,y)=x^2+y^2$ ¿por qué?



Resolvemos $x^2+3xy+y^2=4$ respecto a "y"

$$y_{\pm}=\frac{-3x\pm\sqrt{5x^2+16}}{2}.$$

Sustituimos y_+ en $d(x,y)$:

$$d_+(x)=x^2+\frac{(-3x\pm\sqrt{5x^2+16})^2}{4}$$

Calculamos los extremos de $d_+(x)$, $d_+'(x_0)=0$, signo$(d''(x_0))$:

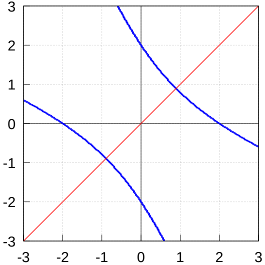
$$d_+'(x)=\frac{9\,x\sqrt{5\,x^2+16}-15\,x^2-24}{\sqrt{5\,x^2+16}}=0 \quad \Rightarrow x_1=-\frac{2}{\sqrt{5}}, \quad x_2=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

Solo sirve la segunda solución. Finalmente $d_+''(x_2)=24/5 \Rightarrow$ mínimo.

¿Es "bueno" este método? **NO**

Hallar la distancia mínima del $(0,0)$ a la cónica $x^2+3xy+y^2=4$.

En vez de usar la distancia vamos a usar el cuadrado de la distancia $d(x,y)=x^2+y^2$ ¿por qué?



Resolvemos $x^2+3xy+y^2=4$ respecto a "y"

$$y_{\pm}=\frac{-3x\pm\sqrt{5x^2+16}}{2}.$$

Sustituimos y_+ en $d(x,y)$:

$$d_+(x)=x^2+\frac{(-3x\pm\sqrt{5x^2+16})^2}{4}$$

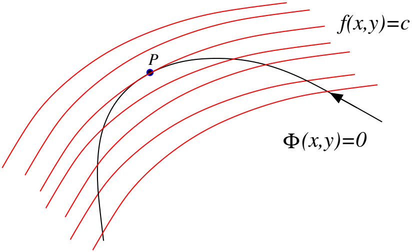
Calculamos los extremos de $d_+(x)$, $d'_+(x_0)=0$, signo$(d''(x_0))$:

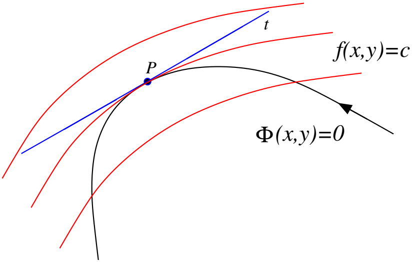
$$d'_+(x)=\frac{9\,x\sqrt{5\,x^2+16}-15\,x^2-24}{\sqrt{5\,x^2+16}}=0 \quad \Rightarrow x_1=-\frac{2}{\sqrt{5}}, \quad x_2=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

Solo sirve la segunda solución. Finalmente $d''_+(x_2)=24/5 \Rightarrow$ mínimo.

¿Es "bueno" este método? **NO** $g(x)$??? y ¿por qué no $x=h(y)$? etc

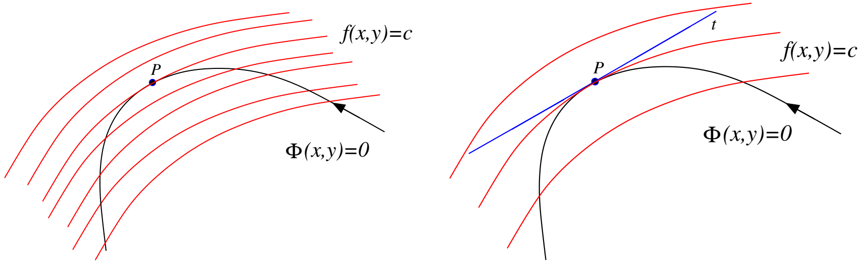
Queremos encontrar los extremos de la función $f(x, y)$ si sabemos que las variables satisfacen la ligadura $\Phi(x, y) = 0$.





En **rojo** las **curvas de nivel** de la función f, i.e., $f(x, y) = c$. Recorramos la curva $\Phi(x, y) = 0$ en contra de las manecillas del reloj y supongamos que f tiene un extremo a lo largo de la curva Φ en P. ¿Qué vemos?

