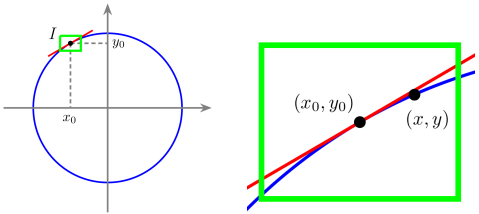
El teorema de la función implícita

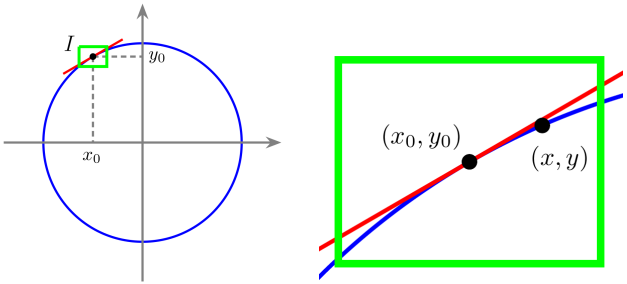
Renato Álvarez-Nodarse

Universidad de Sevilla



https://renato.ryn-fismat.es/clases.html

¿Cuándo la ecuación $F(x, y) = 0$ define una función $y = f(x)$?

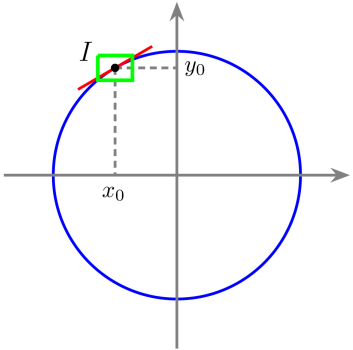


Problema: ¿cuándo $F(x, y) = 0$ define una función $y = f(x)$?

Para aclarar ideas: La ecuación

$$F(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$$

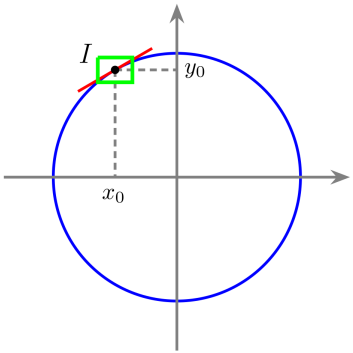
define una circunferencia en $\mathbb{R}^2$.



Para aclarar ideas: La ecuación

$$F(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$$

define una circunferencia en $\mathbb{R}^2$.



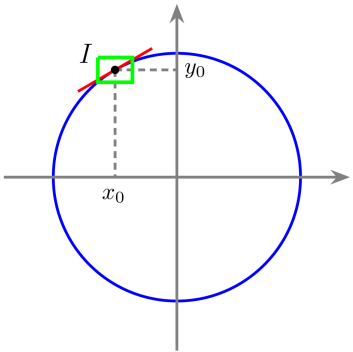
Una posibilidad: despejamos la $y \Rightarrow y = \pm\sqrt{1 - x^2}$, pero . . . ¿cuál de las dos ramas elegir?

Problema: ¿cuándo $F(x, y) = 0$ define una función $y = f(x)$?

Para aclarar ideas: La ecuación

$$F(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$$

define una circunferencia en $\mathbb{R}^2$.



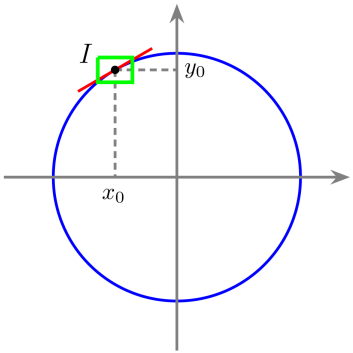
Una posibilidad: despejamos la $y \Rightarrow y = \pm\sqrt{1 - x^2}$, pero . . . ¿cuál de las dos ramas elegir?

Una elección: $y = f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ es continua en $[-1, 1]$ pero no es diferenciable en ± 1.

Para aclarar ideas: La ecuación

$$F(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$$

define una circunferencia en $\mathbb{R}^2$.

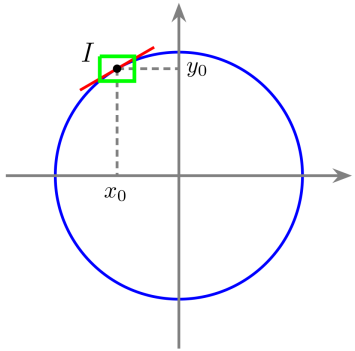


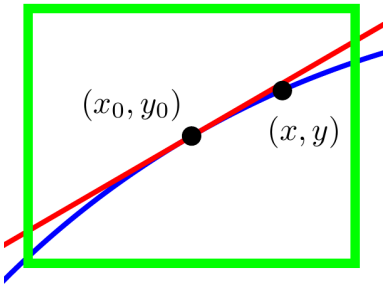
Una posibilidad: despejamos la $y \Rightarrow y = \pm\sqrt{1 - x^2}$, pero . . . ¿cuál de las dos ramas elegir?

Una elección: $y = f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ es continua en $[-1, 1]$ pero no es diferenciable en ± 1.

Otra elección: $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ si $x \in \mathbb{Q}$ y $f(x) = -\sqrt{1 - x^2}$ si $x \in \mathbb{I}$

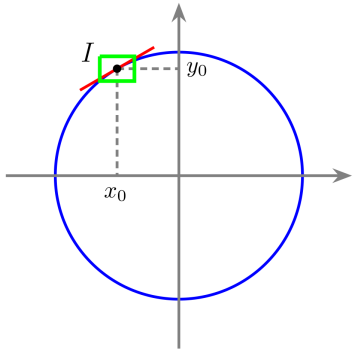
Sea la Ec. $F(x,y) = 0$ y elijamos un pto. (x_0, y_0) t.q. $F(x_0, y_0) = 0$

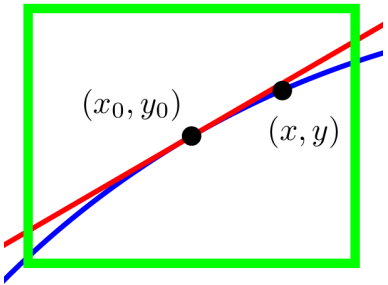




Sea I un entorno (en verde) de (x_0, y_0) (ampliado a la derecha) donde podemos construir la **función implícita** $y = f(x)$ tal que $F(x, f(x)) = 0$.

Sea la Ec. $F(x,y) = 0$ y elijamos un pto. (x_0, y_0) t.q. $F(x_0, y_0) = 0$

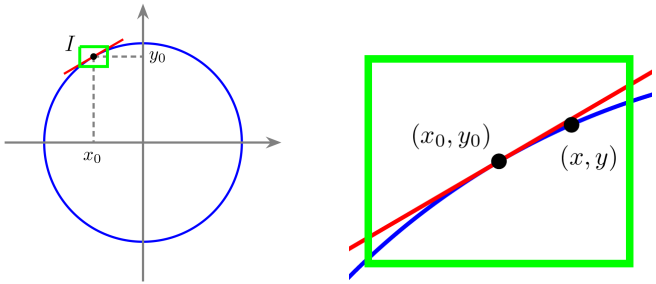




Sea I un entorno (en verde) de (x_0, y_0) (ampliado a la derecha) donde podemos construir la **función implícita** $y = f(x)$ tal que $F(x, f(x)) = 0$.

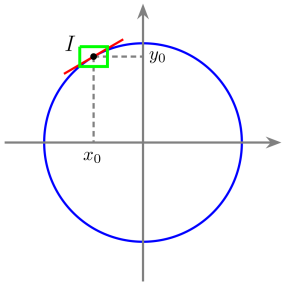
En rojo se representa el **plano** (recta) tangente a $F(x,y)$ en (x_0, y_0).

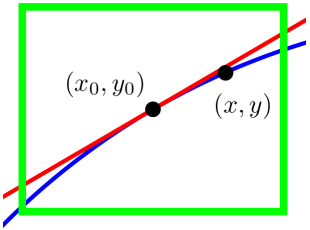
Dibujamos $F(x, y)$ así como el plano tangente a (x_0, y_0) t.q. $F(x_0, y_0) = 0$



Si F es **diferenciable** en (x_0, y_0) entonces en un entorno de (x_0, y_0)

$$F(x, y) = F(x_0, y_0) + \frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0) + o(\|h\|).$$





Si F es **diferenciable** en (x_0, y_0) entonces en un entorno de (x_0, y_0)

$$F(x, y) = F(x_0, y_0) + \frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0) + o(\|h\|).$$

Como $F(x_0, y_0) = 0$ y $F(x, y) = 0$ (¿por qué?) entonces

$$\frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial y}(y - y_0) \approx 0$$

Recordemos que $y = y(x) := f(x)$ y que $y_0 = f(x_0)$ ...

$$\frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial y}(y(x) - y_0) \approx 0.$$

$$\frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial y}(y(x) - y_0) \approx 0.$$

Luego, siempre que $\dfrac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial y} \neq 0$, podemos obtener un valor aproximado de la función $y(x)$ en función de x:

$$y(x) - y_0 \approx -\left[\frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial y}\right]^{-1} \frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0).$$

$$\frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial y}(y(x) - y_0) \approx 0.$$

Luego, siempre que $\dfrac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial y} \neq 0$, podemos obtener un valor aproximado de la función $y(x)$ en función de x:

$$y(x) - y_0 \approx -\left[\frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial y}\right]^{-1} \frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0).$$

