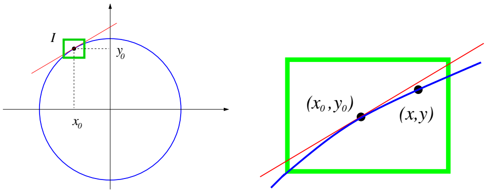
El teorema de la función implícita

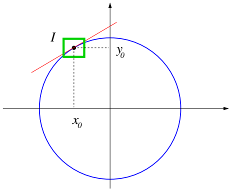
Renato Álvarez-Nodarse

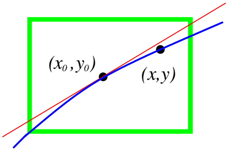
Universidad de Sevilla



https://renato.ryn-fismat.es/clases.html

¿Cuándo la ecuación $F(x, y) = 0$ define una función $y = f(x)$?

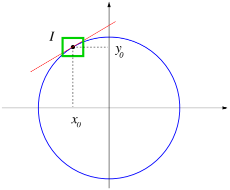




Problema: ¿cuándo $F(x, y) = 0$ define una función $y = f(x)$?

Problema: ¿cuándo $F(x, y) = 0$ define una función $y = f(x)$?

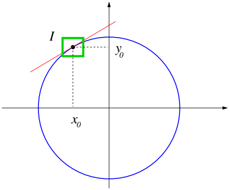
Para aclarar ideas: La Ec. $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ define una circunferencia en $\mathbb{R}^2$.



Ahora bien, si queremos despejar la y tenemos $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$. ¿Cuál de las dos ramas tomamos?

Problema: ¿cuándo $F(x, y) = 0$ define una función $y = f(x)$?

Para aclarar ideas: La Ec. $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ define una circunferencia en $\mathbb{R}^2$.

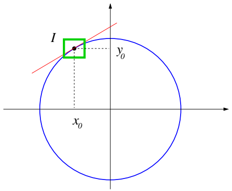


Ahora bien, si queremos despejar la y tenemos $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$. ¿Cuál de las dos ramas tomamos?

Una elección: $y = f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ que es continua en $[-1, 1]$ pero no es diferenciable en los extremos.

Problema: ¿cuándo $F(x,y)=0$ define una función $y=f(x)$?

Para aclarar ideas: La Ec. $F(x,y)=x^2+y^2-1=0$ define una circunferencia en $\mathbb{R}^2$.

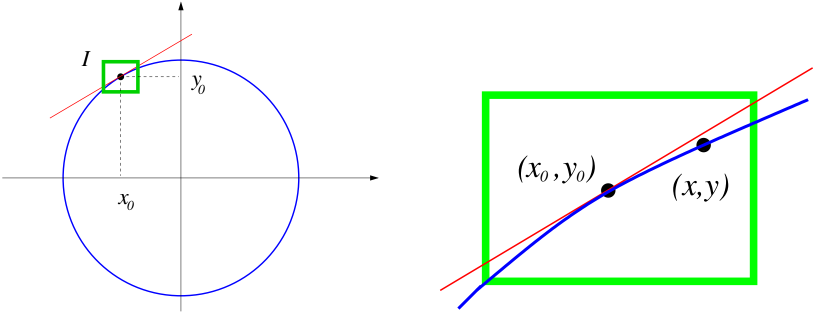


Ahora bien, si queremos despejar la y tenemos $y=\pm\sqrt{1-x^2}$. ¿Cuál de las dos ramas tomamos?

Una elección: $y=f(x)=\sqrt{1-x^2}$ que es continua en $[-1,1]$ pero no es diferenciable en los extremos.

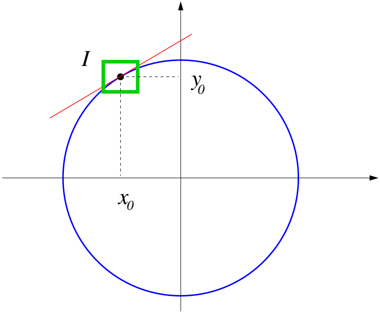
Otra elección: $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ si $x\in\mathbb{Q}$ y $f(x)=-\sqrt{1-x^2}$ si $x\in\mathbb{I}$

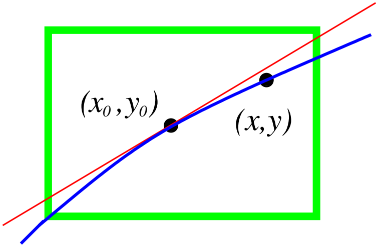
Sea la ecuación $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$



Entorno I (en verde) de (x_0, y_0) (ampliado a la derecha) donde podemos construir la **función implícita** $f(x)$ tal que $F(x, f(x)) = 0$.

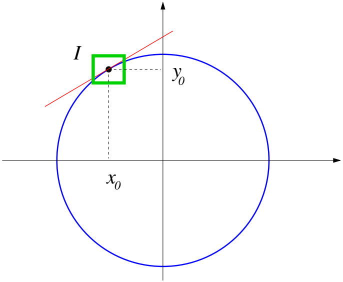
Sea la ecuación $F(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$

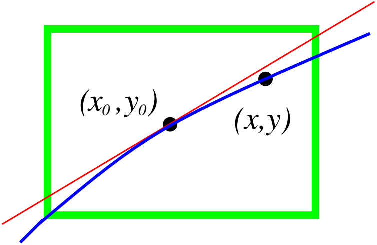




Entorno I (en verde) de (x_0, y_0) (ampliado a la derecha) donde podemos construir la **función implícita** $f(x)$ tal que $F(x, f(x)) = 0$.

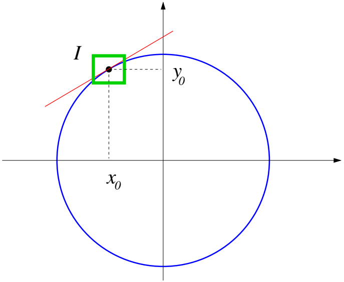
En rojo se representa el **plano** (recta) tangente a $F(x,y)$ en (x_0, y_0).