Queremos encontrar los extremos de la función $f(x, y)$ si sabemos que las variables satisfacen la ligadura $\Phi(x, y) = 0$.



En **rojo** las **curvas de nivel** de la función f, i.e., $f(x, y) = c$. Recorramos la curva $\Phi(x, y) = 0$ en contra de las manecillas del reloj y supongamos que f tiene un extremo a lo largo de la curva Φ en P. ¿Qué vemos?

Si suponemos además que tanto la curva $f(x, y) = c_P$ como $\Phi(x, y) = 0$ son *suaves* entonces ambas tienen la misma recta t tangente en P.

La pendiente m de dicha recta tangente se calcula, en general, por la fórmula (TFI)

$$m = -\frac{f'_x(x_0, y_0)}{f'_y(x_0, y_0)}, \quad \text{o bien} \quad m = -\frac{\Phi'_x(x_0, y_0)}{\Phi'_y(x_0, y_0)}.$$

$\Rightarrow$

La pendiente m de dicha recta tangente se calcula, en general, por la fórmula (TFI)

$$m = -\frac{f'_x(x_0, y_0)}{f'_y(x_0, y_0)}, \quad \text{o bien} \quad m = -\frac{\Phi'_x(x_0, y_0)}{\Phi'_y(x_0, y_0)}.$$

$$\Rightarrow \quad \frac{f'_x(x_0, y_0)}{f'_y(x_0, y_0)} = \frac{\Phi'_x(x_0, y_0)}{\Phi'_y(x_0, y_0)} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{f'_x(x_0, y_0)}{\Phi'_x(x_0, y_0)} = \frac{f'_y(x_0, y_0)}{\Phi'_y(x_0, y_0)} = -\lambda.$$

La pendiente m de dicha recta tangente se calcula, en general, por la fórmula (TFI)

$$m = -\frac{f'_x(x_0, y_0)}{f'_y(x_0, y_0)}, \quad \text{o bien} \quad m = -\frac{\Phi'_x(x_0, y_0)}{\Phi'_y(x_0, y_0)}.$$

$$\Rightarrow \quad \frac{f'_x(x_0, y_0)}{f'_y(x_0, y_0)} = \frac{\Phi'_x(x_0, y_0)}{\Phi'_y(x_0, y_0)} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{f'_x(x_0, y_0)}{\Phi'_x(x_0, y_0)} = \frac{f'_y(x_0, y_0)}{\Phi'_y(x_0, y_0)} = -\lambda.$$

Es decir, que si en P hay un extremo de f cuando nos restringimos a la curva $\Phi(x, y) = 0$, entonces ha de cumplirse las siguientes condiciones:

$$\left\{ \begin{aligned} f'_x(x_0, y_0) + \lambda \Phi'_x(x_0, y_0) &= 0, \\ f'_y(x_0, y_0) + \lambda \Phi'_y(x_0, y_0) &= 0, \\ \Phi(x, y) &= 0, \end{aligned} \right.$$

donde λ es cierta constante. O sea, P ha de ser un **punto crítico** de la función de **tres** variables $L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda \Phi(x, y)$.

La función L se suele denominar **función de Lagrange** y la forma de encontrar el extremo según el sistema anterior es conocido como el **método de los coeficientes indeterminados de Lagrange**.

Nótese que lo anterior sólo nos da **condiciones necesarias.**

Si queremos una condición suficiente tenemos que calcular la segunda diferencial $d^2L(x_0, y_0)$ de L en el punto crítico P

La función L se suele denominar **función de Lagrange** y la forma de encontrar el extremo según el sistema anterior es conocido como el **método de los coeficientes indeterminados de Lagrange**.

Nótese que lo anterior sólo nos da **condiciones necesarias.**

Si queremos una condición suficiente tenemos que calcular la segunda diferencial $d^2L(x_0, y_0)$ de L en el punto crítico P y tener en cuenta que $\Phi(x, y) = 0$. La ligadura implica que los diferenciales dx y dy de las variables x e y en P **NO son independientes**. A partir de la ligadura tenemos la relación

$$d\Phi(x, y) = \Phi'_x(x_0, y_0)dx + \Phi'_y(x_0, y_0)dy = 0$$

La función L se suele denominar **función de Lagrange** y la forma de encontrar el extremo según el sistema anterior es conocido como el **método de los coeficientes indeterminados de Lagrange**.