Como $y = f(x)$ y $y_0 = f(x_0)$ tenemos

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \approx -\left[\frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial y}\right]^{-1} \frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial x}$$

$$\frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial y}(y(x) - y_0) \approx 0.$$

Luego, siempre que $\dfrac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial y} \neq 0$, podemos obtener un valor aproximado de la función $y(x)$ en función de x:

$$y(x) - y_0 \approx -\left[\frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial y}\right]^{-1} \frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial x}(x - x_0).$$

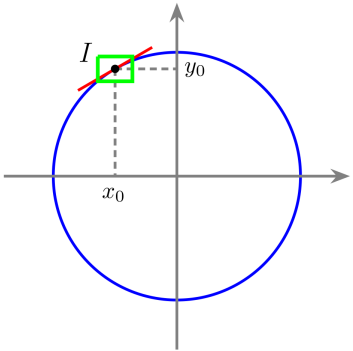
Como $y = f(x)$ y $y_0 = f(x_0)$ tenemos

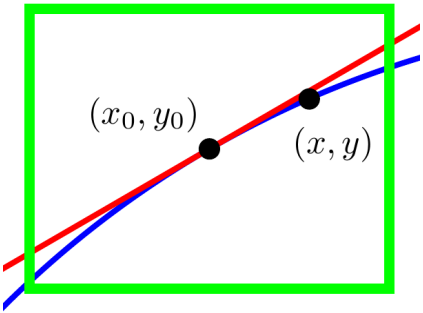
$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} \approx -\left[\frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial y}\right]^{-1} \frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial x}$$

En el límite $\Delta x \to 0$ la fórmula anterior nos da un valor para $f'(x_0)$.

Apliquemos lo anterior a nuestro ejemplo $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$.

Como $F_y(x_0, y_0) = 2y_0 \neq 0$, entonces $\forall y_0 \neq 0 \Rightarrow$ podremos definir una función f en cualquier entorno de (x_0, y_0), $x_0 \in (-1, 1)$ que escojamos. Nótese que $y_0 \neq 0 \iff x_0 \neq \pm 1 \ldots$

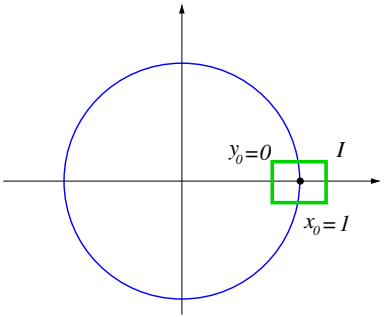


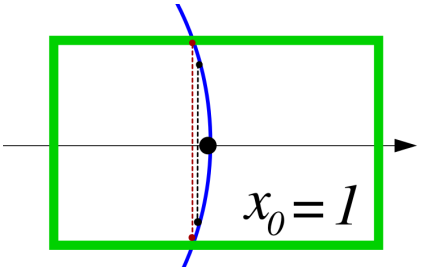


Apliquemos lo anterior a nuestro ejemplo $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$.

Como $F_y(x_0, y_0) = 2y_0 \neq 0$, entonces $\forall y_0 \neq 0 \Rightarrow$ podremos definir una función f en cualquier entorno de (x_0, y_0), $x_0 \in (-1, 1)$ que escojamos. Nótese que $y_0 \neq 0 \iff x_0 \neq \pm 1 \ldots$

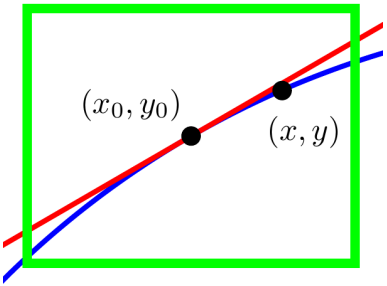
¿qué pasa si $y_0 = 0$, i.e., $x_0 = \pm 1$?





Teorema de la función implícita:

Caso de una ecuación



Teorema de la función implícita

Sea $F : A \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, A abierto y sea $(x_0, y_0) \in A$. Supongamos que:

1. $F(x_0, y_0) := F(x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0n}, y_0) = 0$,
2. $F(x, y) := F(x_1, x_2, \ldots, x_n, y) \in C^{(p)}(A)$, $p \geq 1$,
3. $F'_y(x_0, y_0) = \dfrac{\partial F(x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0n}, y_0)}{\partial y} \neq 0$.

Teorema de la función implícita

Sea $F : A \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, A abierto y sea $(x_0, y_0) \in A$. Supongamos que:

1. $F(x_0, y_0) := F(x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0n}, y_0) = 0$,
2. $F(x, y) := F(x_1, x_2, \ldots, x_n, y) \in C^{(p)}(A)$, $p \geq 1$,
3. $F'_y(x_0, y_0) = \dfrac{\partial F(x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0n}, y_0)}{\partial y} \neq 0$.

Entonces $\exists$ un abierto $I = (x_0 - h, x_0 + h) \times (y_0 - k, y_0 + k) := I_x \times I_y \subset A$, y una función $f : I_x \subset \mathbb{R}^n \mapsto I_y \subset \mathbb{R}$ t.q.

1. $F(x, y) = 0$ en I $\Leftrightarrow \exists y = f(x)$, $\forall x \in I_x$, $F(x, f(x)) = 0$

Teorema de la función implícita

Sea $F : A \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, A abierto y sea $(x_0, y_0) \in A$. Supongamos que:

1. $F(x_0, y_0) := F(x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0n}, y_0) = 0$,
2. $F(x, y) := F(x_1, x_2, \ldots, x_n, y) \in C^{(p)}(A)$, $p \geq 1$,
3. $F'_y(x_0, y_0) = \dfrac{\partial F(x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0n}, y_0)}{\partial y} \neq 0$.

Entonces $\exists$ un abierto $I = (x_0 - h, x_0 + h) \times (y_0 - k, y_0 + k) := I_x \times I_y \subset A$, y una función $f : I_x \subset \mathbb{R}^n \mapsto I_y \subset \mathbb{R}$ t.q.

1. $F(x, y) = 0$ en I $\Leftrightarrow \exists y = f(x)$, $\forall x \in I_x$, $F(x, f(x)) = 0$
2. $f(x) \in C^{(p)}(I_x)$

Teorema de la función implícita

Sea $F : A \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, A abierto y sea $(x_0, y_0) \in A$. Supongamos que:

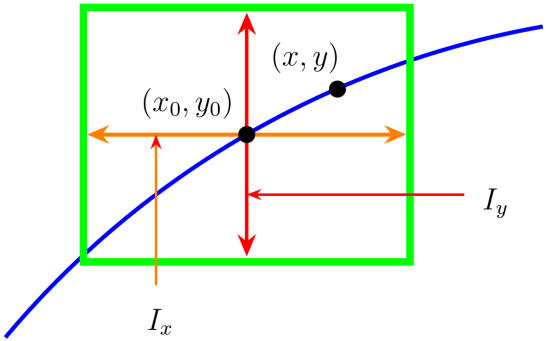
1. $F(x_0, y_0) := F(x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0n}, y_0) = 0$,
2. $F(x, y) := F(x_1, x_2, \ldots, x_n, y) \in C^{(p)}(A)$, $p \geq 1$,
3. $F'_y(x_0, y_0) = \dfrac{\partial F(x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0n}, y_0)}{\partial y} \neq 0$.

Entonces $\exists$ un abierto $I = (x_0 - h, x_0 + h) \times (y_0 - k, y_0 + k) := I_x \times I_y \subset A$, y una función $f : I_x \subset \mathbb{R}^n \mapsto I_y \subset \mathbb{R}$ t.q.

1. $F(x, y) = 0$ en I $\Leftrightarrow \exists y = f(x)$, $\forall x \in I_x$, $F(x, f(x)) = 0$
2. $f(x) \in C^{(p)}(I_x)$
3. Para todo $x \in I_x$, las derivadas parciales de $f(x)$ se calculan por

$$\frac{\partial f(x_1, \ldots x_n)}{\partial x_i} = -[F'_y(x, f(x))]^{-1} \cdot [F'_{x_i}(x, f(x))] \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Prueba del teorema de la función implícita



Prueba TFI: ① $\exists f$ en I_x t.q. $F(x, f(x)) = 0$ en I

☞ Asumimos que $F'_y(x_0, y_0) > 0$, entonces, como $F'_y(x, y)$ es continua en $(x_0, y_0) \in A$, se tiene que existe todo un entorno $I = I_x \times I_y$ de (x_0, y_0) donde $F'_y(x, y) > 0$. Luego, $F(x, y)$ como función de y es estrictamente creciente. Como $F(x_0, y_0) = 0$ entonces tenemos que

$$0 > F(x_0, y_0 - k) < F(x_0, y_0) < F(x_0, y_0 + k) > 0.$$

Prueba TFI: ① $\exists f$ en I_x t.q. $F(x, f(x)) = 0$ en I

☞ Asumimos que $F'_y(x_0, y_0) > 0$, entonces, como $F'_y(x, y)$ es continua en $(x_0, y_0) \in A$, se tiene que existe todo un entorno $I = I_x \times I_y$ de (x_0, y_0) donde $F'_y(x, y) > 0$. Luego, $F(x, y)$ como función de y es estrictamente creciente. Como $F(x_0, y_0) = 0$ entonces tenemos que

$$0 > F(x_0, y_0 - k) < F(x_0, y_0) < F(x_0, y_0 + k) > 0.$$

☞ Como $F(x, y)$ es continua en A entonces los signos de F se mantienen en todo un entorno de cada punto, i.e., existe un entorno I_x (que por simplicidad asumimos igual al de antes) tal que

$$0 > F(x, y_0 - k) < F(x_0, y_0) < F(x, y_0 + k) > 0, \qquad \forall x \in I_x.$$