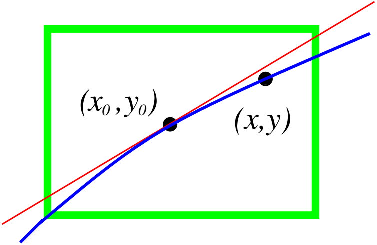




Si F es **diferenciable** en (x_0,y_0) entonces en un entorno de (x_0,y_0)

$$F(x,y) = F(x_0,y_0) + \frac{\partial F(x_0,y_0)}{\partial x}(x-x_0) + \frac{\partial F(x_0,y_0)}{\partial y}(y-y_0) + o(\|h\|).$$





Si F es **diferenciable** en (x_0,y_0) entonces en un entorno de (x_0,y_0)

$$F(x,y)=F(x_0,y_0)+\frac{\partial F(x_0,y_0)}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial F(x_0,y_0)}{\partial y}(y-y_0)+o(\|h\|).$$

Como $F(x_0,y_0)=0$ y $F(x,y)=0$ (¿por qué?) entonces

$$\boxed{\frac{\partial F(x_0,y_0)}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial F(x_0,y_0)}{\partial y}(y-y_0)\approx 0}$$

Solución: Aproximamos $F(x,y)$ por el plano tangente a (x_0,y_0) t.q. $F(x_0,y_0)=0$

$$\frac{\partial F(x_0,y_0)}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial F(x_0,y_0)}{\partial y}(y-y_0)\approx 0.$$

Solución: Aproximamos $F(x, y)$ por el plano tangente a (x_0, y_0) t.q. $F(x_0, y_0) = 0$

$$\frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0) \approx 0.$$

Luego un valor aproximado de y en función de x es

$$y - y_0 \approx - \left[\frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial y}\right]^{-1} \frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0).$$

$$\frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0) \approx 0.$$

Luego un valor aproximado de y en función de x es

$$y - y_0 \approx - \left[\frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial y}\right]^{-1} \frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0).$$

Como $y = f(x)$ y $y_0 = f(x_0)$ tenemos

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \approx - \left[\frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial y}\right]^{-1} \frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial x}$$

Solución: Aproximamos $F(x, y)$ por el plano tangente a (x_0, y_0) t.q. $F(x_0, y_0) = 0$

$$\frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0) \approx 0.$$

Luego un valor aproximado de y en función de x es

$$y - y_0 \approx - \left[\frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial y}\right]^{-1} \frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0).$$

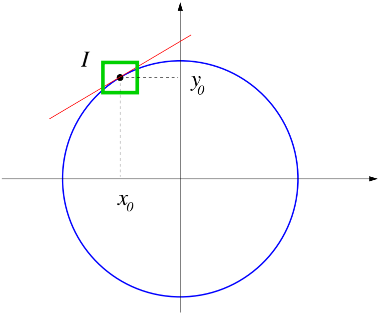
Como $y = f(x)$ y $y_0 = f(x_0)$ tenemos

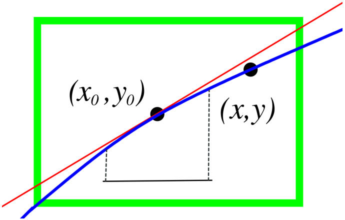
$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \approx - \left[\frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial y}\right]^{-1} \frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial x}$$

En el límite $\Delta x \to 0$ obtenemos un valor para $f'(x_0)$.

Nótese que para obtener y necesitamos que $\frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial y} \neq 0$.

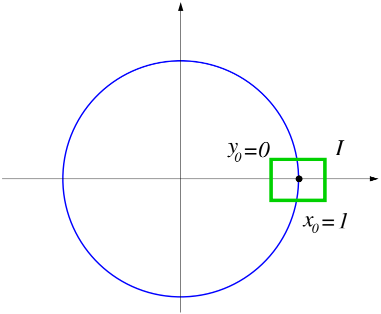
Como $F_y(x_0, y_0) = 2y_0 \neq 0 \ \forall y_0 \neq 0 \Rightarrow$ podremos definir una función f en cualquier entorno de (x_0, y_0), $x_0 \in (-1, 1)$ que escojamos siempre que $y_0 \neq 0$, i.e., $x_0 \neq \pm 1 \ldots$

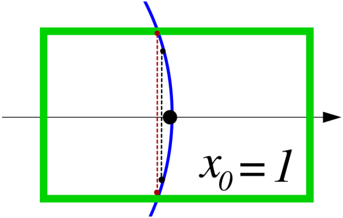




Apliquemos lo anterior a nuestro ejemplo $F(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$.

Como $F_y(x_0, y_0) = 2y_0 \neq 0 \ \forall y_0 \neq 0 \Rightarrow$ podremos definir una función f en cualquier entorno de (x_0, y_0), $x_0 \in (-1, 1)$ que escojamos siempre que $y_0 \neq 0$, i.e., $x_0 \neq \pm 1$ ... pero si $y_0 = 0$, i.e., $x_0 = \pm 1$





Teorema de la función implícita:

Caso de una ecuación

Sea $F : A \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, A abierto y sea $(x_0, y_0) \in A$. Supongamos que:

1. $F(x_0, y_0) := F(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n}, y_0) = 0$,
2. $F(x, y) := F(x_1, x_2, \dots, x_n, y) \in C^{(p)}(A)$, $p \geq 1$,
3. $F'_y(x_0, y_0) = \dfrac{\partial F(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n}, y_0)}{\partial y} \neq 0$.

