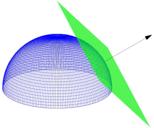
Diferenciación en $\mathbb{R}^n$: Derivadas de orden superior

Renato Álvarez-Nodarse

Universidad de Sevilla



https://renato.ryn-fismat.es/clases.html

Derivadas parciales de orden superior

Supongamos que $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, A es un abierto de $\mathbb{R}^n$ tiene derivadas parciales $D_i f = \dfrac{\partial f(x)}{\partial x_i}$ en A, $i = 1, \ldots, n$.

Supongamos que $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, A es un abierto de $\mathbb{R}^n$ tiene derivadas parciales $D_i f = \dfrac{\partial f(x)}{\partial x_i}$ en A, $i = 1, \ldots, n$. Supongamos que dichas derivadas parciales $D_i f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ admiten a su vez derivadas parciales $D_j(\cdot)$ en A. Dichas derivadas parciales se denominan derivadas parciales de segundo orden y se denotan por

$$D_j(D_i f)(x) = D_{j,i} f(x) = \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_j \partial x_i}, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n.$$

Supongamos que $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, A es un abierto de $\mathbb{R}^n$ tiene derivadas parciales $D_i f = \dfrac{\partial f(x)}{\partial x_i}$ en A, $i = 1, \ldots, n$. Supongamos que dichas derivadas parciales $D_i f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ admiten a su vez derivadas parciales $D_j(\cdot)$ en A. Dichas derivadas parciales se denominan derivadas parciales de segundo orden y se denotan por

$$D_j(D_i f)(x) = D_{j,i} f(x) = \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_j \partial x_i}, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n.$$

Si las funciones $D_{j,i} f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ admiten derivadas parciales entonces podemos definir las derivadas parciales de orden 3

$$D_k(D_j(D_i f))(x) = D_{k,j,i} f(x) = \frac{\partial^3 f(x)}{\partial x_k \partial x_j \partial x_i}, \quad i, j, k = 1, 2, \ldots, n.$$

Y así, sucesivamente.

Una pregunta natural es si las derivadas cruzadas son iguales, i.e.,

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Ejemplo 1: $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ definida por $f(x, y, z) = e^{xy} + z\cos(x)$.

Una pregunta natural es si las derivadas cruzadas son iguales, i.e.,

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Ejemplo 1: $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ definida por $f(x, y, z) = e^{xy} + z \cos(x)$.

Ejemplo 2. $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 \arctan \dfrac{y}{x} - y^2 \arctan \dfrac{x}{y}, & \text{si } xy \neq 0, \\ 0, & \text{si } xy = 0. \end{cases}$$

Una pregunta natural es si las derivadas cruzadas son iguales, i.e.,

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Ejemplo 1: $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ definida por $f(x, y, z) = e^{xy} + z\cos(x)$.

Ejemplo 2. $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 \arctan\dfrac{y}{x} - y^2 \arctan\dfrac{x}{y}, & \text{si } xy \neq 0, \\ 0, & \text{si } xy = 0. \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial x} = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \quad (x, y) \neq (0, 0).$$

Una pregunta natural es si las derivadas cruzadas son iguales, i.e.,

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Ejemplo 1: $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ definida por $f(x, y, z) = e^{xy} + z\cos(x)$.

Ejemplo 2. $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 \arctan \dfrac{y}{x} - y^2 \arctan \dfrac{x}{y}, & \text{si } xy \neq 0, \\ 0, & \text{si } xy = 0. \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y \partial x} = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \quad (x, y) \neq (0, 0).$$

¿Qué ocurre en $(0, 0)$?

Una pregunta natural es si las derivadas cruzadas son iguales, i.e.,

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Ejemplo 1: $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ definida por $f(x, y, z) = e^{xy} + z\cos(x)$.