☞ Asumimos que $F'_y(x_0, y_0) > 0$, entonces, como $F'_y(x, y)$ es continua en $(x_0, y_0) \in A$, se tiene que existe todo un entorno $I = I_x \times I_y$ de (x_0, y_0) donde $F'_y(x, y) > 0$. Luego, $F(x, y)$ como función de y es estrictamente creciente. Como $F(x_0, y_0) = 0$ entonces tenemos que

$$0 > F(x_0, y_0 - k) < F(x_0, y_0) < F(x_0, y_0 + k) > 0.$$

☞ Como $F(x, y)$ es continua en A entonces los signos de F se mantienen en todo un entorno de cada punto, i.e., existe un entorno I_x (que por simplicidad asumimos igual al de antes) tal que

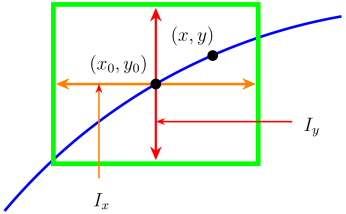
$$0 > F(x, y_0 - k) < F(x_0, y_0) < F(x, y_0 + k) > 0, \qquad \forall x \in I_x.$$

☞ $\forall x \in I_x$ la función $h(y) := F(x, y)$ es continua, $h'(y) = F_y(x, y) > 0$ en I, y cambia de signo en los extremos de $I_y \Rightarrow$ por el Teorema de Bolzano $\forall x \in I_x$ existe un único $y \in I_y$ tal que $F(x, y) = 0$ (la unicidad es consecuencia de la monotonía de h).

Definiendo $f : I_x \mapsto I_y$ t.q. para cada $x \in I_x$ le corresponda dicho y, i.e., $y = f(x)$, obtenemos una función que cumple con $F(x, f(x)) = 0$.

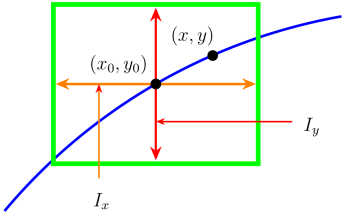
Prueba TFI: ② $f \in C^{(0)}(I_x)$

De la construcción anterior se sigue que:



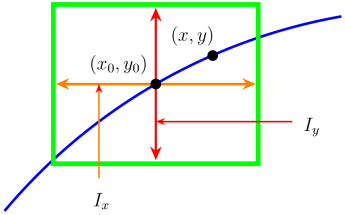
Prueba TFI: ② $f \in C^{(0)}(I_x)$

De la construcción anterior se sigue que:



$\forall \epsilon > 0$ (ϵ suficientemente pequeño para que $y_0 \pm \epsilon \in I_y$) $\exists \delta > 0$ lo suficientemente pequeño para que $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \in I_x$ y tal que $F(x, y)$ cambie de signo en los extremos de $[y_0 - \epsilon, y_0 + \epsilon]$.

De la construcción anterior se sigue que:

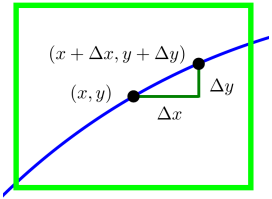


$\forall \epsilon > 0$ (ϵ suficientemente pequeño para que $y_0 \pm \epsilon \in I_y$) $\exists \delta > 0$ lo suficientemente pequeño para que $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \in I_x$ y tal que $F(x, y)$ cambie de signo en los extremos de $[y_0 - \epsilon, y_0 + \epsilon]$.

Luego $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que si $\|x - x_0\| < \delta$ entonces $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$.

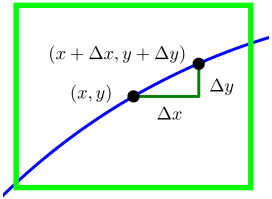
Luego la $f(x)$ es continua.

Prueba TFI: ② + ③ $f \in C^{(1)}(I_x)$



$$y = f(x), \quad f(x+\Delta x) = y+\Delta y \quad \Rightarrow \quad \Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$$

☞ Como f es continua en $I_x \Rightarrow \Delta y \to 0$ si $\Delta x \to 0$.



$$y = f(x), \quad f(x+\Delta x) = y+\Delta y \quad \Rightarrow \quad \Delta y = f(x+\Delta x)-f(x)$$

☞ Como f es continua en $I_x \Rightarrow \Delta y \to 0$ si $\Delta x \to 0$.

☞ Elegimos $\Delta x = he_i$, e_i i-ésimo vector de la base canónica de $\mathbb{R}^n$.

☞ Como $F(x,y) = F(x+\Delta x, y+\Delta y) = 0$ entonces, por el Teorema del valor medio para funciones escalares de varias variables, $\exists \theta \in (0,1)$ t.q.

$$\begin{aligned} 0 &= F(x+\Delta x, y+\Delta y) - F(x,y) = DF(x+\theta\Delta x, y+\theta\Delta y)\begin{pmatrix}\Delta x\\ \Delta y\end{pmatrix} \\ &= \frac{\partial F(x+\theta h e_i, y+\theta\Delta y)}{\partial x_i} h + \frac{\partial F(x+\theta h e_i, y+\theta\Delta y)}{\partial y}\Delta y. \end{aligned}$$

$$0 = F(x+\Delta x, y+\Delta y) - F(x,y) = DF(x+\theta\Delta x, y+\theta\Delta y)\begin{pmatrix}\Delta x\\ \Delta y\end{pmatrix}$$
$$= \frac{\partial F(x+\theta h e_i, y+\theta\Delta y)}{\partial x_i}h + \frac{\partial F(x+\theta h e_i, y+\theta\Delta y)}{\partial y}\Delta y.$$

Como $F(x,y) \in C^{(1)}(I)$ entonces tomando límites $\Delta x \to 0 \Rightarrow$

$$0 = \frac{\partial F(x,y)}{\partial x_i} + \frac{\partial F(x,y)}{\partial y}\lim_{h\to 0}\frac{\Delta y}{h}.$$

Luego, si $\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial y} \neq 0 \Rightarrow$ existe el $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\Delta y}{h} = \dfrac{\partial f(x)}{\partial x_i} = -\dfrac{F'_{x_i}(x,y)}{F'_y(x,y)}$.

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{\partial f(x_1,\dots x_n)}{\partial x_i} = -\frac{F'_{x_i}(x,f(x))}{F'_y(x,f(x))}, \quad i=1,2,\dots,n}$$

$$\text{Como} \quad \frac{\partial f(x_1, \dots x_n)}{\partial x_i} = -\frac{F'_{x_i}(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

y $f(x)$, F'_x y F'_y son continuas entonces f' es continua (¿por qué?).

$$\text{Como} \quad \frac{\partial f(x_1, \dots x_n)}{\partial x_i} = -\frac{F'_{x_i}(x, f(x))}{F'_y(x, f(x))}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

y $f(x)$, F'_x y F'_y son continuas entonces f' es continua (¿por qué?).

Derivando la expresión anterior se tiene que $f \in C^{(2)}(I_x)$ (¿por qué?).

$$\frac{\partial^2 f(x_1, \dots x_n)}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\overbrace{[F''_{x_i x_j}(x, f(x)) + F''_{x_i y}(x, f(x)) f_{x_j}(x)]}^{\frac{\partial F_{x_i}(x, f(x))}{\partial x_j}} F'_y(x, f(x))}{[F'_y(x, f(x))]^2}$$
$$- \frac{F_{x_i}(x, f(x)) \overbrace{[F''_{yx_j}(x, f(x)) + F''_{yy}(x, f(x)) f_{x_j}(x)]}^{\frac{\partial F_y(x, f(x))}{\partial x_j}}}{[F'_y(x, f(x))]^2}$$

Y así, derivando sucesivamente, se deduce que $f \in C^{(p)}(I_x)$.

Ejemplo: Sea $x^3 \log x^2 + y^2 = 0$, $x(0) = 1$. Prueba que existe $x = f(y)$ en un entorno de $(1, 0)$. Decide si $x(y)$ tiene un extremo y calcúlalo.

Ejemplo: Sea $x^3 \log x^2 + y^2 = 0$, $x(0) = 1$. Prueba que existe $x = f(y)$ en un entorno de $(1, 0)$. Decide si $x(y)$ tiene un extremo y calcúlalo.

Ejemplo: Sea la ecuación $z^3 + 2(x + y)^2 z + e^{z-1} - 4 = 0$.

1. Prueba que la ecuación anterior define una función $z = f(x, y)$ en el entorno U del punto $(0, -1, 1)$ y que dicha función es una función $C^{(\infty)}(U)$ en dicho U.
2. Calcula las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ en dicho punto.
3. Escribe el polinomio de Taylor de orden 2 de f en $(0, -1, 1)$.

Solución:

Sea la función

$$F : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}, \quad F(x, y, z) = z^3 + 2(x + y)^2 z + e^{z-1} - 4$$

1) En el punto $(0, -1, 1)$ se verifica la ecuación $F(0, -1, 1) = 0$.

