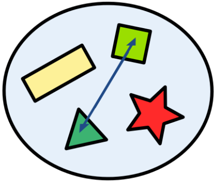
Espacios normados, espacios métricos y espacios euclídeos

R. Álvarez-Nodarse

Universidad de Sevilla



$f:\mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}, \qquad z = f(x,y), \ \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = ?$

$f:\mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}, \qquad z = f(x,y), \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = ?$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases} \qquad \lim_{x\to 0} f(x,\alpha x) = \frac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2}$$

$f:\mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}, \qquad z = f(x,y), \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = ?$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases} \qquad \lim_{x\to 0} f(x,\alpha x) = \frac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2}$$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x,\alpha x) = 0$$

$$\lim_{x\to 0} f(x,x^2) = 1/2 \neq 0$$

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & \text{si } (x,y)=(0,0).\end{cases} \qquad \lim_{x\to 0} f(x,\alpha x)=\frac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2}$$

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, & \text{si } (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & \text{si } (x,y)=(0,0),\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x,\alpha x)=0$$

$$\lim_{x\to 0} f(x,x^2)=1/2\neq 0$$

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{|x|^{3/2}y}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & \text{si } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x,\alpha x)=0$$

$$\lim_{x\to 0} f(x,x^\alpha)=0,\ \ \alpha>0$$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y)\neq(0,0), \\ 0, & \text{si } (x,y)=(0,0). \end{cases} \qquad \lim_{x\to 0} f(x,\alpha x) = \frac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2}$$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4+y^2}, & \text{si } (x,y)\neq(0,0), \\ 0, & \text{si } (x,y)=(0,0), \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0} f(x,\alpha x) = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0} f(x,x^2) = 1/2 \neq 0 \end{array}$$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|x|^{3/2} y}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y)\neq(0,0), \\ 0, & \text{si } (x,y)=(0,0). \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0} f(x,\alpha x) = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0} f(x,x^\alpha) = 0, \ \ \alpha > 0 \end{array}$$

$$0 \leq \left| \frac{|x|^{3/2} y}{x^2+y^2} \right| = |x|^{1/2} \left| \frac{|xy|}{x^2+y^2} \right| \leq \frac{1}{2}|x|^{1/2} \to 0$$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y)\neq(0,0), \\ 0, & \text{si } (x,y)=(0,0). \end{cases} \qquad \lim_{x\to 0} f(x,\alpha x) = \frac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2}$$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4+y^2}, & \text{si } (x,y)\neq(0,0), \\ 0, & \text{si } (x,y)=(0,0), \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\to 0} f(x,\alpha x) = 0 \\ \displaystyle\lim_{x\to 0} f(x,x^2) = 1/2 \neq 0 \end{array}$$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|x|^{3/2} y}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y)\neq(0,0), \\ 0, & \text{si } (x,y)=(0,0). \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \displaystyle\lim_{x\to 0} f(x,\alpha x) = 0 \\ \displaystyle\lim_{x\to 0} f(x,x^\alpha) = 0, \ \ \alpha>0 \end{array}$$

$$0 \leq \left| \frac{|x|^{3/2} y}{x^2+y^2} \right| = |x|^{1/2} \left| \frac{|xy|}{x^2+y^2} \right| \leq \frac{1}{2}|x|^{1/2} \to 0$$

¡Necesitamos formalizar estos límites!

¡Necesitamos formalizar estos límites!

$$\Downarrow$$

Espacios métricos, normados y euclídeos

Definición

Sea V un conjunto de elementos (vectores) sobre el cual están definidas las operaciones suma x“$+$”y *de dos elementos x, $y \in V$ y la* multiplicación α“$\cdot$”x *de un escalar $\alpha \in \mathbb{R}$ por un vector.*

Definición

Sea V un conjunto de elementos (vectores) sobre el cual están definidas las operaciones suma x"$+$"y *de dos elementos $x, y \in V$ y la* multiplicación α"$\cdot$"x *de un escalar $\alpha \in \mathbb{R}$ por un vector. V* **es un espacio vectorial** *si*

1. *$\forall x, y \in V$, el vector suma, $w = x + y \in V$ y se cumple que:*
   1. $x + y = y + x$
   2. $(x + y) + z = x + (y + z)$
   3. *Existe un elemento "nulo" de V, tal que $x + 0 = 0 + x = x$*
   4. *Cualquiera sea el vector x de V, existe el elemento $(-x)$ "opuesto" a x, tal que $x + (-x) = (-x) + x = 0$.*

Definición

Sea V un conjunto de elementos (vectores) sobre el cual están definidas las operaciones suma x"$+$"y *de dos elementos $x, y \in V$ y la* multiplicación α"$\cdot$"x *de un escalar $\alpha \in \mathbb{R}$ por un vector. V* **es un espacio vectorial** *si*