Ejemplo 2. $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 \arctan \dfrac{y}{x} - y^2 \arctan \dfrac{x}{y}, & \text{si } xy \neq 0, \\ 0, & \text{si } xy = 0. \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial x} = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \quad (x, y) \neq (0, 0).$$

¿Qué ocurre en $(0, 0)$?

$$\frac{\partial^2 f(0, 0)}{\partial x \partial y} = 1,$$

Una pregunta natural es si las derivadas cruzadas son iguales, i.e.,

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Ejemplo 1: $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ definida por $f(x, y, z) = e^{xy} + z \cos(x)$.

Ejemplo 2. $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 \arctan \dfrac{y}{x} - y^2 \arctan \dfrac{x}{y}, & \text{si } xy \neq 0, \\ 0, & \text{si } xy = 0. \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial x} = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \quad (x, y) \neq (0, 0).$$

¿Qué ocurre en $(0, 0)$?

$$\frac{\partial^2 f(0, 0)}{\partial x \partial y} = 1, \quad \frac{\partial^2 f(0, 0)}{\partial y \partial x} = -1.$$

Teorema (Schwarz)

Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ con A abierto, y sea $x_0 \in A$. Si en A existen las derivadas parciales $\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_i}$, $\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_j}$ y $\dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_j \partial x_i}$ y la derivada $\dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_j \partial x_i}$ es continua en x_0, entonces en A existe la derivada $\dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j}$ y

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Teorema (Schwarz)

Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *con* A *abierto, y sea* $x_0 \in A$. *Si en* A *existen las derivadas parciales* $\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_i}$, $\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_j}$ *y* $\dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_j \partial x_i}$ *y la derivada* $\dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_j \partial x_i}$ *es continua en* x_0, *entonces en* A *existe la derivada* $\dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j}$ *y*

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Corolario (Bonnet)

Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *con* A *abierto, y sea* $a \in A$ *tal que existen las derivadas parciales* $\dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_j \partial x_i}$ *y* $\dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j}$ *en un entorno de* $a \in A$ *y ambas son continuas en* a. *Entonces* $\dfrac{\partial^2 f(a)}{\partial x_j \partial x_i} = \dfrac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i \partial x_j}$.

Teorema (Heffter-Young)

Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$*, A abierto y sea* $a \in A$*. Supongamos que existen las derivadas parciales* $\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_i}$*, y* $\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_j}$ *en un entorno de a y son diferenciables en a. Entonces* $\dfrac{\partial^2 f(a)}{\partial x_j \partial x_i} = \dfrac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i \partial x_j}$.

Teorema (Heffter-Young)

Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, A abierto y sea $a \in A$. Supongamos que existen las derivadas parciales $\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_i}$, y $\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_j}$ en un entorno de a y son diferenciables en a. Entonces $\dfrac{\partial^2 f(a)}{\partial x_j \partial x_i} = \dfrac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i \partial x_j}$.

Tanto el Teorema de Schwarz como el de Heffter-Young dan condiciones suficientes. Para comprobarlo escojamos la función

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 y \sin \dfrac{1}{x}, & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Dicha f cumple con las condiciones de ambos teoremas en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,a), \forall a \in \mathbb{R}\}$, pero

Teorema (Heffter-Young)

Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, A abierto y sea $a \in A$. Supongamos que existen las derivadas parciales $\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_i}$, y $\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_j}$ en un entorno de a y son diferenciables en a. Entonces $\dfrac{\partial^2 f(a)}{\partial x_j \partial x_i} = \dfrac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i \partial x_j}$.

Tanto el Teorema de Schwarz como el de Heffter-Young dan condiciones suficientes. Para comprobarlo escojamos la función

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 y \sin \dfrac{1}{x}, & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Dicha f cumple con las condiciones de ambos teoremas en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,a), \forall a \in \mathbb{R}\}$, pero en $(0,0)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ no es continua y $\frac{\partial f}{\partial x}$ no es diferenciable.

Diferenciales de orden superior

Definición

Diremos que $f \in C^{(k)}(A)$ *si* f *admite todas las derivadas parciales hasta orden* k *y estas son continuas en* A.