2) F es $C^{(p)}(\mathbb{R}^3)$ para todo $p \in \mathbb{N}$ y $F'_z(0, -1, 1) = 6 \neq 0$.

Solución:

Sea la función

$$F : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}, \quad F(x, y, z) = z^3 + 2(x + y)^2 z + e^{z-1} - 4$$

1) En el punto $(0, -1, 1)$ se verifica la ecuación $F(0, -1, 1) = 0$.

2) F es $C^{(p)}(\mathbb{R}^3)$ para todo $p \in \mathbb{N}$ y $F'_z(0, -1, 1) = 6 \neq 0$.

En TFI nos dice que existe en todo un entorno de $(0, -1, 1)$ una función $z = f(x, y)$, $f \in C^{(p)}(\mathbb{R}^2)$ para todo $p \in \mathbb{N}$ tal que $F(x, y, f(x, y)) = 0$ en dicho entorno de $(0, -1, 1)$.

Solución:

Sea la función

$$F : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}, \quad F(x, y, z) = z^3 + 2(x + y)^2 z + e^{z-1} - 4$$

1) En el punto $(0, -1, 1)$ se verifica la ecuación $F(0, -1, 1) = 0$.

2) F es $C^{(p)}(\mathbb{R}^3)$ para todo $p \in \mathbb{N}$ y $F'_z(0, -1, 1) = 6 \neq 0$.

En TFI nos dice que existe en todo un entorno de $(0, -1, 1)$ una función $z = f(x, y)$, $f \in C^{(p)}(\mathbb{R}^2)$ para todo $p \in \mathbb{N}$ tal que $F(x, y, f(x, y)) = 0$ en dicho entorno de $(0, -1, 1)$.

Para calcular las derivadas usamos que

Solución:

Sea la función

$$F : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}, \quad F(x, y, z) = z^3 + 2(x + y)^2 z + e^{z-1} - 4$$

1) En el punto $(0, -1, 1)$ se verifica la ecuación $F(0, -1, 1) = 0$.

2) F es $C^{(p)}(\mathbb{R}^3)$ para todo $p \in \mathbb{N}$ y $F'_z(0, -1, 1) = 6 \neq 0$.

En TFI nos dice que existe en todo un entorno de $(0, -1, 1)$ una función $z = f(x, y)$, $f \in C^{(p)}(\mathbb{R}^2)$ para todo $p \in \mathbb{N}$ tal que $F(x, y, f(x, y)) = 0$ en dicho entorno de $(0, -1, 1)$.

Para calcular las derivadas usamos que

$F'_x(0, -1, 1) = F'_y(0, -1, 1) = 4(x + y)z = -4 \Rightarrow$

$$\frac{\partial f(0, -1)}{\partial x} = -\frac{F'_x(0, -1, 1)}{F'_z(0, -1, 1)} = \frac{2}{3}, \quad \frac{\partial f(0, -1)}{\partial y} = -\frac{F'_y(0, -1, 1)}{F'_z(0, -1, 1)} = \frac{2}{3}.$$

Calculando derivadas de orden 2 en el punto $(0, -1, 1)$

$$F(x, y, z) = z^3 + 2(x + y)^2 z + e^{z-1} - 4 = 0$$

Como f es $C^{(\infty)}(\mathbb{R}^2)$ en un entorno de $(0, -1)$ entonces es diferenciable tantas veces como se quiera.

Calculando derivadas de orden 2 en el punto $(0, -1, 1)$

$$F(x, y, z) = z^3 + 2(x + y)^2 z + e^{z-1} - 4 = 0$$

Como f es $C^{(\infty)}(\mathbb{R}^2)$ en un entorno de $(0, -1)$ entonces es diferenciable tantas veces como se quiera.

Derivando dos veces respecto a x la ecuación $F(x, y) = 0$ y considerando z como función de x, y y $z_x = z_y = 2/3$, tenemos:

Calculando derivadas de orden 2 en el punto $(0, -1, 1)$

$$F(x, y, z) = z^3 + 2(x + y)^2 z + e^{z-1} - 4 = 0$$

Como f es $C^{(\infty)}(\mathbb{R}^2)$ en un entorno de $(0, -1)$ entonces es diferenciable tantas veces como se quiera.

Derivando dos veces respecto a x la ecuación $F(x, y) = 0$ y considerando z como función de x, y y $z_x = z_y = 2/3$, tenemos:

$$2z_{xx}(y + x)^2 + 8z_x(y + x) + 3z^2 z_{xx} + e^{z-1} z_{xx} + (6z + e^{z-1}) z_x^2 + 4z = 0 \quad \Rightarrow$$

$$z_{xx} = -\frac{8}{27}.$$

Derivando respecto a y dos obtenemos

Calculando derivadas de orden 2 en el punto $(0, -1, 1)$

$$F(x, y, z) = z^3 + 2(x + y)^2 z + e^{z-1} - 4 = 0$$

Como f es $C^{(\infty)}(\mathbb{R}^2)$ en un entorno de $(0, -1)$ entonces es diferenciable tantas veces como se quiera.

Derivando dos veces respecto a x la ecuación $F(x, y) = 0$ y considerando z como función de x, y y $z_x = z_y = 2/3$, tenemos:

$$2z_{xx}(y + x)^2 + 8z_x(y + x) + 3z^2 z_{xx} + e^{z-1} z_{xx} + (6z + e^{z-1}) z_x^2 + 4z = 0 \quad \Rightarrow$$

$$z_{xx} = -\frac{8}{27}.$$

Derivando respecto a y dos obtenemos

$$2z_{yy}(y + x)^2 + 8z_y(y + x) + 3z^2 z_{yy} + e^{z-1} z_{yy} + (6z + e^{z-1}) z_y^2 + 4z = 0 \quad \Rightarrow$$

$$z_{yy} = -\frac{8}{27}.$$

Calculando derivadas de orden 2

Respecto a x e y tenemos

Calculando derivadas de orden 2

Respecto a x e y tenemos

$$2z_{xy}(y+x)^2+ \quad 4(z_y+z_x)(y+x)+6zz_xz_y+$$
$$e^{z-1}z_xz_y+3z^2z_{xy}+e^{z-1}z_{xy}+4z=0 \Rightarrow$$
$$z_{xy}=-\frac{8}{27}.$$

Calculando derivadas de orden 2

Respecto a x e y tenemos

$$2z_{xy}(y+x)^2+ \quad 4(z_y+z_x)(y+x)+6zz_xz_y+$$
$$e^{z-1}z_xz_y+3z^2z_{xy}+e^{z-1}z_{xy}+4z=0 \Rightarrow$$

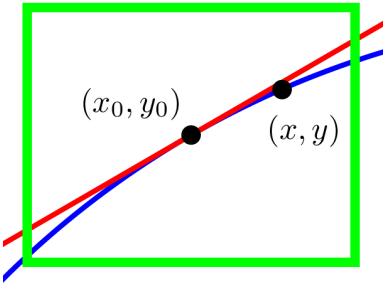
$$z_{xy}=-\frac{8}{27}.$$

Usando Taylor $z(x,y)=P_2(x,y)+o\left(x^2+(y+1)^2\right)$

$$\begin{aligned} P_2(x,y) = & \ z(0,-1)+Dz(0,-1)(x,y+1)+\tfrac{1}{2}D^2z(0,-1)(x,y+1) \\ = & \ 1+\begin{pmatrix}\frac{2}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y+1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x & y+1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\frac{4}{27} & -\frac{8}{27}\\ -\frac{8}{27} & -\frac{4}{27}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y+1\end{pmatrix} \\ = & \ \cdots \end{aligned}$$

Teorema de la función implícita:

Caso general



Teorema de la función implícita: caso general

Sea el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} F_1(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m) = 0, \\ F_2(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m) = 0, \\ \vdots \\ F_m(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m) = 0, \end{cases}$$

donde $F_k : A \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}$, $k = 1, 2, \ldots, m$.

Denotando por $F(x, y)$ la función $F : A \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^m$ cuyas componentes son las F_k anteriores tenemos la ecuación

$$F(x, y) = 0 .$$

Problema: ¿Existe una $f : I_x \subset \mathbb{R}^n \mapsto I_y \subset \mathbb{R}^m$ t.q. $F(x, f(x)) = 0$? $\Longleftrightarrow$

¿existen m funciones $y_k = f_k(x) := f_k(x_1, \cdots, x_n)$ tales que $\forall k = 1, \ldots, m$,

$$F_k(x_1, \ldots, x_n, f_1(x), \ldots, f_m(x)) = 0$$ en un entorno de $(x_0, y_0) \in A$?