Teorema de la función implícita

Sea $F : A \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, A abierto y sea $(x_0, y_0) \in A$. Supongamos que:

1. $F(x_0, y_0) := F(x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0n}, y_0) = 0$,
2. $F(x, y) := F(x_1, x_2, \ldots, x_n, y) \in C^{(p)}(A)$, $p \geq 1$,
3. $F'_y(x_0, y_0) = \dfrac{\partial F(x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0n}, y_0)}{\partial y} \neq 0$.

Entonces $\exists$ un abierto $I = (x_0 - h, x_0 + h) \times (y_0 - k, y_0 + k) := I_x \times I_y \subset A$, con $x_0 \in I_x$, $y_0 \in I_y$ y una función $f : I_x \subset \mathbb{R}^n \mapsto I_y \subset \mathbb{R}$ t.q.

1. $\boxed{F(x, y) = 0 \text{ en } I} \iff y = f(x)$, i.e., $\boxed{\forall x \in I_x,\ F(x, f(x)) = 0}$

Sea $F : A \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, A abierto y sea $(x_0, y_0) \in A$. Supongamos que:

1. $F(x_0, y_0) := F(x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0n}, y_0) = 0$,
2. $F(x, y) := F(x_1, x_2, \ldots, x_n, y) \in C^{(p)}(A)$, $p \geq 1$,
3. $F'_y(x_0, y_0) = \dfrac{\partial F(x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0n}, y_0)}{\partial y} \neq 0$.

Entonces $\exists$ un abierto $I = (x_0 - h, x_0 + h) \times (y_0 - k, y_0 + k) := I_x \times I_y \subset A$, con $x_0 \in I_x$, $y_0 \in I_y$ y una función $f : I_x \subset \mathbb{R}^n \mapsto I_y \subset \mathbb{R}$ t.q.

1. $\boxed{F(x, y) = 0 \text{ en } I} \iff y = f(x)$, i.e., $\boxed{\forall x \in I_x,\ F(x, f(x)) = 0}$
2. $\boxed{f(x) \in C^{(p)}(I_x)}$

Sea $F : A \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, A abierto y sea $(x_0, y_0) \in A$. Supongamos que:

1. $F(x_0, y_0) := F(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n}, y_0) = 0$,
2. $F(x, y) := F(x_1, x_2, \dots, x_n, y) \in C^{(p)}(A)$, $p \geq 1$,
3. $F'_y(x_0, y_0) = \dfrac{\partial F(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n}, y_0)}{\partial y} \neq 0$.

Entonces $\exists$ un abierto $I = (x_0 - h, x_0 + h) \times (y_0 - k, y_0 + k) := I_x \times I_y \subset A$, con $x_0 \in I_x$, $y_0 \in I_y$ y una función $f : I_x \subset \mathbb{R}^n \mapsto I_y \subset \mathbb{R}$ t.q.

1. $\boxed{F(x, y) = 0 \text{ en } I} \iff y = f(x)$, i.e., $\boxed{\forall x \in I_x,\ F(x, f(x)) = 0}$
2. $\boxed{f(x) \in C^{(p)}(I_x)}$
3. Para todo $x \in I_x$, las derivadas parciales de $f(x)$ se calculan por

$$\boxed{\frac{\partial f(x_1, \dots x_n)}{\partial x_i} = -[F'_y(x, f(x))]^{-1} \cdot [F'_{x_i}(x, f(x))]} \qquad i = 1, 2, \dots, n.$$

Prueba del teorema de la función implícita

Prueba TFI: ① $\exists f$, t.q. $F(x, f(x)) = 0$ en I

►Asumimos que $F'_y(x_0, y_0) > 0$, entonces, como $F'_y(x, y)$ es continua en $(x_0, y_0) \in A$, se tiene que existe todo un entorno $I = I_x \times I_y$ de (x_0, y_0) donde $F'_y(x, y) > 0$. Luego, $F(x, y)$ como función de y es estrictamente creciente. Como $F(x_0, y_0) = 0$ entonces tenemos que

$$0 > F(x_0, y_0 - k) < F(x_0, y_0) < F(x_0, y_0 + k) > 0.$$

►Asumimos que $F'_y(x_0, y_0) > 0$, entonces, como $F'_y(x, y)$ es continua en $(x_0, y_0) \in A$, se tiene que existe todo un entorno $I = I_x \times I_y$ de (x_0, y_0) donde $F'_y(x, y) > 0$. Luego, $F(x, y)$ como función de y es estrictamente creciente. Como $F(x_0, y_0) = 0$ entonces tenemos que

$$0 > F(x_0, y_0 - k) < F(x_0, y_0) < F(x_0, y_0 + k) > 0.$$

►Como $F(x, y)$ es continua en A entonces los signos de F se mantienen en todo un entorno de cada punto, i.e., existe un entorno I_x (que por simplicidad asumimos igual al de antes) tal que

$$0 > F(x, y_0 - k) < F(x_0, y_0) < F(x, y_0 + k) > 0, \qquad \forall x \in I_x.$$

Prueba TFI: ① $\exists f$, t.q. $F(x, f(x)) = 0$ en I

►Asumimos que $F'_y(x_0, y_0) > 0$, entonces, como $F'_y(x, y)$ es continua en $(x_0, y_0) \in A$, se tiene que existe todo un entorno $I = I_x \times I_y$ de (x_0, y_0) donde $F'_y(x, y) > 0$. Luego, $F(x, y)$ como función de y es estrictamente creciente. Como $F(x_0, y_0) = 0$ entonces tenemos que

$$0 > F(x_0, y_0 - k) < F(x_0, y_0) < F(x_0, y_0 + k) > 0.$$

►Como $F(x, y)$ es continua en A entonces los signos de F se mantienen en todo un entorno de cada punto, i.e., existe un entorno I_x (que por simplicidad asumimos igual al de antes) tal que

$$0 > F(x, y_0 - k) < F(x_0, y_0) < F(x, y_0 + k) > 0, \qquad \forall x \in I_x.$$

►$\forall x \in I_x$ la función $h(y) := F(x, y)$ es continua, $h'(y) = F_y(x, y) > 0$ en I, y cambia de signo en los extremos de I_y $\Rightarrow$ por el Teorema de Bolzano $\forall x \in I_x$ existe un único $y \in I_y$ tal que $F(x, y) = 0$ (la unicidad es consecuencia de la monotonía de h).