Definición

Diremos que $f \in C^{(k)}(A)$ si f admite todas las derivadas parciales hasta orden k y estas son continuas en A.

Supongamos que $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es diferenciable en A.

Entonces podemos definir la derivada (diferencial) de f $\forall x \in A$. Además Df es lineal y acotada (¿por qué?).

Definición

Diremos que $f \in C^{(k)}(A)$ si f admite todas las derivadas parciales hasta orden k y estas son continuas en A.

Supongamos que $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es diferenciable en A.

Entonces podemos definir la derivada (diferencial) de f $\forall x \in A$. Además Df es lineal y acotada (¿por qué?).

Sea $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ el espacio de todas las aplicaciones lineales acotadas de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^m$, entonces como para cada $x \in A$ existe $Df(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, podemos definir la aplicación

$$Df : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m).$$

Se puede probar que el espacio $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ es un espacio normado (en la norma de las aplicaciones lineales que vimos antes).

Antes de ver como definir las derivadas (diferenciales) de orden superior conviene generalizar el concepto de diferenciabilidad a cualquier espacio normado.

Antes de ver como definir las derivadas (diferenciales) de orden superior conviene generalizar el concepto de diferenciabilidad a cualquier espacio normado.

Definición

Diremos que una aplicación $g : E \subset \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$, *siendo* $\mathbb{X}$ *e* $\mathbb{Y}$ *dos espacios normados, es diferenciable en* $a \in \mathbb{X}$ *si existe una aplicación lineal acotada de* $L(a) : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ *tal que*

$$g(a+h) - g(a) - L(a)h = o(\|h\|).$$

Antes de ver como definir las derivadas (diferenciales) de orden superior conviene generalizar el concepto de diferenciabilidad a cualquier espacio normado.

Definición

Diremos que una aplicación $g : E \subset \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$*, siendo* $\mathbb{X}$ *e* $\mathbb{Y}$ *dos espacios normados, es diferenciable en* $a \in \mathbb{X}$ *si existe una aplicación lineal acotada de* $L(a) : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ *tal que*

$$g(a+h) - g(a) - L(a)h = o(\|h\|).$$

Así, si $\mathbb{X} = \mathbb{R}^n$ y $\mathbb{Y} = \mathbb{R}^m$, recuperamos la definición de diferenciabilidad con la que hemos trabajado hasta ahora.

Antes de ver como definir las derivadas (diferenciales) de orden superior conviene generalizar el concepto de diferenciabilidad a cualquier espacio normado.

Definición

Diremos que una aplicación $g : E \subset \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$, *siendo* $\mathbb{X}$ *e* $\mathbb{Y}$ *dos espacios normados, es diferenciable en* $a \in \mathbb{X}$ *si existe una aplicación lineal acotada de* $L(a) : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ *tal que*

$$g(a+h) - g(a) - L(a)h = o(\|h\|).$$

Así, si $\mathbb{X} = \mathbb{R}^n$ y $\mathbb{Y} = \mathbb{R}^m$, recuperamos la definición de diferenciabilidad con la que hemos trabajado hasta ahora.

Como $\forall x \in A$, $Df(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ y este espacio es normado (¿por qué?) entonces podemos definir la diferencial de Df.

Definición

Diremos que f *es dos veces diferenciable en un punto* $a \in A \in \mathbb{R}^n$ *si* Df *es diferenciable en* a *y denotaremos a la derivada segunda de* f *en* a *por* $D^2 f(a)$.

Definición

Diremos que f es dos veces diferenciable en un punto $a \in A \in \mathbb{R}^n$ si Df es diferenciable en a y denotaremos a la derivada segunda de f en a por $D^2 f(a)$.

Nótese que de lo anterior se sigue que $D^2 f(a)$ es una aplicación lineal de $\mathbb{R}^n$ en $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, o sea,

$$D^2 f(a) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m))$$

Definición

Diremos que f es dos veces diferenciable en un punto $a \in A \in \mathbb{R}^n$ si Df es diferenciable en a y denotaremos a la derivada segunda de f en a por $D^2 f(a)$.