Nótese que lo anterior sólo nos da **condiciones necesarias.**

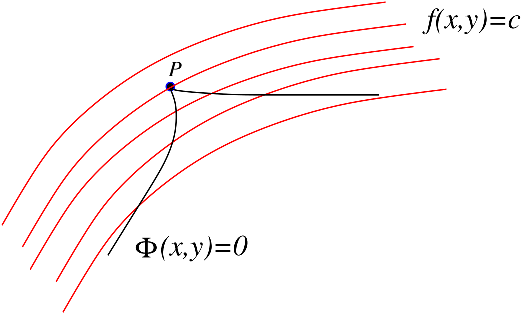
Si queremos una condición suficiente tenemos que calcular la segunda diferencial $d^2L(x_0, y_0)$ de L en el punto crítico P y tener en cuenta que $\Phi(x, y) = 0$. La ligadura implica que los diferenciales dx y dy de las variables x e y en P **NO son independientes**. A partir de la ligadura tenemos la relación

$$d\Phi(x, y) = \Phi'_x(x_0, y_0)dx + \Phi'_y(x_0, y_0)dy = 0$$

Sustituyendo dicha última relación en la expresión de $d^2L(x_0, y_0)$ obtendremos una forma cuadrática (en este caso de una única variable **independiente**) cuyo signo determinará el tipo de extremo.

Todo esto quedará más claro en los ejemplos.

Antes de continuar conviene observar que el método anterior falla si la curva Φ tiene picos pues puede ocurrir que el extremo se alcance justo en ese punto tal y como se muestra en la figura



Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ una función $f(x_1, x_2, \ldots, x_m, x_{m+1}, x_n)$ cuyas n variables no son independientes. i.e., satisfacen las ec. de ligadura

$$\begin{cases} \Phi_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0, \\ \Phi_2(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0, \\ \vdots \\ \Phi_m(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0. \end{cases}$$

Por simplicidad supondremos que todas las ecuaciones de ligadura son independientes. Sea $a \in A$. Asumiremos que el siguiente jacobiano es no nulo en todo un entorno de a

$$\det J_\Phi := \det \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \Phi_1(x)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial \Phi_1(x)}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial \Phi_1(x)}{\partial x_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial \Phi_m(x)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial \Phi_m(x)}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial \Phi_m(x)}{\partial x_m} \end{pmatrix} \neq 0$$

Teorema

Sea la función $f : A \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ *una función de clase* $C^{(1)}(A)$ *cuyas* n *variables satisfacen las ecuaciones de ligadura*

$$\Phi_1(x_1, \cdots, x_n) = 0, \quad \Phi_2(x_1, \cdots, x_n) = 0, \quad \Phi_m(x_1, \cdots, x_n) = 0,$$

y sea $a \in A$ *un extremo de* f. *Dicho extremo se suele denominar* **extremo condicionado de** f **por las ec. de ligadura**. *Entonces existen* m *constantes* λ_1, λ_2, ..., λ_m *reales t.q. la función* $L : \mathbb{R}^{n+m} \mapsto \mathbb{R}$, *denominada* **función de Lagrange**,

$$L(x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) = f(x_1, \ldots, x_n) + \lambda_1 \Phi_1(x_1, \ldots, x_n) + \cdots$$
$$+ \lambda_m \Phi_m(x_1, \ldots, x_n)$$

tiene un punto crítico en a.

Teorema

Sea la función $f : A \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ *una función de clase* $C^{(1)}(A)$ *cuyas* n *variables satisfacen las ecuaciones de ligadura*

$$\Phi_1(x_1, \cdots, x_n) = 0, \quad \Phi_2(x_1, \cdots, x_n) = 0, \quad \Phi_m(x_1, \cdots, x_n) = 0,$$

y sea $a \in A$ *un extremo de* f. *Dicho extremo se suele denominar* **extremo condicionado de** f **por las ec. de ligadura**. *Entonces existen* m *constantes* λ_1, λ_2, $\ldots$, λ_m *reales t.q. la función* $L : \mathbb{R}^{n+m} \mapsto \mathbb{R}$, *denominada* **función de Lagrange**,

$$L(x_1, \ldots, x_n, \lambda_1, \ldots, \lambda_m) = f(x_1, \ldots, x_n) + \lambda_1 \Phi_1(x_1, \ldots, x_n) + \cdots$$
$$+ \lambda_m \Phi_m(x_1, \ldots, x_n)$$

tiene un punto crítico en a.

Prueba: L tiene los mismos extremos que f con las ligaduras.