Definiendo $f : I_x \mapsto I_y$ t.q. para cada $x \in I_x$ le corresponda dicho y, i.e., $y = f(x)$, obtenemos una función que cumple con $F(x, f(x)) = 0$.

De la construcción anterior se sigue que:

$\forall \epsilon > 0$ (ϵ suficientemente pequeño para que $y_0 \pm \epsilon \in I_y$) $\exists \delta > 0$ lo suficientemente pequeño para que $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \in I_x$ y tal que $F(x, y)$ cambie de signo en los extremos de $[y_0 - \epsilon, y_0 + \epsilon]$.

De la construcción anterior se sigue que:

$\forall \epsilon > 0$ (ϵ suficientemente pequeño para que $y_0 \pm \epsilon \in I_y$) $\exists \delta > 0$ lo suficientemente pequeño para que $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \in I_x$ y tal que $F(x, y)$ cambie de signo en los extremos de $[y_0 - \epsilon, y_0 + \epsilon]$.

Luego $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que si $\|x - x_0\| < \delta$ entonces $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$.

Luego la $f(x)$ es continua.

▶Sea $y = f(x)$ y $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$, i.e., $f(x + \Delta x) = y + \Delta y$. Como f es continua en $I_y \Rightarrow \Delta y \to 0$ si $\Delta x \to 0$.

▶Sea $y = f(x)$ y $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$, i.e., $f(x+\Delta x) = y + \Delta y$. Como f es continua en $I_y \Rightarrow \Delta y \to 0$ si $\Delta x \to 0$.

▶Elegimos $\Delta x = he_i$, e_i i-ésimo vector de la base canónica de $\mathbb{R}^n$.

Como $F(x,y) = F(x+\Delta x, y+\Delta y) = 0$ entonces, por el teorema del valor medio para funciones escalares de varias variables, $\exists\theta \in (0,1)$ t.q.

$$0 = F(x+\Delta x, y+\Delta y) - F(x,y) = DF(x+\theta\Delta x, y+\theta\Delta y)\begin{pmatrix}\Delta x\\ \Delta y\end{pmatrix}$$
$$= \frac{\partial F(x+\theta he_i, y+\theta\Delta y)}{\partial x_i}h + \frac{\partial F(x+\theta he_i, y+\theta\Delta y)}{\partial y}\Delta y.$$

Como $F(x,y) \in C^{(1)}(I)$ entonces tomando límites $\Delta x \to 0 \Rightarrow$

$$0 = \frac{\partial F(x,y)}{\partial x_i} + \frac{\partial F(x,y)}{\partial y}\lim_{h\to 0}\frac{\Delta y}{h}.$$

Luego, si $\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial y} \neq 0 \Rightarrow$ existe el $\displaystyle\lim_{h\to 0}\frac{\Delta y}{h} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x_i} = -\frac{F'_{x_i}(x,y)}{F'_y(x,y)}$.

Prueba TFI: ② + ③ $f \in C^{(k)}(I_x)$

$$\text{Como} \quad \frac{\partial f(x_1, \dots x_n)}{\partial x_i} = -\frac{F'_{x_i}(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

y $f(x)$, F'_x y F'_y son continuas entonces f' es continua (¿por qué?).

$$\text{Como} \quad \frac{\partial f(x_1,\ldots x_n)}{\partial x_i} = -\frac{F'_{x_i}(x,f(x))}{F'_y(x,f(x))}, \quad i = 1,2,\ldots,n,$$

y $f(x)$, F'_x y F'_y son continuas entonces f' es continua (¿por qué?).

Derivando la expresión anterior se tiene que $f \in C^{(2)}(I_x)$ (¿por qué?).

$$\frac{\partial^2 f(x_1,\ldots x_n)}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\overbrace{[F''_{x_i x_j}(x,f(x)) + F''_{x_i y}(x,f(x)) f_{x_j}(x)]}^{\frac{\partial F_{x_i}(x,f(x))}{\partial x_j}} F'_y(x,f(x))}{[F'_y(x,f(x))]^2}$$

$$- \frac{F_{x_i}(x,f(x)) \overbrace{[F''_{yx_j}(x,f(x)) + F''_{yy}(x,f(x)) f_{x_j}(x)]}^{\frac{\partial F_y(x,f(x))}{\partial x_j}}}{[F'_y(x,f(x))]^2}$$

Y así, derivando sucesivamente, se deduce que $f \in C^{(p)}(I_x)$.

Ejemplo: Sea la ecuación $z^3 + 2(x+y)^2 z + e^{z-1} - 4 = 0$.

1. Prueba que la ecuación anterior define una función $z = f(x, y)$ en el entorno U del punto $(0, -1, 1)$ y que dicha función es una función $C^{(\infty)}(U)$ en dicho U.
2. Calcula las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ en dicho punto.
3. Escribe el polinomio de Taylor de orden 2 de f en $(0, -1, 1)$.

Solución:

Sea la función

$$F:\mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}, \quad F(x,y,z) = z^3 + 2(x+y)^2 z + e^{z-1} - 4$$

1) En el punto $(0,-1,1)$ se verifica la ecuación $F(0,-1,1) = 0$.

2) F es $C^{(p)}(\mathbb{R}^3)$ para todo $p \in \mathbb{N}$ y $F'_z(0,-1,1) = 6 \neq 0$.

En TFI nos dice que existe en todo un entorno de $(0,-1,1)$ una función $z = f(x,y)$, $f \in C^{(p)}(\mathbb{R}^2)$ para todo $p \in \mathbb{N}$ tal que $F(x,y,f(x,y)) = 0$ en dicho entorno de $(0,-1,1)$.