Teorema de la función implícita: caso general

Veamos una idea intuitiva de como resolver el problema anterior en el caso $n = m = 2$.

$$F_1(x_1, x_2, y_1, y_2) = 0, \quad F_2(x_1, x_2, y_1, y_2) = 0$$

Derivamos ambas ecuaciones respecto a x_1 asumiendo que y_1 e y_2 dependen de x_1 y x_2. Usando la regla de la cadena tenemos:

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_1}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_1}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial F_2}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_1} = 0$$

En forma matricial

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial F_1}{\partial y_2} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial y_1} & \dfrac{\partial F_2}{\partial y_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial y_2}{\partial x_1} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial x_1} \end{pmatrix}$$

$$F_1(x_1, x_2, y_1, y_2) = 0, \quad F_2(x_1, x_2, y_1, y_2) = 0$$

Derivemos ahora ambas ecuaciones respecto a x_2 asumiendo que y_1 e y_2 dependen de x_1 y x_2. Usando la regla de la cadena tenemos:

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_2} + \frac{\partial F_1}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_2} + \frac{\partial F_1}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \frac{\partial F_2}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_2} + \frac{\partial F_2}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_2} = 0$$

En forma matricial

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial F_1}{\partial y_2} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial y_1} & \dfrac{\partial F_2}{\partial y_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial y_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial y_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

Teorema de la función implícita: caso general

$$F_1(x_1, x_2, y_1, y_2) = 0, \quad F_2(x_1, x_2, y_1, y_2) = 0$$

Derivemos ahora ambas ecuaciones respecto a x_2 asumiendo que y_1 e y_2 dependen de x_1 y x_2. Usando la regla de la cadena tenemos:

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_2} + \frac{\partial F_1}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_2} + \frac{\partial F_1}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \frac{\partial F_2}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_2} + \frac{\partial F_2}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_2} = 0$$

En forma matricial

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

Juntando ambas:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

Teorema de la función implícita: caso general

$$F_1(x_1, x_2, y_1, y_2) = 0, \quad F_2(x_1, x_2, y_1, y_2) = 0$$

Derivemos ahora ambas ecuaciones respecto a x_2 asumiendo que y_1 e y_2 dependen de x_1 y x_2. Usando la regla de la cadena tenemos:

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_2} + \frac{\partial F_1}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_2} + \frac{\partial F_1}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \frac{\partial F_2}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_2} + \frac{\partial F_2}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_2} = 0$$

En forma matricial

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

Juntando ambas:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

$$F_1(x_1, x_2, y_1, y_2) = 0, \quad F_2(x_1, x_2, y_1, y_2) = 0$$

Derivemos ahora ambas ecuaciones respecto a x_2 asumiendo que y_1 e y_2 dependen de x_1 y x_2. Usando la regla de la cadena tenemos:

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_2} + \frac{\partial F_1}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_2} + \frac{\partial F_1}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial F_2}{\partial x_2} + \frac{\partial F_2}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_2} + \frac{\partial F_2}{\partial y_2}\frac{\partial y_2}{\partial x_2} = 0$$

En forma matricial

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

Juntando ambas:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

Teorema de la función implícita: caso general

El sistema $F_1(x_1, x_2, y_1, y_2) = 0,\ F_2(x_1, x_2, y_1, y_2) = 0$ se puede resolver respecto a y_1 e y_2 en cierto entorno U de un punto (a, b, c, d) tal que

$$F_1(a, b, c, d) = 0, \quad F_2(a, b, c, d) = 0$$

es decir, existe $y_1(x_1, x_2)$ e $y_2(x_1, x_2)$ tales que

$$F_1(x_1, x_2, y_1(x_1, x_2), y_2(x_1, x_2)) = 0, \quad F_2(x_1, x_2, y_1(x_1, x_2), y_2(x_1, x_2)) = 0$$

$\Longleftrightarrow$ la matriz $F'_y := \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} \end{pmatrix}$ es invertible ($\det F'_y \neq 0$).

Teorema de la función implícita: caso general

El sistema $F_1(x_1, x_2, y_1, y_2) = 0,\ F_2(x_1, x_2, y_1, y_2) = 0$ se puede resolver respecto a y_1 e y_2 en cierto entorno U de un punto (a, b, c, d) tal que

$$F_1(a, b, c, d) = 0, \quad F_2(a, b, c, d) = 0$$

es decir, existe $y_1(x_1, x_2)$ e $y_2(x_1, x_2)$ tales que

$$F_1(x_1, x_2, y_1(x_1, x_2), y_2(x_1, x_2)) = 0, \quad F_2(x_1, x_2, y_1(x_1, x_2), y_2(x_1, x_2)) = 0$$

$\iff$ la matriz $F'_y := \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} \end{pmatrix}$ es invertible ($\det F'_y \neq 0$).Además, la solución es

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial y_2} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

Sea $x_0 := (x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0n})$ e $y_0 := (y_{01}, y_{02}, \ldots, y_{0m})$ y denotemos por I_x el intervalo $[x_0 - h, x_0 + h]$ y por I_y el intervalo $[y_0 - k, y_0 + k]$.

Definamos las matrices (apliaciones lineales)

$$f' : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m, \quad f'(x) := Df(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1(x)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m(x)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m(x)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

$$F'_x : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m, \quad F'_x(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1(x,y)}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_1(x,y)}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial F_m(x,y)}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_m(x,y)}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

$$F'_y : \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^m, \quad F'_y(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F_1(x,y)}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_1(x,y)}{\partial y_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial F_m(x,y)}{\partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_m(x,y)}{\partial y_m} \end{pmatrix}$$

Nótese que $F'_y(x,y)$ es una matriz cuadrada que será invertible si y sólo si $\det F'_y(x,y) \neq 0$.

Teorema de la función implícita: caso general

Sea $F : A \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^m$, $A \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ abierto y sea $(x_0, y_0) \in A$. Supongamos que:

1. $F(x_0, y_0) = 0$,
2. $F(x, y) \in C^{(p)}(A)$, $p \geq 1$,
3. $\det F'_y(x_0, y_0) \neq 0$ o sea, $F'_y(x, y)$ es una matriz invertible.

Teorema de la función implícita: caso general

Sea $F : A \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^m$, $A \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ abierto y sea $(x_0, y_0) \in A$. Supongamos que:

1. $F(x_0, y_0) = 0$,
2. $F(x, y) \in C^{(p)}(A)$, $p \geq 1$,
3. $\det F'_y(x_0, y_0) \neq 0$ o sea, $F'_y(x, y)$ es una matriz invertible.

Entonces existe un intervalo $I = [x_0 - h, x_0 + h] \times [y_0 - k, y_0 + k]$ $I \subset A$, y una función $f : I_x \subset \mathbb{R}^n \mapsto I_y \subset \mathbb{R}^m$ t.q.

1. $F(x, y) = 0$ en $I \iff y = f(x)$, i.e., $F(x, f(x)) = 0$ en I
2. $f(x) \in C^{(p)}(I_x)$.
3. $\forall x \in I_x$, la diferencial de $f(x)$ se calcula por

$$f'(x) := Df(x) = -[F'_y(x, f(x))]^{-1} \cdot [F'_{x_i}(x, f(x))] \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Teorema de la función implícita: caso general

Sea $F : A \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^m$, $A \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ abierto y sea $(x_0, y_0) \in A$. Supongamos que:

1. $F(x_0, y_0) = 0$,
2. $F(x, y) \in C^{(p)}(A)$, $p \geq 1$,
3. $\det F'_y(x_0, y_0) \neq 0$ o sea, $F'_y(x, y)$ es una matriz invertible.

Entonces existe un intervalo $I = [x_0 - h, x_0 + h] \times [y_0 - k, y_0 + k]$ $I \subset A$, y una función $f : I_x \subset \mathbb{R}^n \mapsto I_y \subset \mathbb{R}^m$ t.q.

1. $F(x, y) = 0$ en $I \iff y = f(x)$, i.e., $F(x, f(x)) = 0$ en I
2. $f(x) \in C^{(p)}(I_x)$.
3. $\forall x \in I_x$, la diferencial de $f(x)$ se calcula por

$$f'(x) := Df(x) = -[F'_y(x, f(x))]^{-1} \cdot [F'_{x_i}(x, f(x))] \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Prueba: La prueba se hace por inducción en m, el número de ecuaciones, siendo el primer paso de la inducción el TFI para una ecuación.

Ejemplo. Sea el sistema $\begin{cases} (x-1)^2 + y^2 - z = 0 & (1) \\ x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 & (2) \end{cases}$

Decidir si este sistema se puede resolver de forma que existan las funciones $y = y(x)$ y $z = z(x)$ y calcular los valores de $y'(x)$ y $z'(x)$.

Ejemplo. Sea el sistema $\begin{cases} (x-1)^2 + y^2 - z = 0 & (1) \\ x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 & (2) \end{cases}$

Decidir si este sistema se puede resolver de forma que existan las funciones $y = y(x)$ y $z = z(x)$ y calcular los valores de $y'(x)$ y $z'(x)$.

M1: $\det F'_y(x,y,z) = \det \begin{pmatrix} 2y & -1 \\ 2y & 2z \end{pmatrix} = 2y(2z+1) \neq 0 \Rightarrow y \neq 0,\ z \neq -\frac{1}{2}$.

Ejemplo. Sea el sistema $\begin{cases} (x-1)^2+y^2-z=0 & (1) \\ x^2+y^2+z^2-1=0 & (2) \end{cases}$

Decidir si este sistema se puede resolver de forma que existan las funciones $y=y(x)$ y $z=z(x)$ y calcular los valores de $y'(x)$ y $z'(x)$.

M1: $\det F'_y(x,y,z) = \det \begin{pmatrix} 2y & -1 \\ 2y & 2z \end{pmatrix} = 2y(2z+1) \neq 0 \Rightarrow y \neq 0,\ z \neq -\frac{1}{2}.$

$$\begin{pmatrix} y'(x) \\ z'(x) \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 2y & -1 \\ 2y & 2z \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2(x-1) \\ 2x \end{pmatrix} = -\frac{1}{y(2z+1)} \begin{pmatrix} 2zx-2z+x \\ 2y \end{pmatrix}.$$

Ejemplo. Sea el sistema $\begin{cases} (x-1)^2+y^2-z=0 & (1) \\ x^2+y^2+z^2-1=0 & (2) \end{cases}$

Decidir si este sistema se puede resolver de forma que existan las funciones $y=y(x)$ y $z=z(x)$ y calcular los valores de $y'(x)$ y $z'(x)$.