Como el sistema que define las ligaduras tiene solución en el punto $a \in A$, y el jacobiano $\det J_\Phi$ es distinto de cero, entonces por el teorema de la función implícita el sistema que define las ligaduras es resoluble en las variables $x_1, \ldots, x_m$, es decir, en un entorno de $a \in A$ existen las funciones $x_k = g_k(x_{m+1}, \ldots, x_n)$, $k = 1, 2, \ldots, m$ tales que

$$\Phi_k(g_1(x_{m+1}, \ldots, x_n), \ldots, g_m(x_{m+1}, \ldots, x_n), x_{m+1}, \ldots, x_n) = 0$$

son identidades en el entorno de $a \in A$.

Como el sistema que define las ligaduras tiene solución en el punto $a \in A$, y el jacobiano $\det J_\Phi$ es distinto de cero, entonces por el teorema de la función implícita el sistema que define las ligaduras es resoluble en las variables $x_1, \dots, x_m$, es decir, en un entorno de $a \in A$ existen las funciones $x_k = g_k(x_{m+1}, \dots, x_n)$, $k = 1, 2, \dots, m$ tales que

$$\Phi_k(g_1(x_{m+1}, \dots, x_n), \dots, g_m(x_{m+1}, \dots, x_n), x_{m+1}, \dots, x_n) = 0$$

son identidades en el entorno de $a \in A$.

O sea, en las condiciones dadas el problema del cálculo de un extremo condicionado se puede transformar en el de un extremo libre (sin ecuaciones de ligadura) sustituyendo las funciones x_k, $k = 1, \dots, m$ así obtenidas en la expresión de f, i.e, encontrando los extremos *libres* de la función

$$F(x_{m+1}, \dots, x_n) := f(g_1(x_{m+1}, \dots, x_n), \dots, g_m(x_{m+1}, \dots, x_n), x_{m+1}, \dots, x_n).$$

Como el sistema que define las ligaduras tiene solución en el punto $a \in A$, y el jacobiano $\det J_\Phi$ es distinto de cero, entonces por el teorema de la función implícita el sistema que define las ligaduras es resoluble en las variables $x_1, \dots, x_m$, es decir, en un entorno de $a \in A$ existen las funciones $x_k = g_k(x_{m+1}, \dots, x_n)$, $k = 1, 2, \dots, m$ tales que

$$\Phi_k(g_1(x_{m+1}, \dots, x_n), \dots, g_m(x_{m+1}, \dots, x_n), x_{m+1}, \dots, x_n) = 0$$

son identidades en el entorno de $a \in A$.

O sea, en las condiciones dadas el problema del cálculo de un extremo condicionado se puede transformar en el de un extremo libre (sin ecuaciones de ligadura) sustituyendo las funciones x_k, $k = 1, \dots, m$ así obtenidas en la expresión de f, i.e, encontrando los extremos *libres* de la función

$$F(x_{m+1}, \dots, x_n) := f(g_1(x_{m+1}, \dots, x_n), \dots, g_m(x_{m+1}, \dots, x_n), x_{m+1}, \dots, x_n).$$

Esto no es factible.

Como el sistema que define las ligaduras tiene solución en el punto $a \in A$, y el jacobiano $\det J_\Phi$ es distinto de cero, entonces por el teorema de la función implícita el sistema que define las ligaduras es resoluble en las variables $x_1, \ldots, x_m$, es decir, en un entorno de $a \in A$ existen las funciones $x_k = g_k(x_{m+1}, \ldots, x_n)$, $k = 1, 2, \ldots, m$ tales que

$$\Phi_k(g_1(x_{m+1}, \ldots, x_n), \ldots, g_m(x_{m+1}, \ldots, x_n), x_{m+1}, \ldots, x_n) = 0$$

son identidades en el entorno de $a \in A$.

O sea, en las condiciones dadas el problema del cálculo de un extremo condicionado se puede transformar en el de un extremo libre (sin ecuaciones de ligadura) sustituyendo las funciones x_k, $k = 1, \ldots, m$ así obtenidas en la expresión de f, i.e, encontrando los extremos *libres* de la función

$$F(x_{m+1}, \ldots, x_n) := f(g_1(x_{m+1}, \ldots, x_n), \ldots, g_m(x_{m+1}, \ldots, x_n), x_{m+1}, \ldots, x_n).$$

Esto no es factible.¡No siempre podemos resolver el sistema de ligaduras!