Nótese que de lo anterior se sigue que $D^2 f(a)$ es una aplicación lineal de $\mathbb{R}^n$ en $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, o sea,

$$D^2 f(a) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m))$$

Extendiendo este procedimiento tenemos que la derivada tercera $D^3 f(a)$ será una aplicación lineal de $\mathbb{R}^n$ en $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m))$, $D^4 f(a)$ será una apl. lineal de $\mathbb{R}^n$ en $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)))$, y así sucesivamente.

Analicemos el caso de la segunda derivada. Asumiremos que $f \in C^2(A)$ y $a \in A \in \mathbb{R}^n$.

Como vimos $D^2 f(a)$ es una aplicación lineal de $\mathbb{R}^n$ en $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$:

$$D^2 f(a) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m))$$

Pero el espacio $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m))$ es isométrico al espacio de las aplicaciones bilineales $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.

Así, $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$, $D^2 f(a)(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ y $\big(D^2 f(a)(x)\big)(y) \in \mathbb{R}^m$.

Es decir, $D^2 f(a)$ es la aplicación bilineal $D^2 f(a)$ definida por $D^2 f(a) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$

$$\mathbf{D^2 f(a)(x, y)} = \big(\mathbf{D^2 f(a)(x)}\big)(\mathbf{y}).$$

Si f es dos veces diferenciable en a, $D^2 f(a)$ puede ser interpretada como una aplicación bilineal $B(x, y)$ de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$.

Si f es dos veces diferenciable en a, $D^2 f(a)$ puede ser interpretada como una aplicación bilineal $B(x, y)$ de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$.

Las aplicaciones bilineales $B(x, y)$ de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$ se identifican con las matrices $n \times n$ mediante la expresión $B(x, y) = x^T \cdot B \cdot y$.

Si f es dos veces diferenciable en a, $D^2 f(a)$ puede ser interpretada como una aplicación bilineal $B(x, y)$ de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$.

Las aplicaciones bilineales $B(x, y)$ de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$ se identifican con las matrices $n \times n$ mediante la expresión $B(x, y) = x^T \cdot B \cdot y$.

Como $D^2 f(a)$ se obtiene "derivando" Df entonces la matriz asociada a $D^2 f(a)$ tiene por entradas las segundas derivadas parciales de f:

$$D^2 f(a) = \begin{pmatrix} D_{11} f(a) & \cdots & D_{n1} f(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{1n} f(a) & \cdots & D_{nn} f(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f(a)}{\partial^2 x_1} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f(a)}{\partial x_n \partial x_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 f(a)}{\partial x_1 \partial x_n} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f(a)}{\partial^2 x_n} \end{pmatrix} := H_f(a).$$

Es conveniente mencionar que al ser $f \in C^2(A)$, todas las derivadas cruzadas son iguales. La matriz $\mathbf{H_f(a)}$ anterior se denomina **matriz hessiana** de f.

Por inducción es posible probar que si f es k veces diferenciable en a entonces la derivada (diferencial) k-ésima de f aplicada a un vector $h \in \mathbb{R}^n$ se expresa por

$$D^k f(a)(h) = \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_k=1}^{n} \frac{\partial^k f(a)}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_k}} h_{i_1} \cdots h_{i_k},$$

o, equivalentemente,

$$\boxed{D^k f(a)(h) = \left(h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + h_n \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^k f(a)}$$

donde hemos usado la notación $D^k f(a)(h) := D^k f(a)(h, h, \ldots, h)$ (recuérdese que $D^k f(a)$ es una aplicación multilineal (k-lineal).

Ejemplo: Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$, $f \in C^k(A)$ y sea $l : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^n$, $l(t) = x + th$, $t \in \mathbb{R}$, $x, h \in \mathbb{R}^n$.