M1: $\det F'_y(x,y,z)=\det\begin{pmatrix}2y & -1\\ 2y & 2z\end{pmatrix}=2y(2z+1)\neq 0 \Rightarrow y\neq 0,\ z\neq -\frac{1}{2}.$

$$\begin{pmatrix}y'(x)\\ z'(x)\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}2y & -1\\ 2y & 2z\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}2(x-1)\\ 2x\end{pmatrix}=-\frac{1}{y(2z+1)}\begin{pmatrix}2zx-2z+x\\ 2y\end{pmatrix}.$$

M2: $\dfrac{d(2)}{dx}\text{-}\dfrac{d(1)}{dx}\Rightarrow \qquad (2z+1)z_x+2=0 \quad\Rightarrow\quad z_x=-\dfrac{2}{2z+1}$

$2z\dfrac{d(1)}{dx}+\dfrac{d(2)}{dx}\Rightarrow y(2z+1)y_x+2z(x-1)-x=0 \Rightarrow y_x=-\dfrac{2z(x-1)-x}{y(2z+1)}$

Además $y\neq 0,\ z\neq -\frac{1}{2}$.

Ejemplo 1: Probar que existen funciones f y g de clase $\mathcal{C}^\infty$ definidas en un entorno de $(1,1)$, tales que $f(1,1) = -1$, $g(1,1) = 0$ que verifican las ecuaciones:

$$f(x,y)^3 + xg(x,y)^2 + y = 0, \qquad g(x,y)^3 + yg(x,y) + f(x,y)^2 = x.$$

Calcula todas las derivadas parciales de orden 1 de f y g.

Ejemplo 1: Probar que existen funciones f y g de clase $\mathcal{C}^\infty$ definidas en un entorno de $(1,1)$, tales que $f(1,1) = -1$, $g(1,1) = 0$ que verifican las ecuaciones:

$$f(x,y)^3 + xg(x,y)^2 + y = 0, \qquad g(x,y)^3 + yg(x,y) + f(x,y)^2 = x.$$

Calcula todas las derivadas parciales de orden 1 de f y g.

Ejemplo 2: Sea $F(x,y,z) = x^2y + e^x + z = 0$. ¿Qué puntos (b,c) definen una función $x(y,z)$ tal que $x(b,c) = 0$? Calcula, si es posible, $\frac{\partial x}{\partial y}$ y $\frac{\partial x}{\partial z}$.

Ejemplo 1: Probar que existen funciones f y g de clase $\mathcal{C}^\infty$ definidas en un entorno de $(1,1)$, tales que $f(1,1) = -1$, $g(1,1) = 0$ que verifican las ecuaciones:

$$f(x,y)^3 + xg(x,y)^2 + y = 0, \qquad g(x,y)^3 + yg(x,y) + f(x,y)^2 = x.$$

Calcula todas las derivadas parciales de orden 1 de f y g.

Ejemplo 2: Sea $F(x,y,z) = x^2y + e^x + z = 0$. ¿Qué puntos (b,c) definen una función $x(y,z)$ tal que $x(b,c) = 0$? Calcula, si es posible, $\frac{\partial x}{\partial y}$ y $\frac{\partial x}{\partial z}$.

Ejemplo 3: $F(x,y,z) = x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 - 1 = 0$. ¿Se pueden encontrar $z = f(x,y)$? ¿Cuánto valen z_x y z_y? Encuentra la ecuación del plano tangente a la superficie definida por $F(x,y,z) = 0$, $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

Ejemplo 1: Probar que existen funciones f y g de clase $\mathcal{C}^\infty$ definidas en un entorno de $(1,1)$, tales que $f(1,1) = -1$, $g(1,1) = 0$ que verifican las ecuaciones:

$$f(x,y)^3 + xg(x,y)^2 + y = 0, \qquad g(x,y)^3 + yg(x,y) + f(x,y)^2 = x.$$

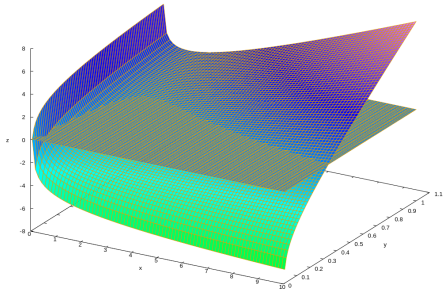
Calcula todas las derivadas parciales de orden 1 de f y g.

Ejemplo 2: Sea $F(x,y,z) = x^2y + e^x + z = 0$. ¿Qué puntos (b,c) definen una función $x(y,z)$ tal que $x(b,c) = 0$? Calcula, si es posible, $\frac{\partial x}{\partial y}$ y $\frac{\partial x}{\partial z}$.

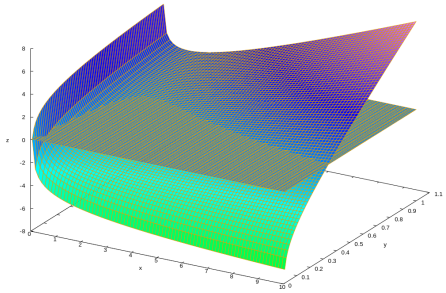
Ejemplo 3: $F(x,y,z) = x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 - 1 = 0$. ¿Se pueden encontrar $z = f(x,y)$? ¿Cuánto valen z_x y z_y? Encuentra la ecuación del plano tangente a la superficie definida por $F(x,y,z) = 0$, $\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

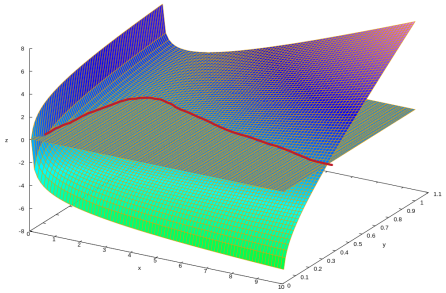
Ejemplo 4: $F(x,y,z) = y^2z + x\log z - x = 0$, se sabe que $z(1,-1) = 1$. Encontrar el polinomio de Taylor de orden 2 de z en el punto $(1,-1)$.

Ejemplo: $\log y - \log x + xy = 0$, $x, y > 0$. ¿$\exists\, y = f(x)$?



Ejemplo: $\log y - \log x + xy = 0$, $x, y > 0$. ¿$\exists\, y = f(x)$?





Ejemplo: $\log y - \log x + xy = 0$, $x, y > 0$. ¿$\exists\, y = f(x)$?

$F(x, y) = \log y - \log x + xy$ en $D = \{(x, y),\, x, y > 0\}$

1. $F \in C^{(\infty)}(D)$
2. $F_y(x, y) = x + 1/y > 0$
3. $\exists (x_0, y_0)$ t.q. $F(x_0, y_0) = 0$

Ejemplo: $\log y - \log x + xy = 0$, $x, y > 0$. ¿$\exists\, y = f(x)$?

$F(x, y) = \log y - \log x + xy$ en $D = \{(x, y),\, x, y > 0\}$

1. $F \in C^{(\infty)}(D)$
2. $F_y(x, y) = x + 1/y > 0$
3. $\exists (x_0, y_0)$ t.q. $F(x_0, y_0) = 0$

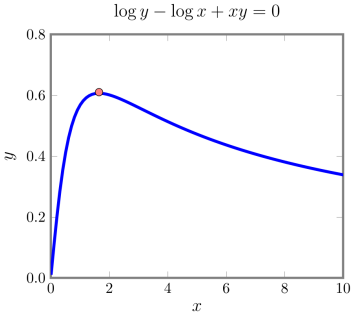
- $f'(x) = -\dfrac{y(xy-1)}{x(xy+1)} = 0 \Rightarrow xy = 1,\ x_0 = \sqrt{e},\ f(x_0) = \frac{1}{\sqrt{e}}$.
- $f''(x_0) > 0 \Rightarrow$ máximo

Ejemplo: $\log y - \log x + xy = 0$, $x, y > 0$. ¿$\exists\, y = f(x)$?

$F(x, y) = \log y - \log x + xy$ en $D = \{(x, y),\, x, y > 0\}$

1. $F \in C^{(\infty)}(D)$
2. $F_y(x, y) = x + 1/y > 0$
3. $\exists (x_0, y_0)$ t.q. $F(x_0, y_0) = 0$

- $f'(x) = -\dfrac{y(xy-1)}{x(xy+1)} = 0 \Rightarrow xy = 1,\ x_0 = \sqrt{e},\ f(x_0) = \frac{1}{\sqrt{e}}$.
- $f''(x_0) > 0 \Rightarrow$ máximo
- $f(x) \to 0$, cuando $x \to 0$ y $x \to +\infty$.



Teorema de la función inversa

Teorema de la función inversa: caso $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$

Supongamos que tenemos la ecuación $f(x) = y$, $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ y queremos resolverla. Para ello la reescribiremos de la forma $F(x, y) = f(x) - y = 0$.

Lo que queremos es saber si esta ecuación es resoluble respecto a x, i.e., si existe una función $x = g(y)$ de forma tal que $F(g(y), y) = 0$ para todo y de cierto intervalo dado.