Está claro que **los extremos de f con las ligaduras son los mismos que los de la función de Lagrange L** , por tanto, la idea es encontrar los puntos críticos de L a partir de sus derivadas parciales, donde ahora las constantes indeterminadas λ_k, $k = 1, \ldots, m$ se consideran variables independientes.

Está claro que **los extremos de f con las ligaduras son los mismos que los de la función de Lagrange L**, por tanto, la idea es encontrar los puntos críticos de L a partir de sus derivadas parciales, donde ahora las constantes indeterminadas λ_k, $k = 1, \ldots, m$ se consideran variables independientes.

Eso nos conduce a un sistema de $n + m$ ecuaciones, a saber

$$\boxed{\frac{\partial L}{\partial x_k} = 0, \quad k = 1, \ldots, n, \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda_i} = 0, \quad i = 1, \ldots, m}$$

Nótese que las ecuaciones

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = \Phi_1 = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = \Phi_2 = 0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda_m} = \Phi_m = 0,$$

se transforman en las m ecuaciones de ligadura, que sabemos de antemano, que han de cumplirse. La solución del sistema nos proporciona cierta cantidad de **puntos críticos**.

Supongamos que $a = (x_0, \lambda_0) \in \mathbb{R}^{n+m}$ es uno de los puntos críticos. Para saber si dicho punto crítico es un extremo hemos de calcular la segunda diferencial de L en dicho punto:

$$d^2L(a) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 L(a)}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 L(a)}{\partial^2 \lambda_i} d\lambda_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial^2 L(a)}{\partial x_i \partial \lambda_j} dx_i d\lambda_j.$$

Supongamos que $a=(x_0,\lambda_0)\in\mathbb{R}^{n+m}$ es uno de los puntos críticos. Para saber si dicho punto crítico es un extremo hemos de calcular la segunda diferencial de L en dicho punto:

$$d^2L(a)=\sum_{i,j=1}^{n}\frac{\partial^2L(a)}{\partial x_i\partial x_j}dx_idx_j+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2L(a)}{\partial^2\lambda_i}d\lambda_i^2+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial^2L(a)}{\partial x_i\partial\lambda_j}dx_id\lambda_j.$$

Dado que $\dfrac{\partial L}{\partial\lambda_i}=\Phi_i(x_1,\cdots,x_n)=0$ es una identidad, entonces todas las derivadas de orden dos $\dfrac{\partial^2L(a)}{\partial^2\lambda_i}=\dfrac{\partial^2L(a)}{\partial x_i\partial\lambda_j}=0$ por lo que

$$\boxed{d^2L(a)=d^2f(a)\Big|_{\Phi_i(x_0)=0,\ i=1,\ldots,m}}$$

Lo anterior nos dice que debemos calcular la segunda diferencial en $a=(x_0,\lambda_0)$, pero teniendo en cuenta que **las diferenciales de las variables** dx_k**,** $k=1,\ldots,n$ **no son independientes**.

Para ello vamos a escribir las diferenciales de $\Phi_i(x_0)$, $i = 1, \dots, m$. Tomando diferenciales en ambos lados de las eq. de ligadura tenemos

$$d\Phi_i(x_0) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_k}(x_0) dx_k = 0, \quad k = 1, \dots, m.$$

El sistema anterior es un sistema lineal respecto a dx_1, ..., dx_m, cuyo determinante (que es el jacobiano) es distinto de cero en un entorno del punto crítico a por lo que existen ciertas funciones lineales $g_j : \mathbb{R}^{n-m} \mapsto \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, m$ tales que $dx_j = g_j(dx_{m+1}, \dots, dx_n) = A_{j,1} dx_{m+1} + \dots + A_{j,n-m} dx_n$, $j = 1, \dots, m$. Es decir *podemos resolverlo respecto a las diferenciales de las variables x_1, ..., x_m*.

Para ello vamos a escribir las diferenciales de $\Phi_i(x_0)$, $i = 1, \ldots, m$. Tomando diferenciales en ambos lados de las eq. de ligadura tenemos

$$d\Phi_i(x_0) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_k}(x_0) dx_k = 0, \quad k = 1, \ldots, m.$$

El sistema anterior es un sistema lineal respecto a dx_1, ..., dx_m, cuyo determinante (que es el jacobiano) es distinto de cero en un entorno del punto crítico a por lo que existen ciertas funciones lineales $g_j : \mathbb{R}^{n-m} \mapsto \mathbb{R}$, $j = 1, \ldots, m$ tales que $dx_j = g_j(dx_{m+1}, \ldots, dx_n) = A_{j,1}dx_{m+1} + \cdots + A_{j,n-m}dx_n$, $j = 1, \ldots, m$. Es decir *podemos resolverlo respecto a las diferenciales de las variables x_1, ..., x_m*.