1. $\forall x, y \in V$, *el vector suma,* $w = x + y \in V$ *y se cumple que:*
   1. $x + y = y + x$
   2. $(x + y) + z = x + (y + z)$
   3. *Existe un elemento "nulo" de V, tal que $x + 0 = 0 + x = x$*
   4. *Cualquiera sea el vector x de V, existe el elemento $(-x)$ "opuesto" a x, tal que $x + (-x) = (-x) + x = 0$.*
2. $\forall x \in V$, *el vector* $w = \alpha \cdot x \in V$ *y se cumple que:*
   1. $\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$
   2. $(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$
   3. $\alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha\beta) \cdot x$
   4. $1 \cdot x = x$

Ejemplos de espacios vectoriales

- El conjunto de los vectores de $\mathbb{R}^n$ cuando la suma de dos vectores y la multiplicación por un escalar es la estándar.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}, \qquad \alpha \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{pmatrix}$$

▶ El conjunto de los vectores de $\mathbb{R}^n$ cuando la suma de dos vectores y la multiplicación por un escalar es la estándard.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}, \qquad \alpha \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{pmatrix}$$

▶El conjunto $\mathbb{R}^{m\times n}$ de las matrices $m \times n$ cuando la suma de dos matrices y la multiplicación por un escalar es la estándard.

Definición

Sea V un espacio vectorial. Diremos que un subconjunto H de elementos de V es un subespacio vectorial de V si H es a su vez un espacio vectorial respecto a las mismas operaciones suma "$+$" *y* multiplicación "$\cdot$" *que V.*

Definición

Sea V un espacio vectorial. Diremos que un subconjunto H de elementos de V es un subespacio vectorial de V si H es a su vez un espacio vectorial respecto a las mismas operaciones suma "$+$" *y* multiplicación "$\cdot$" *que V.*

Ejemplos.

1. Dado un espacio vectorial V, son subespacios vectoriales "triviales" los subespacios $H = \{0\}$ (conjunto que tiene como único elemento, el nulo) y $H = V$ (el mismo espacio vectorial).

Definición

Sea V un espacio vectorial. Diremos que un subconjunto H de elementos de V es un subespacio vectorial de V si H es a su vez un espacio vectorial respecto a las mismas operaciones suma "$+$" *y* multiplicación "$\cdot$" *que V.*

Ejemplos.

1. Dado un espacio vectorial V, son subespacios vectoriales "triviales" los subespacios $H = \{0\}$ (conjunto que tiene como único elemento, el nulo) y $H = V$ (el mismo espacio vectorial).
2. Sea $k \leq n$. En conjunto $V = \{(x_1, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$.

Definición

Sea V un espacio vectorial. Diremos que un subconjunto H de elementos de V es un subespacio vectorial de V si H es a su vez un espacio vectorial respecto a las mismas operaciones suma "$+$" *y* multiplicación "$\cdot$" *que V.*

Ejemplos.

1. Dado un espacio vectorial V, son subespacios vectoriales "triviales" los subespacios $H = \{0\}$ (conjunto que tiene como único elemento, el nulo) y $H = V$ (el mismo espacio vectorial).
2. Sea $k \leq n$. En conjunto $V = \{(x_1, \ldots, x_k, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$.
3. El conjunto de vectores $x = (x_1, \ldots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ tales que para todos $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, $\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n = 0$.

Teorema

Un subconjunto H de elementos de V es un subespacio vectorial de V si y sólo si se cumple que

- *Para todos x e y*, vectores *de H y α, $\beta \in \mathbb{R}$ el vector $w = \alpha x + \beta y$ también es un vector de H.*

Teorema

Un subconjunto H de elementos de V es un subespacio vectorial de V si y sólo si se cumple que

- *Para todos x e y*, vectores *de H y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ el vector $w = \alpha x + \beta y$ también es un vector de H.*

Al vector $v = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_p v_p, \quad x_1, \ldots, x_p \in \mathbb{R}$, se le denomina combinación lineal de los vectores $v_1, v_2, ..., v_p$.

Sea $\mathrm{span}\,(v_1, v_2, ..., v_p)$ el conjunto de todas las combinaciones lineales de los vectores $v_1, v_2, ..., v_p \in V$

Teorema

Un subconjunto H de elementos de V es un subespacio vectorial de V si y sólo si se cumple que

- *Para todos x e y,* vectores *de H y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ el vector $w = \alpha x + \beta y$ también es un vector de H.*

Al vector $v = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_p v_p, \quad x_1, \ldots, x_p \in \mathbb{R}$, se le denomina combinación lineal de los vectores $v_1, v_2, ..., v_p$.