Teorema de la función inversa: caso $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$

Supongamos que tenemos la ecuación $f(x) = y$, $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ y queremos resolverla. Para ello la reescribiremos de la forma $F(x, y) = f(x) - y = 0$.

Lo que queremos es saber si esta ecuación es resoluble respecto a x, i.e., si existe una función $x = g(y)$ de forma tal que $F(g(y), y) = 0$ para todo y de cierto intervalo dado.

Si en el intervalo I_y existe la solución definiendo I_x el conjunto de las x tales que $x = g(y)$ tendremos dos funciones $f(x)$ y $g(y)$ que son mutuamente inversas. Es decir, encontrando las condiciones que nos permiten resolver la ecuación $F(x, y) = 0$ respecto a x, sabremos en que condiciones $f(x)$ es invertible.

Teorema de la función inversa: caso $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$

Supongamos que tenemos la ecuación $f(x) = y$, $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ y queremos resolverla. Para ello la reescribiremos de la forma $F(x, y) = f(x) - y = 0$.

Lo que queremos es saber si esta ecuación es resoluble respecto a x, i.e., si existe una función $x = g(y)$ de forma tal que $F(g(y), y) = 0$ para todo y de cierto intervalo dado.

Si en el intervalo I_y existe la solución definiendo I_x el conjunto de las x tales que $x = g(y)$ tendremos dos funciones $f(x)$ y $g(y)$ que son mutuamente inversas. Es decir, encontrando las condiciones que nos permiten resolver la ecuación $F(x, y) = 0$ respecto a x, sabremos en que condiciones $f(x)$ es invertible.

Pero eso es justo lo que nos afirma el Teorema de la función implícita.

Para resolver la ec. $f(x) - y = F(x, y) = 0$ respecto a x es suficiente que:

1. F sea $C^{(p)}(A)$, con A cierto entorno abierto de cierto (x_0, y_0) que satisface la ecuación $f(x_0) = y_0$
2. $F'_x(x_0, y_0) = f'(x_0) \neq 0$

Entonces el TFI nos dice que existe en un entorno $V(y_0)$ de y_0 cierta función $x = g(y)$ tal que $F(g(y), y) = 0 \Rightarrow f(g(y)) = y$ y además g es $C^{(p)}(V(y_0))$ y su derivada se expresará por

$$g'(y_0) = -\frac{F'_y(x_0, y_0)}{F'_x(x_0, y_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Teorema (de la función inversa)

Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ *definida en un entorno del punto* $x_0 \in A$ *tal que*

1. $f(x) \in C^{(p)}(A)$, $p \geq 1$,
2. $f(x_0) = y_0$, *en* x_0,
3. $f'(x_0)$ *es una aplicación invertible.*

Entonces existe un entorno abierto $U(x_0) \subset A$ *de* $x_0 \in A$ *y otro* $V(y_0) \subset f(A)$ *de* $y_0 \in f(A)$ *tal que* f *es invertible en* $U(x_0)$, *i.e.*,

1. *Existe su inversa* $f^{-1} : V(y_0) \mapsto U(x_0)$,
2. $f^{(-1)} \in C^{(p)}(V(y_0))$,
3. *Para todo* $x \in U(x_0)$ *e* $y = f(x) \in V(y_0)$ *se tiene que*

$$(f^{-1}(y))' := Df^{-1}(y) = [f'(x)]^{-1} := [Df(x)]^{-1}.$$

Demostración: Sea $F(x, y) = f(x) - y$. Como $f(x) \in C^{(p)}(A)$, entonces F lo es en un entorno de (x_0, y_0). Además $F(x_0, y_0) = 0$ y $F'_x(x_0, y_0) = f'(x_0)$ es invertible, luego el T.F.I. implica que existe $x = g(y)$ en un entorno de y_0 t.q. $f(g(y)) = y$, i.e., f es invertible.

Usando que $F'_y = -I_n$ (matriz identidad) se deduce que $Df^{-1}(y_0) = [Df(x_0)]^{-1}$, con $y_0 = f(x_0)$.

Demostración: Sea $F(x,y) = f(x) - y$. Como $f(x) \in C^{(p)}(A)$, entonces F lo es en un entorno de (x_0, y_0). Además $F(x_0, y_0) = 0$ y $F'_x(x_0, y_0) = f'(x_0)$ es invertible, luego el T.F.I. implica que existe $x = g(y)$ en un entorno de y_0 t.q. $f(g(y)) = y$, i.e., f es invertible.

Usando que $F'_y = -I_n$ (matriz identidad) se deduce que $Df^{-1}(y_0) = [Df(x_0)]^{-1}$, con $y_0 = f(x_0)$.

Ejemplo: Sea la función lineal $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ definida por $y = f(x) = Ax$, donde A es una matriz real $n \times n$. Es obvio que f es $C^{(p)}(\mathbb{R}^n)$ para todo $p \in \mathbb{N}$. Podemos además tomar cualquier $x \in \mathbb{R}^n$ y definir $y = Ax$.

La derivada (total) de f es la matriz A. Entonces si A es invertible (o equivalentemente, si el Jacobiano de f, que es $\det A$ es diferente de cero), entonces f es invertible. Además $Df^{-1} = [Df]^{-1}$, i.e., $[Df(x)]^{-1} = A^{-1}$.

Definición

Sean las funciones $\phi_k : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$, $k = 1, 2, \ldots, m$, $m \leq n$ *diferenciables en cierto abierto* $A \subset \mathbb{R}^n$ *y sea* $u_k = \phi_k(x_1, \ldots, x_n)$. *Diremos que una de las funciones anteriores* u_k *(para cierto* $k = 1, 2, \ldots, m$*) depende funcionalmente de las demás en* A **si para todos los** $x \in A$ *existe una función* $\Phi : \mathbb{R}^{m-1} \mapsto \mathbb{R}$, *diferenciable en el correspondiente dominio*[a] $B \subset \mathbb{R}^{m-1}$, *tal que* $u_k = \Phi(u_1, \ldots, u_{k-1}, u_{k+1}, \ldots, u_m)$.

[a] B es un abierto contenido en $(\phi_1(A), \ldots, \phi_{k-1}(A), \phi_{k+1}(A), \ldots, \phi_m(A))$.

Ejemplo paradigmático: Sean las funciones $u_1, \ldots, u_m$,

$$\begin{cases} u_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n, \\ u_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n, \\ \qquad\vdots \\ u_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n, \end{cases} \qquad m \leq n.$$

Si el rango de la matriz del sistema es menor que m, entonces una de las ecuaciones se puede escribir como **combinación lineal** de las otras.

Definición

Dado el sistema de funciones diferenciables

$$\begin{cases} u_1 = \phi_1(x_1, \ldots, x_n), \\ u_2 = \phi_2(x_1, \ldots, x_n), \\ \qquad \vdots \\ u_m = \phi_m(x_1, \ldots, x_n), \end{cases} \qquad m \leq n,$$

diremos que es funcionalmente dependiente en el abierto $A \subset \mathbb{R}^n$ si al menos una de las u_k depende funcionalmente de las demás. En caso contrario diremos que el sistema es funcionalmente independiente.

Ejemplo 1: El sistema $\begin{cases} u_1 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2, \\ u_2 = x_1 + x_2 + x_3, \\ u_3 = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3, \end{cases}$

es funcionalmente dependiente pues $u_1 = \Phi(u_2, u_3) = u_2^2 - u_3$.

$$\begin{cases} u_1 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2, \\ u_2 = x_1 + x_2 + x_3, \\ u_3 = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3, \end{cases}$$

es funcionalmente dependiente pues $u_1 = \Phi(u_2, u_3) = u_2^2 - u_3$.

$$\begin{cases} u_1 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2, \\ u_2 = x_1 + x_2 + x_3, \\ u_3 = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3, \end{cases}$$

es funcionalmente dependiente pues $u_1 = \Phi(u_2, u_3) = u_2^2 - u_3$.

Es única esa dependencia?

$$\begin{cases} u_1 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2, \\ u_2 = x_1 + x_2 + x_3, \\ u_3 = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3, \end{cases}$$

es funcionalmente dependiente pues $u_1 = \Phi(u_2, u_3) = u_2^2 - u_3$.

Es única esa dependencia?

$$u_3 = u_2^2 - u_1,$$

$$\begin{cases} u_1 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2, \\ u_2 = x_1 + x_2 + x_3, \\ u_3 = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3, \end{cases}$$

es funcionalmente dependiente pues $u_1 = \Phi(u_2, u_3) = u_2^2 - u_3$.

Es única esa dependencia?

$$u_3 = u_2^2 - u_1, \qquad u_2 = \sqrt{u_1 + u_3}$$

$$\begin{cases} u_1 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2, \\ u_2 = x_1 + x_2 + x_3, \\ u_3 = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3, \end{cases}$$

es funcionalmente dependiente pues $u_1 = \Phi(u_2, u_3) = u_2^2 - u_3$.

Es única esa dependencia?

$$u_3 = u_2^2 - u_1, \qquad u_2 = \sqrt{u_1 + u_3}$$

¿Y si elegimos ahora el sistema?

$$\begin{cases} u_1 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2, \\ u_2 = x_1 + x_2 + x_3, \\ u_3 = 2\,x_2\,x_3^2 + 2\,x_1\,x_3^2 + 2\,x_2^2\,x_3 + 6\,x_1\,x_2\,x_3 + 2\,x_1^2\,x_3 + 2\,x_1\,x_2^2 + 2\,x_1^2\,x_2. \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_1 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2, \\ u_2 = x_1 + x_2 + x_3, \\ u_3 = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3, \end{cases}$$

es funcionalmente dependiente pues $u_1 = \Phi(u_2, u_3) = u_2^2 - u_3$.