Sustituyendo los valores de las diferenciales dx_1, ..., dx_m en la expresión de la segunda diferencial obtenemos la expresión de esta en las variables independientes. Estudiando el signo de la forma cuadrática resultante tal y como se indica en el teorema de la Cond. Suf. podremos decidir si el punto x_0 es un extremo o no de f bajo las condiciones de ligadura.

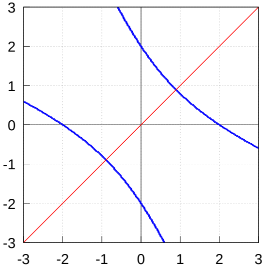
Hallar la distancia mínima del $(0,0)$ a la cónica $x^2 + 3xy + y^2 = 4$.

Resolvamos por este método el ejemplo anterior: Así hay que encontrar los extremos de la función $f(x,y) = x^2+y^2$ si $\Phi(x,y) = x^2+3xy+y^2-4 = 0$.

Hallar la distancia mínima del $(0,0)$ a la cónica $x^2+3xy+y^2=4$.

Resolvamos por este método el ejemplo anterior: Así hay que encontrar los extremos de la función $f(x,y)=x^2+y^2$ si $\Phi(x,y)=x^2+3xy+y^2-4=0$.

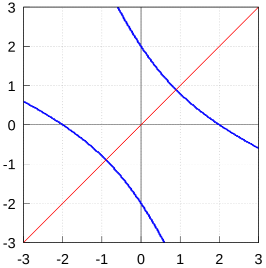
$$L(x,y,\lambda)=x^2+y^2+\lambda(x^2+3xy+y^2-4)$$



Hallar la distancia mínima del $(0,0)$ a la cónica $x^2+3xy+y^2=4$.

Resolvamos por este método el ejemplo anterior: Así hay que encontrar los extremos de la función $f(x,y)=x^2+y^2$ si $\Phi(x,y)=x^2+3xy+y^2-4=0$.

$$L(x,y,\lambda)=x^2+y^2+\lambda(x^2+3xy+y^2-4)$$



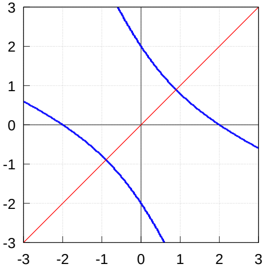
$$\frac{\partial L}{\partial x}=2x+\lambda(2x+3y)=0$$
$$\frac{\partial L}{\partial y}=2y+\lambda(2y+3x)=0$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}=x^2+3xy+y^2-4=0$$

Solución: $\lambda=-2/5$, $A(2/\sqrt{5},2/\sqrt{5})$ y $B(-2/\sqrt{5},-2/\sqrt{5})$,

$f(A)=f(B)=8/5$ ¿son realmente mínimos?

Resolvamos por este método el ejemplo anterior: Así hay que encontrar los extremos de la función $f(x,y) = x^2+y^2$ si $\Phi(x,y) = x^2+3xy+y^2-4 = 0$.

$$L(x,y,\lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(x^2 + 3xy + y^2 - 4)$$



$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2x + \lambda(2x+3y) = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial y} = 2y + \lambda(2y+3x) = 0$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = x^2 + 3xy + y^2 - 4 = 0$$

Solución: $\lambda = -2/5$, $A(2/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5})$ y $B(-2/\sqrt{5}, -2/\sqrt{5})$,

$f(A) = f(B) = 8/5$ ¿son realmente mínimos? $d^2L(x_0, y_0, \lambda)$ ...