Definamos la función $\phi : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, $\phi(t) = (f \circ l)(t)$. Como f y l son diferenciables con todas sus derivadas hasta orden k continuas entonces $\phi \in C^k([0,1])$. Calculemos las derivadas sucesivas de ϕ,

$$\phi'(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x + ht)}{\partial x_i} h_i$$

Ejemplo: Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$, $f \in C^k(A)$ y sea $l : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^n$, $l(t) = x + th$, $t \in \mathbb{R}$, $x, h \in \mathbb{R}^n$.

Definamos la función $\phi : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, $\phi(t) = (f \circ l)(t)$. Como f y l son diferenciables con todas sus derivadas hasta orden k continuas entonces $\phi \in C^k([0,1])$. Calculemos las derivadas sucesivas de ϕ,

$$\phi'(t) \;=\; \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x+ht)}{\partial x_i} h_i = \left(h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + h_n \frac{\partial}{\partial x_n} \right) f(x+ht),$$

Ejemplo: Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$, $f \in C^k(A)$ y sea $l : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^n$, $l(t) = x + th$, $t \in \mathbb{R}$, $x, h \in \mathbb{R}^n$.

Definamos la función $\phi : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, $\phi(t) = (f \circ l)(t)$. Como f y l son diferenciables con todas sus derivadas hasta orden k continuas entonces $\phi \in C^k([0,1])$. Calculemos las derivadas sucesivas de ϕ,

$$\phi'(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x+ht)}{\partial x_i} h_i = \left(h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + h_n \frac{\partial}{\partial x_n} \right) f(x+ht),$$

$$\begin{aligned} \phi''(t) &= \frac{d}{dt}\left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x+ht)}{\partial x_i} h_i\right] = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x+ht)}{\partial x_i} h_i\right] h_j \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(x+ht)}{\partial x_j \partial x_i} h_i h_j \end{aligned}$$

Ejemplo: Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$, $f \in C^k(A)$ y sea $l : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^n$, $l(t) = x + th$, $t \in \mathbb{R}$, $x, h \in \mathbb{R}^n$.

Definamos la función $\phi : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, $\phi(t) = (f \circ l)(t)$. Como f y l son diferenciables con todas sus derivadas hasta orden k continuas entonces $\phi \in C^k([0,1])$. Calculemos las derivadas sucesivas de ϕ,

$$\phi'(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x+ht)}{\partial x_i} h_i = \left(h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + h_n \frac{\partial}{\partial x_n} \right) f(x+ht),$$

$$\begin{aligned} \phi''(t) &= \frac{d}{dt} \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x+ht)}{\partial x_i} h_i \right] = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x+ht)}{\partial x_i} h_i \right] h_j \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(x+ht)}{\partial x_j \partial x_i} h_i h_j = \left(h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + h_n \frac{\partial}{\partial x_n} \right)^2 f(x+ht), \end{aligned}$$

En general

$$\phi^{(k)}(t) = \sum_{i_1,\cdots,i_k=1}^{n} \frac{\partial^k f(x+ht)}{\partial x_{i_1}\cdots\partial x_{i_k}} h_{i_1}\cdots h_{i_k} = \left(h_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\cdots+h_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^k f(x+ht)$$

En general

$$\phi^{(k)}(t) = \sum_{i_1,\cdots,i_k=1}^{n} \frac{\partial^k f(x+ht)}{\partial x_{i_1}\cdots\partial x_{i_k}} h_{i_1}\cdots h_{i_k} = \left(h_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\cdots+h_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^k f(x+ht)$$

El cálculo de la derivada k-ésima arbitraria es muy engorroso, es por ello conveniente usar un paquete de cálculo simbólico (e.g. MAXIMA CAS).