Sea la función

$$F : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}, \quad F(x, y, z) = z^3 + 2(x + y)^2 z + e^{z-1} - 4$$

1) En el punto $(0, -1, 1)$ se verifica la ecuación $F(0, -1, 1) = 0$.

2) F es $C^{(p)}(\mathbb{R}^3)$ para todo $p \in \mathbb{N}$ y $F'_z(0, -1, 1) = 6 \neq 0$.

En TFI nos dice que existe en todo un entorno de $(0, -1, 1)$ una función $z = f(x, y)$, $f \in C^{(p)}(\mathbb{R}^2)$ para todo $p \in \mathbb{N}$ tal que $F(x, y, f(x, y)) = 0$ en dicho entorno de $(0, -1, 1)$.

Para calcular las derivadas usamos que

$F'_x(0, -1, 1) = F'_y(0, -1, 1) = 4(x + y)z = -4 \Rightarrow$

$$\frac{\partial f(0, -1)}{\partial x} = -\frac{F'_x(0, -1, 1)}{F'_z(0, -1, 1)} = \frac{2}{3}, \quad \frac{\partial f(0, -1)}{\partial y} = -\frac{F'_y(0, -1, 1)}{F'_z(0, -1, 1)} = \frac{2}{3}.$$

Calculando derivadas de orden 2 en el punto $(0, -1, 1)$

$$F(x, y, z) = z^3 + 2(x + y)^2 z + e^{z-1} - 4 = 0$$

Como f es $C^{(\infty)}(\mathbb{R}^2)$ en un entorno de $(0, -1)$ entonces es diferenciable tantas veces como se quiera.

Derivando dos veces respecto a x la ecuación $F(x, y) = 0$ y considerando z como función de x, y y $z_x = z_y = 2/3$, tenemos:

$$2z_{xx}\,(y + x)^2 + 8z_x\,(y + x) + 3z^2 z_{xx} + e^{z-1} z_{xx} + (6z + e^{z-1}) z_x^2 + 4z = 0 \quad \Rrightarrow$$

$$z_{xx} = -\frac{8}{27}.$$

Derivando respecto a y dos obtenemos

$$2z_{yy}\,(y + x)^2 + 8z_y\,(y + x) + 3z^2 z_{yy} + e^{z-1} z_{yy} + (6z + e^{z-1}) z_y^2 + 4z = 0 \quad \Rrightarrow$$

$$z_{yy} = -\frac{8}{27}.$$

Respecto a x y y tenemos

$$2z_{xy}(y+x)^2 + \quad 4(z_y+z_x)(y+x) + 6zz_xz_y + \\ e^{z-1}z_xz_y + 3z^2z_{xy} + e^{z-1}z_{xy} + 4z = 0 \Rrightarrow$$

$$z_{xy} = -\frac{8}{27}.$$

Usando Taylor $z(x,y) = P_2(x,y) + o\left(x^2 + (y-1)^2\right)$

$$P_2(x,y) = \; z(0,-1) + Dz(0,-1)(x,y+1) + \tfrac{1}{2}D^2z(0,-1)(x,y+1)$$

$$= \; 1 + \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y+1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x & y+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{4}{27} & -\frac{4}{27} \\ -\frac{4}{27} & -\frac{4}{27} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y+1 \end{pmatrix}$$

Teorema de la función implícita:

Caso general

Sea el sistema de ecuaciones

$$\left\{\begin{array}{c} F_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m) = 0, \\ F_2(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m) = 0, \\ \vdots \\ F_m(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m) = 0, \end{array}\right.$$

donde $F_k : A \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}$, $k = 1, 2, \ldots, m$.

Denotando por $F(x, y)$ la función $F : A \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^m$ cuyas componentes son las F_k anteriores tenemos la ecuación

$$\boxed{F(x, y) = 0}.$$

Problema: ¿Existe una $f : I_x \subset \mathbb{R}^n \mapsto I_y \subset \mathbb{R}^m$ t.q. $F(x, f(x)) = 0$? $\Longleftrightarrow$ ¿existen m funciones $y_k = f_k(x) := f_k(x_1, \cdots, x_n)$ tales que $\forall k = 1, \ldots, m$,

$\boxed{F_k(x_1, \ldots, x_n, f_1(x), \ldots, f_m(x)) = 0}$ en un entorno de $(x_0, y_0) \in A$?

Veamos una idea intuitiva de como resolver el problema anterior en el caso $n = m = 2$.

$$F_1(x_1, x_2, y_1, y_2) = 0, \quad F_2(x_1, x_2, y_1, y_2) = 0$$

Derivamos ambas ecuaciones respecto a x_1 asumiendo que y_1 e y_2 dependen de x_1 y x_2. Usando la regla de la cadena tenemos:

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_1}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_1}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial F_2}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_1} = 0$$

En forma matricial

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial F_1}{\partial y_2} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial y_1} & \dfrac{\partial F_2}{\partial y_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial y_2}{\partial x_1} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial x_1} \end{pmatrix}$$

$$F_1(x_1, x_2, y_1, y_2) = 0, \quad F_2(x_1, x_2, y_1, y_2) = 0$$

Derivemos ahora ambas ecuaciones respecto a x_2 asumiendo que y_1 e y_2 dependen de x_1 y x_2. Usando la regla de la cadena tenemos:

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_2} + \frac{\partial F_1}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_2} + \frac{\partial F_1}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \frac{\partial F_2}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_2} + \frac{\partial F_2}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_2} = 0$$

En forma matricial

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial F_1}{\partial y_2} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial y_1} & \dfrac{\partial F_2}{\partial y_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial y_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial y_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

Juntando ambas:

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial F_1}{\partial y_2} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial y_1} & \dfrac{\partial F_2}{\partial y_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial y_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial F_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial F_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