Es única esa dependencia?

$$u_3 = u_2^2 - u_1, \qquad u_2 = \sqrt{u_1 + u_3}$$

¿Y si elegimos ahora el sistema?

$$\begin{cases} u_1 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2, \\ u_2 = x_1 + x_2 + x_3, \\ u_3 = 2\,x_2\,x_3^2 + 2\,x_1\,x_3^2 + 2\,x_2^2\,x_3 + 6\,x_1\,x_2\,x_3 + 2\,x_1^2\,x_3 + 2\,x_1\,x_2^2 + 2\,x_1^2\,x_2. \end{cases}$$

$$u_3 = u_2^3 - u_1\,u_2$$

Teorema

Sean m funciones $m \leq n$, $\phi_k : A \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$, $k = 1, 2, \ldots, m$, diferenciables en cierto abierto $A \subset \mathbb{R}^n$ definidas por

$$\begin{cases} u_1 = \phi_1(x_1, \ldots, x_n), \\ u_2 = \phi_2(x_1, \ldots, x_n), \\ \qquad \vdots \\ u_m = \phi_m(x_1, \ldots, x_n), \end{cases} \qquad m \leq n,$$

y sea $a \in A$. Entonces, si el jacobiano formado por las funciones $u_1, \ldots, u_m$ respecto a alguna combinación de m variables (digamos $x_{n_1}, \ldots, x_{n_m}$) es distinto de cero en a, entonces las funciones $u_1, \ldots, u_m$ son funcionalmente independientes en todo un entorno $U(a)$ de a.

Teorema

Sean m funciones $m \leq n$, $\phi_k : A \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$, $k = 1, 2, \ldots, m$, diferenciables en cierto abierto $A \subset \mathbb{R}^n$ definidas por

$$\begin{cases} u_1 = \phi_1(x_1, \ldots, x_n), \\ u_2 = \phi_2(x_1, \ldots, x_n), \\ \qquad \vdots \\ u_m = \phi_m(x_1, \ldots, x_n), \end{cases} \qquad m \leq n,$$

y sea $a \in A$. Entonces, si el jacobiano formado por las funciones $u_1, \ldots, u_m$ respecto a alguna combinación de m variables (digamos $x_{n_1}, \ldots, x_{n_m}$) es distinto de cero en a, entonces las funciones $u_1, \ldots, u_m$ son funcionalmente independientes en todo un entorno $U(a)$ de a.

Corolario

Si el sistema anterior es funcionalmente dependiente, entonces su jacobiano respecto a cualquier combinación de $m \leq n$ variables es nulo.

Demostración: Por simplicidad asumamos que

$$\det J = \det \begin{pmatrix} D_1 u_1(a) & D_2 u_1(a) & \dots & D_m u_1(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_1 u_{m-1}(a) & D_2 u_{m-1}(a) & \dots & D_m u_{m-1}(a) \\ D_1 u_m(a) & D_2 u_m(a) & \dots & D_m u_m(a) \end{pmatrix} \neq 0,$$

y supongamos que las $u_1, \dots, u_m$ son funcionalmente dependientes.

Demostración: Por simplicidad asumamos que

$$\det J = \det \begin{pmatrix} D_1 u_1(a) & D_2 u_1(a) & \dots & D_m u_1(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_1 u_{m-1}(a) & D_2 u_{m-1}(a) & \dots & D_m u_{m-1}(a) \\ D_1 u_m(a) & D_2 u_m(a) & \dots & D_m u_m(a) \end{pmatrix} \neq 0,$$

y supongamos que las $u_1, \dots, u_m$ son funcionalmente dependientes. Entonces, una de ellas, e.g. u_m, dependerá de las demás. Es decir, existe una función Φ diferenciable en $U(a)$ t.q. $u_m = \Phi(u_1, u_2, \dots, u_{m-1})$.

Demostración: Por simplicidad asumamos que

$$\det J = \det \begin{pmatrix} D_1 u_1(a) & D_2 u_1(a) & \dots & D_m u_1(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_1 u_{m-1}(a) & D_2 u_{m-1}(a) & \dots & D_m u_{m-1}(a) \\ D_1 u_m(a) & D_2 u_m(a) & \dots & D_m u_m(a) \end{pmatrix} \neq 0,$$

y supongamos que las $u_1, \dots, u_m$ son funcionalmente dependientes. Entonces, una de ellas, e.g. u_m, dependerá de las demás. Es decir, existe una función Φ diferenciable en $U(a)$ t.q. $u_m = \Phi(u_1, u_2, \dots, u_{m-1})$. Luego

$$D_k u_m =$$

Demostración: Por simplicidad asumamos que

$$\det J = \det \begin{pmatrix} D_1 u_1(a) & D_2 u_1(a) & \dots & D_m u_1(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_1 u_{m-1}(a) & D_2 u_{m-1}(a) & \dots & D_m u_{m-1}(a) \\ D_1 u_m(a) & D_2 u_m(a) & \dots & D_m u_m(a) \end{pmatrix} \neq 0,$$

y supongamos que las $u_1, \dots, u_m$ son funcionalmente dependientes. Entonces, una de ellas, e.g. u_m, dependerá de las demás. Es decir, existe una función Φ diferenciable en $U(a)$ t.q. $u_m = \Phi(u_1, u_2, \dots, u_{m-1})$. Luego

$$D_k u_m = \frac{\partial u_m}{\partial x_k} = \frac{\partial \Phi}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_k} + \cdots + \frac{\partial \Phi}{\partial u_{m-1}}\frac{\partial u_{m-1}}{\partial x_k}, \quad k = 1, 2, \dots m.$$

Pero entonces la última fila (la m-ésima) del jacobiano es combinación lineal de las filas anteriores $1, 2, \dots, m-1$, lo cual, por las propiedades de los determinantes implica que $\det J = 0$, lo cual es una contradicción.

$$\det J = \det \begin{pmatrix} D_1 u_1(a) & D_2 u_1(a) & \dots & D_m u_1(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_1 u_{m-1}(a) & D_2 u_{m-1}(a) & \dots & D_m u_{m-1}(a) \\ D_1 u_m(a) & D_2 u_m(a) & \dots & D_m u_m(a) \end{pmatrix} \neq 0.$$

$$\frac{\partial u_m}{\partial x_1} = \frac{\partial \Phi}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \cdots + \frac{\partial \Phi}{\partial u_{m-1}}\frac{\partial u_{m-1}}{\partial x_1}$$
$$\frac{\partial u_m}{\partial x_2} = \frac{\partial \Phi}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial \Phi}{\partial u_{m-1}}\frac{\partial u_{m-1}}{\partial x_2}$$
$$\vdots$$
$$\frac{\partial u_m}{\partial x_{m-1}} = \frac{\partial \Phi}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_{m-1}} + \cdots + \frac{\partial \Phi}{\partial u_{m-1}}\frac{\partial u_{m-1}}{\partial x_{m-1}}$$

$$(1) \times \frac{\partial \Phi}{\partial u_1} + (2) \times \frac{\partial \Phi}{\partial u_2} + \cdots + (m-1) \times \frac{\partial \Phi}{\partial u_{m-1}} - (m) = 0$$

Ejemplo: Sea el sistema de funciones $u = x + y$ y $v = x - y$. Como $\det \begin{pmatrix} D_x u & D_y u \\ D_x v & D_y v \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -2 \neq 0$, estas funciones son funcionalmente independientes.

Ejemplo: Sea el sistema de funciones $u = x + y$ y $v = x - y$. Como $\det \begin{pmatrix} D_x u & D_y u \\ D_x v & D_y v \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -2 \neq 0$, estas funciones son funcionalmente independientes.

Ejemplo: El sistema

$$\begin{cases} u_1 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2, \\ u_2 = x_1 + x_2 + x_3, \\ u_3 = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3, \end{cases}$$

es funcionalmente dependiente pues

$$J = \det \begin{pmatrix} 2x_1 & 2x_2 & 2x_3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2(x_2 + x_3) & 2(x_1 + x_3) & 2(x_1 + x_2) \end{pmatrix} = 0.$$

Teorema (del rango)

Sea el sistema de funciones $u_k = \phi_k(x_1, \ldots, x_n)$, $k = 1, \ldots, m \leq n$. Asumiremos que las u_k son diferenciables en el entorno de cierto $a \in A \subset \mathbb{R}^n$ y que todas las derivadas parciales $\frac{\partial u_k}{\partial x_l}$, $k = 1, \ldots, m$, $l = 1, 2, \ldots, n$ son continuas en a. Sea J la matriz jacobiana del sistema

$$J = \begin{pmatrix} D_1 u_1(a) & D_2 u_1(a) & \ldots & D_n u_1(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_1 u_m(a) & D_2 u_m(a) & \ldots & D_n u_m(a) \end{pmatrix}.$$

Supongamos que en la matriz J anterior cierto menor de orden $r \leq m \leq n$ es distinto de cero en a y que cualquier menor de orden $r + 1$ es nulo en el entorno de a (i.e.,el rango de J es r). Entonces las r funciones correspondientes al menor distinto de cero son funcionalmente independientes en el entorno de a y cada una de las demás funciones depende, en dicho entorno, de las r funciones independientes.