En general

$$\phi^{(k)}(t) = \sum_{i_1,\cdots,i_k=1}^{n} \frac{\partial^k f(x+ht)}{\partial x_{i_1}\cdots\partial x_{i_k}} h_{i_1}\cdots h_{i_k} = \left(h_1\frac{\partial}{\partial x_1}+\cdots+h_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^k f(x+ht)$$

El cálculo de la derivada k-ésima arbitraria es muy engorroso, es por ello conveniente usar un paquete de cálculo simbólico (e.g. MAXIMA CAS).

Definición

Dado un $a \in A$ y $h \in \mathbb{R}^n$ definiremos al intervalo (cerrado) $[a, a+h]$ como el conjunto $[a_1, a_1+h_1] \times [a_2, a_2+h_2] \times \cdots \times [a_n, a_n+h_n]$.

Theorem (de Taylor con resto de Lagrange)

Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$, $f \in C^k(A)$; $[a, a+h] \subset A$, $h \neq 0$:

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{l=1}^{k-1} \frac{1}{l!} D^l f(a)(h) + r_k(a,h),$$

$$r_k(a,h) = \frac{1}{k!} D^k f(a+\xi h)(h), \quad \xi \in (0,1).$$

Theorem (de Taylor con resto de Lagrange)

Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$, $f \in C^k(A)$; $[a, a+h] \subset A$, $h \neq 0$:

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{l=1}^{k-1} \frac{1}{l!} D^l f(a)(h) + r_k(a,h),$$

$$r_k(a,h) = \frac{1}{k!} D^k f(a+\xi h)(h), \quad \xi \in (0,1).$$

Corolario (Teorema local de Taylor)

En las mismas condiciones del Teorema anterior:

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{l=1}^{k} \frac{1}{l!} D^l f(a)(h) + o(\|h\|^k).$$

Theorem (de Taylor con resto de Lagrange)

Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$, $f \in C^k(A)$; $[a, a+h] \subset A$, $h \neq 0$:

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{l=1}^{k-1} \frac{1}{l!} D^l f(a)(h) + r_k(a,h),$$

$$r_k(a,h) = \frac{1}{k!} D^k f(a+\xi h)(h), \quad \xi \in (0,1).$$

Corolario (Teorema local de Taylor)

En las mismas condiciones del Teorema anterior:

$$f(a+h) = f(a) + \sum_{l=1}^{k} \frac{1}{l!} D^l f(a)(h) + o(\|h\|^k).$$

Ambos resultados se pueden generalizar a $f : A \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$

El corolario anterior nos indica otra manera de entender la diferenciabilidad en $\mathbb{R}^n$. Por sencillez, lo mostraremos en el caso de una función dos veces diferenciable. Si f tiene derivadas parciales de orden dos y estas son continuas entonces

$$f(a+h) - f(a) - Df(a)(h) - \frac{1}{2}D^2f(a)(h) = o(\|h\|^2), \qquad (*)$$

donde $D^f(a)(h)$ es la forma bilineal

$$D^2f(a)(h) = \sum_{i_1=1}^{n}\sum_{i_2=1}^{n} \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_{i_1}\partial x_{i_2}} h_{i_1}h_{i_2} = h^T H_f(a)h.$$

Así pues f es dos veces diferenciable si existen la apliación lineal $Df(a)$ y la bilineal $D^2f(a)$ tales que (*) sea cierta.

El razonamiento anterior es fácilmente generalizable a cualquier $k \geq 3$.

Además, lo anterior nos indica que podemos restringirnos por simplicidad al caso cuando las funciones $f \in C^k(A)$.

En ese caso diremos que $f : A \in \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$, es k **veces diferenciable** en a si f es $C^k(A)$ siendo A un abierto tal que $a \in A$ de forma que, por el teorema de Taylor tenemos asegurado que f es k veces diferenciable en A en el sentido antes explicado para funciones dos veces diferenciables

En otras palabras, si existen las formas k-lineales $Df(a)$ $D^2f(a), \ldots,$ $D^kf(a)$ tales que

$$f(a+h) - f(a) - \sum_{l=1}^{k} \frac{1}{l!} D^l f(a)(h) = o(\|h\|^k)$$