El sistema $\boxed{F_1(x_1, x_2, y_1, y_2) = 0, \; F_2(x_1, x_2, y_1, y_2) = 0}$ se puede resolver respecto a y_1 e y_2 en cierto entorno U de un punto (a, b, c, d) tal que

$$F_1(a, b, c, d) = 0, \quad F_2(a, b, c, d) = 0$$

es decir, existe $y_1(x_1, x_2)$ e $y_2(x_1, x_2)$ tales que

$$F_1(x_1, x_2, y_1(x_1, x_2), y_2(x_1, x_2)) = 0, \quad F_2(x_1, x_2, y_1(x_1, x_2), y_2(x_1, x_2)) = 0,$$

$\iff$ la matriz $\boxed{F'_y := \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial F_1}{\partial y_2} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial y_1} & \dfrac{\partial F_2}{\partial y_2} \end{pmatrix}}$ es invertible ($\det F'_y \neq 0$).

El sistema $\boxed{F_1(x_1,x_2,y_1,y_2)=0,\ F_2(x_1,x_2,y_1,y_2)=0}$ se puede resolver respecto a y_1 e y_2 en cierto entorno U de un punto (a,b,c,d) tal que

$$F_1(a,b,c,d)=0, \quad F_2(a,b,c,d)=0$$

es decir, existe $y_1(x_1,x_2)$ e $y_2(x_1,x_2)$ tales que

$$F_1(x_1,x_2,y_1(x_1,x_2),y_2(x_1,x_2))=0, \quad F_2(x_1,x_2,y_1(x_1,x_2),y_2(x_1,x_2))=0,$$

$\iff$ la matriz $\boxed{F'_y := \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial F_1}{\partial y_2} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial y_1} & \dfrac{\partial F_2}{\partial y_2} \end{pmatrix}}$ es invertible ($\det F'_y \neq 0$).

Además, la solución se expresa mediante la fórmula

$$\boxed{\begin{pmatrix} \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial y_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial F_1}{\partial y_2} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial y_1} & \dfrac{\partial F_2}{\partial y_2} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial F_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial F_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}}$$

Sea $x_0 := (x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n})$ e $y_0 := (y_{01}, y_{02}, \dots, y_{0m})$ y denotemos por I_x el intervalo $[x_0 - h, x_0 + h]$ y por I_y el intervalo $[y_0 - k, y_0 + k]$.

Definamos las matrices (apliaciones lineales)

$$f' : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m, \quad f'(x) := Df(x) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1(x)}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_1(x)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m(x)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_m(x)}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_m(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

$$F'_x : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m, \quad F'_x(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1(x,y)}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_1(x,y)}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial F_m(x,y)}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_m(x,y)}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

$$F'_y : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^m, \quad F'_y(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1(x,y)}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_1(x,y)}{\partial y_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial F_m(x,y)}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_m(x,y)}{\partial y_m} \end{pmatrix}$$

Nótese que $F'_y(x,y)$ es una matriz cuadrada que será invertible si y sólo si $\det F'_y(x,y) \neq 0$.

Teorema de la función implícita: caso general

Sea $F : A \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^m$, $A \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ abierto y sea $(x_0, y_0) \in A$. Supongamos que:

1. $F(x_0, y_0) = 0$,
2. $F(x, y) \in C^{(p)}(A)$, $p \geq 1$,
3. $\det F'_y(x_0, y_0) \neq 0$ o sea, $F'_y(x, y)$ es una matriz invertible.

Sea $F : A \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^m$, $A \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ abierto y sea $(x_0, y_0) \in A$. Supongamos que:

1. $F(x_0, y_0) = 0$,
2. $F(x, y) \in C^{(p)}(A)$, $p \geq 1$,
3. $\det F'_y(x_0, y_0) \neq 0$ o sea,$F'_y(x, y)$ es una matriz invertible.

Entonces existe un intervalo $I = [x_0 - h, x_0 + h] \times [y_0 - k, y_0 + k]$ alrededor del punto (x_0, y_0), $I \subset A$, y una función $f : I_x \subset \mathbb{R}^n \mapsto I_y \subset \mathbb{R}^m$ t.q.

1. $F(x, y) = 0$ en $I \iff y = f(x)$, i.e., $\boxed{F(x, f(x)) = 0}$ en I
2. $\boxed{f(x) \in C^{(p)}(I_x)}$.
3. Para todo $x \in I_x$, la diferencial de $f(x)$ se calcula por

$$\boxed{f'(x) := Df(x) = -[F'_y(x, f(x))]^{-1} \cdot [F'_{x_i}(x, f(x))]} \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Teorema de la función implícita: caso general

Sea $F : A \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^m$, $A \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ abierto y sea $(x_0, y_0) \in A$. Supongamos que:

1. $F(x_0, y_0) = 0$,
2. $F(x, y) \in C^{(p)}(A)$, $p \geq 1$,
3. $\det F'_y(x_0, y_0) \neq 0$ o sea, $F'_y(x, y)$ es una matriz invertible.

Entonces existe un intervalo $I = [x_0 - h, x_0 + h] \times [y_0 - k, y_0 + k]$ alrededor del punto (x_0, y_0), $I \subset A$, y una función $f : I_x \subset \mathbb{R}^n \mapsto I_y \subset \mathbb{R}^m$ t.q.

1. $F(x, y) = 0$ en $I \iff y = f(x)$, i.e., $\boxed{F(x, f(x)) = 0}$ en I
2. $\boxed{f(x) \in C^{(p)}(I_x)}$.
3. Para todo $x \in I_x$, la diferencial de $f(x)$ se calcula por

$$\boxed{f'(x) := Df(x) = -[F'_y(x, f(x))]^{-1} \cdot [F'_{x_i}(x, f(x))]} \qquad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Prueba: La prueba se hace por inducción en m, el número de ecuaciones, siendo el primer paso de la inducción el TFI para una ecuación.