Encontrar los extremos de la función $f(x,y)=x^2+y^2$ con la condición de ligadura $(x-3)^2+(y-4)^2=a^2$, con $a=10$ y $a=2$.

$$L(x,y,\lambda)=x^2+y^2+\lambda((x-3)^2+(y-4)^2-10^2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x}=2x+2\lambda(x-3)=0$$
$$\frac{\partial L}{\partial y}=2y+2\lambda(y-4)=0$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}=(x-3)^2+(y-4)^2-10^2=0$$

Encontrar los extremos de la función $f(x,y)=x^2+y^2$ con la condición de ligadura $(x-3)^2+(y-4)^2=a^2$, con $a=10$ y $a=2$.

$$L(x,y,\lambda)=x^2+y^2+\lambda((x-3)^2+(y-4)^2-10^2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x}=2x+2\lambda(x-3)=0$$
$$\frac{\partial L}{\partial y}=2y+2\lambda(y-4)=0$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}=(x-3)^2+(y-4)^2-10^2=0$$

Solución: $\lambda=-3/2$, $A(9,12)$ y $\lambda=-1/2$, $B(-3,-4)$,

$f(A)=225$, $f(B)=25 \Rightarrow A$ es máx y B mín.

Hallar la distancia máx y mín del $(0,0)$ a $(x-3)^2+(y-4)^2=a^2$.

Encontrar los extremos de la función $f(x,y)=x^2+y^2$ con la condición de ligadura $(x-3)^2+(y-4)^2=a^2$, con $a=10$ y $a=2$.

$$L(x,y,\lambda)=x^2+y^2+\lambda((x-3)^2+(y-4)^2-10^2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x}=2x+2\lambda(x-3)=0$$
$$\frac{\partial L}{\partial y}=2y+2\lambda(y-4)=0$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}=(x-3)^2+(y-4)^2-10^2=0$$

Solución: $\lambda=-3/2$, $A(9,12)$ y $\lambda=-1/2$, $B(-3,-4)$,

$f(A)=225$, $f(B)=25 \Rightarrow A$ es máx y B mín. **NO** necesito $d^2L(x_0,y_0,\lambda)$

Ejemplo: Encontrar en mínimo de $f(x, y) = xy$ si $x^2 + y^2 = 1$.

Ejemplo: Encontrar el máximo y mínimo absolutos de la función $f(x, y) = x^2 + y^2 - x - y + 1$ en la región definida por $x^2 + y^2 \leq 2$.

Ejemplo: Encontrar en mínimo de $f(x, y) = xy$ si $x^2 + y^2 = 1$.

Ejemplo: Encontrar el máximo y mínimo absolutos de la función $f(x, y) = x^2 + y^2 - x - y + 1$ en la región definida por $x^2 + y^2 \leq 2$. ¿Y si además $x \geq 0$?

Ejemplo: Hallar la distancia mínima del origen de coordenadas a la cónica de ecuación $x^2 + 6xy + y^2 + 4 = 0$ y encontrar dónde se alcanza.

Ejemplo: Encontrar todos los extremos relativos y el máximo y mínimo absolutos de la función $f(x, y) = x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 3$ en la región definida por $x^2 + y^2 + z^2 = 9$. ¿Y si nos restringimos a $S_1 = \{(x, y)|x^2 + y^2 + z^2 \leq 9\}$ y $S_2 = \{(x, y)|x^2 + y^2 + z^2 \leq 9,\, x \geq 0\}$

Problema. Sea la curva definida por la intersección de las superficies

$$x + y + z = 12, \qquad z = x^2 + y^2$$

Encontrar:

1. Los puntos de mayor y menor altura
2. Los punto más cercanos y más lejanos al origen

Problema. Sea la curva definida por la intersección de las superficies

$$x + y + z = 12, \qquad z = x^2 + y^2$$

Encontrar:

1. Los puntos de mayor y menor altura
2. Los punto más cercanos y más lejanos al origen

Problema. Sea la curva definida por la intersección de las superficies

$$x^2 + y^2 - z^2 - xy = 1, \qquad x^2 + y^2 = 8.$$

Encontrar los puntos más cercanos y más lejanos al origen.

Problema. Sea la curva definida por la intersección de las superficies

$$x^2 + y^2 + z^2 = 11, \qquad x + y + z = 3.$$

Encontrar los extremos absolutos de $f(x, y, z) = z^2 + 2x + 2y + 20$ sobre la curva anterior.

Problema. Sea la curva definida por la intersección de las superficies

$$x^2 + y^2 + z^2 = 11, \qquad x + y + z = 3.$$

Encontrar los extremos absolutos de $f(x, y, z) = z^2 + 2x + 2y + 20$ sobre la curva anterior.

Problema. Calcula los puntos del trozo de paraboloide definido por

$$z = x^2 + y^2, \qquad z \leq 3$$

que son más cercanos y más lejanos del punto $(3, 3, 1)$.