Ejemplo. Sea el sistema
$$\begin{cases} (x-1)^2 + y^2 - z = 0 & (1) \\ x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 & (2) \end{cases}$$
Decidir si este sistema se puede resolver de forma que existan las funciones $y = y(x)$ y $z = z(x)$ y calcular los valores de $y'(x)$ y $z'(x)$.

Ejemplo. Sea el sistema $\begin{cases} (x-1)^2 + y^2 - z = 0 & (1) \\ x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 & (2) \end{cases}$

Decidir si este sistema se puede resolver de forma que existan las funciones $y = y(x)$ y $z = z(x)$ y calcular los valores de $y'(x)$ y $z'(x)$.

M1: $\det F'_y(x, y, z) = \det \begin{pmatrix} 2y & -1 \\ 2y & 2z \end{pmatrix} = 2y(2z+1) \neq 0 \Rightarrow y \neq 0,\ z \neq -\dfrac{1}{2}.$

Ejemplo. Sea el sistema $\begin{cases} (x-1)^2 + y^2 - z = 0 & (1) \\ x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 & (2) \end{cases}$

Decidir si este sistema se puede resolver de forma que existan las funciones $y = y(x)$ y $z = z(x)$ y calcular los valores de $y'(x)$ y $z'(x)$.

M1: $\det F'_y(x,y,z) = \det \begin{pmatrix} 2y & -1 \\ 2y & 2z \end{pmatrix} = 2y(2z+1) \neq 0 \Rightarrow y \neq 0,\ z \neq -\dfrac{1}{2}.$

$$\begin{pmatrix} y'(x) \\ z'(x) \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 2y & -1 \\ 2y & 2z \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2(x-1) \\ 2x \end{pmatrix} = -\frac{1}{y(2z+1)} \begin{pmatrix} 2zx - 2z + x \\ 2y \end{pmatrix}.$$

Ejemplo. Sea el sistema $\begin{cases} (x-1)^2 + y^2 - z = 0 & (1) \\ x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 & (2) \end{cases}$

Decidir si este sistema se puede resolver de forma que existan las funciones $y = y(x)$ y $z = z(x)$ y calcular los valores de $y'(x)$ y $z'(x)$.

M1: $\det F_y'(x,y,z) = \det \begin{pmatrix} 2y & -1 \\ 2y & 2z \end{pmatrix} = 2y(2z+1) \neq 0 \Rightarrow y \neq 0,\ z \neq -\dfrac{1}{2}.$

$$\begin{pmatrix} y'(x) \\ z'(x) \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 2y & -1 \\ 2y & 2z \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2(x-1) \\ 2x \end{pmatrix} = -\frac{1}{y(2z+1)} \begin{pmatrix} 2zx - 2z + x \\ 2y \end{pmatrix}.$$

M2: (2)-(1) $\quad (2z+1)z_x + 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad z_x = -\dfrac{2}{2z+1}$

$$y(2z+1)y_x + 2z(x-1) - x = 0 \quad \Rightarrow \quad y_x = -\frac{2z(x-1)-x}{y(2z+1)}$$

Además $y \neq 0$, $z \neq -\frac{1}{2}$.

Ejemplos

Ejemplo 1: Sea $F(x, y, z) = x^2 y + e^x + z = 0$. ¿Qué puntos (b, c) definen una función $x(y, z)$ tal que $x(b, c) = 0$? Calcula, si es posible, $\frac{\partial x}{\partial y}$ y $\frac{\partial x}{\partial z}$.

Ejemplo 1: Sea $F(x,y,z) = x^2y + e^x + z = 0$. ¿Qué puntos (b,c) definen una función $x(y,z)$ tal que $x(b,c) = 0$? Calcula, si es posible, $\frac{\partial x}{\partial y}$ y $\frac{\partial x}{\partial z}$.

Ejemplo 2: $F(x,y,z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - r^2 = 0$. ¿Se pueden encontrar $z = f(x,y)$? ¿Cuánto valen $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y}$? Encuentra la ecuación del plano tangente a la superficie definida por $F(x,y,z) = 0$, $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

Ejemplo 1: Sea $F(x,y,z) = x^2y + e^x + z = 0$. ¿Qué puntos (b,c) definen una función $x(y,z)$ tal que $x(b,c) = 0$? Calcula, si es posible, $\frac{\partial x}{\partial y}$ y $\frac{\partial x}{\partial z}$.

Ejemplo 2: $F(x,y,z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - r^2 = 0$. ¿Se pueden encontrar $z = f(x,y)$? ¿Cuánto valen $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y}$? Encuentra la ecuación del plano tangente a la superficie definida por $F(x,y,z) = 0$, $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

Ejemplo 3: $F(x,y,z) = y^2z + x\log z - x = 0$, se sabe que $z(1,-1) = 1$. Encontrar el polinomio de Taylor de orden 2 de z en el punto $(1,-1)$.

Ejemplo 1: Sea $F(x,y,z) = x^2y + e^x + z = 0$. ¿Qué puntos (b,c) definen una función $x(y,z)$ tal que $x(b,c) = 0$? Calcula, si es posible, $\frac{\partial x}{\partial y}$ y $\frac{\partial x}{\partial z}$.

Ejemplo 2: $F(x,y,z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - r^2 = 0$. ¿Se pueden encontrar $z = f(x,y)$? ¿Cuánto valen $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial z}{\partial y}$? Encuentra la ecuación del plano tangente a la superficie definida por $F(x,y,z) = 0$, $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

Ejemplo 3: $F(x,y,z) = y^2z + x\log z - x = 0$, se sabe que $z(1,-1) = 1$. Encontrar el polinomio de Taylor de orden 2 de z en el punto $(1,-1)$.

Ejemplo 4: Probar que existen funciones f y g de clase $\mathcal{C}^\infty$ definidas en un entorno de $(1,1)$, tales que $f(1,1) = -1$, $g(1,1) = 0$ que verifican las ecuaciones:

$$f(x,y)^3 + xg(x,y)^2 + y = 0, \qquad g(x,y)^3 + yg(x,y) + f(x,y)^2 = x.$$

Calcula todas las derivadas parciales de orden 1 de f y g.

Teorema de la función inversa

Supongamos que tenemos la ecuación $f(x) = y$, $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ y queremos resolverla. Para ello la reescribiremos de la forma $F(x, y) = f(x) - y = 0$.

Lo que queremos es saber si esta ecuación es resoluble respecto a x, i.e., si existe una función $x = g(y)$ de forma tal que $F(g(y), y) = 0$ para todo y de cierto intervalo dado.

Supongamos que tenemos la ecuación $f(x) = y$, $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ y queremos resolverla. Para ello la reescribiremos de la forma $F(x, y) = f(x) - y = 0$.

Lo que queremos es saber si esta ecuación es resoluble respecto a x, i.e., si existe una función $x = g(y)$ de forma tal que $F(g(y), y) = 0$ para todo y de cierto intervalo dado.

Si en el intervalo I_y existe la solución definiendo I_x el conjunto de las x tales que $x = g(y)$ tendremos dos funciones $f(x)$ y $g(y)$ que son mutuamente inversas. Es decir, encontrando las condiciones que nos permiten resolver la ecuación $F(x, y) = 0$ respecto a x, sabremos en que condiciones $f(x)$ es invertible.

Supongamos que tenemos la ecuación $f(x) = y$, $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ y queremos resolverla. Para ello la reescribiremos de la forma $F(x, y) = f(x) - y = 0$.

Lo que queremos es saber si esta ecuación es resoluble respecto a x, i.e., si existe una función $x = g(y)$ de forma tal que $F(g(y), y) = 0$ para todo y de cierto intervalo dado.

Si en el intervalo I_y existe la solución definiendo I_x el conjunto de las x tales que $x = g(y)$ tendremos dos funciones $f(x)$ y $g(y)$ que son mutuamente inversas. Es decir, encontrando las condiciones que nos permiten resolver la ecuación $F(x, y) = 0$ respecto a x, sabremos en que condiciones $f(x)$ es invertible.

Pero eso es justo lo que nos afirma el Teorema de la función implícita.

Para resolver la ec. $f(x) - y = F(x, y) = 0$ respecto a x es suficiente que:

❶ F sea $C^{(p)}(A)$, con A cierto entorno abierto de cierto (x_0, y_0) que satisface la ecuación $f(x_0) = y_0$

❷ $F'_x(x_0, y_0) = f'(x_0) \neq 0$

Entonces el TFI nos dice que existe en un entorno $V(y_0)$ de y_0 cierta función $x = g(y)$ tal que $F(g(y), y) = 0 \Rightarrow f(g(y)) = y$ y además g es $C^{(p)}(V(y_0))$ y su derivada se expresará por

$$g'(y_0) = -\frac{F'_y(x_0, y_0)}{F'_x(x_0, y_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Teorema (de la función inversa)

Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ *definida en un entorno del punto* $x_0 \in A$ *tal que*

1. $f(x) \in C^{(p)}(A)$, $p \geq 1$,
2. $f(x_0) = y_0$, *en* x_0,
3. $f'(x_0)$ *es una aplicación invertible.*

Entonces existe un entorno abierto $U(x_0) \subset A$ *de* $x_0 \in A$ *y otro* $V(y_0) \subset f(A)$ *de* $y_0 \in f(A)$ *tal que* f *es invertible en* $U(x_0)$*, i.e.,*

1. *Existe su inversa* $f^{-1} : V(y_0) \mapsto U(x_0)$,
2. $f^{(-1)} \in C^{(p)}(V(y_0))$,
3. *Para todo* $x \in U(x_0)$ *e* $y = f(x) \in V(y_0)$ *se tiene que*

$$(f^{-1}(y))' := Df^{-1}(y) = [f'(x)]^{-1} := [Df(x)]^{-1}.$$

Demostración: Sea $F(x, y) = f(x) - y$. Como $f(x) \in C^{(p)}(A)$, entonces F lo es en un entorno de (x_0, y_0). Además $F(x_0, y_0) = 0$ y $F'_x(x_0, y_0) = f'(x_0)$ es invertible, luego el T.F.I. implica que existe $x = g(y)$ en un entorno de y_0 t.q. $f(g(y)) = y$, i.e., f es invertible.

Usando que $F'_y = -I_n$ (matriz identidad) se deduce que $Df^{-1}(y_0) = [Df(x_0)]^{-1}$, con $y_0 = f(x_0)$.

Demostración: Sea $F(x,y) = f(x) - y$. Como $f(x) \in C^{(p)}(A)$, entonces F lo es en un entorno de (x_0, y_0). Además $F(x_0, y_0) = 0$ y $F'_x(x_0, y_0) = f'(x_0)$ es invertible, luego el T.F.I. implica que existe $x = g(y)$ en un entorno de y_0 t.q. $f(g(y)) = y$, i.e., f es invertible.

Usando que $F'_y = -I_n$ (matriz identidad) se deduce que $Df^{-1}(y_0) = [Df(x_0)]^{-1}$, con $y_0 = f(x_0)$.

Ejemplo: Sea la función lineal $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ definida por $y = f(x) = Ax$, donde A es una matriz real $n \times n$. Es obvio que f es $C^{(p)}(\mathbb{R}^n)$ para todo $p \in \mathbb{N}$. Podemos además tomar cualquier $x \in \mathbb{R}^n$ y definir $y = Ax$.

La derivada (total) de f es la matriz A. Entonces si A es invertible (o equivalentemente, si el Jacobiano de f, que es $\det A$ es diferente de cero), entonces f es invertible. Además $Df^{-1} = [Df]^{-1}$, i.e., $[Df(x)]^{-1} = A^{-1}$.