Sea $\mathrm{span}\,(v_1, v_2, ..., v_p)$ el conjunto de todas las combinaciones lineales de los vectores $v_1, v_2, ..., v_p \in V$

Teorema

$\mathrm{span}\,(v_1, v_2, ..., v_p)$ *es un subespacio vectorial de V.*

Dicho subespacio vectorial comúnmente se denomina subespacio generado por los vectores $v_1, v_2, ..., v_p$.

Definición

Un conjunto de vectores $v_1, v_2, ..., v_p$ *de un espacio vectorial* V *se denomina* **linealmente independiente** *si la ecuación vectorial*

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_p v_p = 0, \quad x_1, x_2, \cdots, x_p \in \mathbb{R}$$

tiene como única solución la trivial $x_1 = \cdots = x_p = 0$.

Definición

Un conjunto de vectores $v_1, v_2, ..., v_p$ *de un espacio vectorial* V *se denomina* **linealmente independiente** *si la ecuación vectorial*

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_p v_p = 0, \quad x_1, x_2, \cdots, x_p \in \mathbb{R}$$

tiene como única solución la trivial $x_1 = \cdots = x_p = 0$.

Definición

Un conjunto de vectores $v_1, v_2, ..., v_p$ *se denomina* **linealmente dependiente** *si existen* $x_1, x_2, \cdots, x_p \in \mathbb{R}$ *no todos iguales a cero tales que se verifique la ecuación vectorial*

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_p v_p = 0.$$

Definición

Sea H un subespacio vectorial del espacio vectorial V. El conjunto de vectores $B = \{b_1, b_2, ..., b_p\}$ de V es una base de H si

i) *B es un conjunto de vectores linealmente independientes*

ii) *$H = \mathrm{span}\,(b_1, b_2, ..., b_p)$, o sea, B genera a todo H.*

En particular si H coincide con V, entonces B es una base de todo el espacio vectorial V.

Definición

Sea H un subespacio vectorial del espacio vectorial V. El conjunto de vectores $B = \{b_1, b_2, ..., b_p\}$ de V es una base de H si

i) *B es un conjunto de vectores linealmente independientes*

ii) *$H = \mathrm{span}\,(b_1, b_2, ..., b_p)$, o sea, B genera a todo H.*

En particular si H coincide con V, entonces B es una base de todo el espacio vectorial V.

Ejemplo 1: Las n columnas $a_1, ..., a_n$ de una matriz invertible $n \times n$, son **li** y además $\mathbb{R}^n = \mathrm{span}\,(a_1, ..., a_n)$. Por tanto $B = a_1, ..., a_n$ es una base de $\mathbb{R}^n$.

Definición

Sea H un subespacio vectorial del espacio vectorial V. El conjunto de vectores $B = \{b_1, b_2, ..., b_p\}$ de V es una base de H si

i) *B es un conjunto de vectores linealmente independientes*

ii) *$H = \mathrm{span}\,(b_1, b_2, ..., b_p)$, o sea, B genera a todo H.*

En particular si H coincide con V, entonces B es una base de todo el espacio vectorial V.

Ejemplo 1: Las n columnas $a_1, ..., a_n$ de una matriz invertible $n \times n$, son **li** y además $\mathbb{R}^n = \mathrm{span}\,(a_1, ..., a_n)$. Por tanto $B = a_1, ..., a_n$ es una base de $\mathbb{R}^n$.

Si $A = I_n$, es la matriz identidad $n \times n$, las columnas $e_1, e_2, ..., e_n$ de la misma son la *base canónica* de $\mathbb{R}^n$.

Teorema

Si un espacio vectorial V tiene una base de n vectores $B = \{b_1, b_2, ..., b_n\}$, entonces cualquier conjunto con más de n vectores de V es linealmente dependiente. Además, si un espacio vectorial V tiene una base de n vectores $B = \{b_1, ..., b_n\}$, entonces cualquier otra base de V tendrá que tener n vectores de V.

Teorema

Si un espacio vectorial V tiene una base de n vectores $B = \{b_1, b_2, ..., b_n\}$, entonces cualquier conjunto con más de n vectores de V es linealmente dependiente. Además, si un espacio vectorial V tiene una base de n vectores $B = \{b_1, ..., b_n\}$, entonces cualquier otra base de V tendrá que tener n vectores de V.

El menor número de vectores linealmente independientes que generan un espacio vectorial es una propiedad intrínseca de dicho espacio y se denomina **dimensión del espacio vectorial**.

Teorema

Si un espacio vectorial V tiene una base de n vectores $B = \{b_1, b_2, ..., b_n\}$, entonces cualquier conjunto con más de n vectores de V es linealmente dependiente. Además, si un espacio vectorial V tiene una base de n vectores $B = \{b_1, ..., b_n\}$, entonces cualquier otra base de V tendrá que tener n vectores de V.

El menor número de vectores linealmente independientes que generan un espacio vectorial es una propiedad intrínseca de dicho espacio y se denomina **dimensión del espacio vectorial**.

▶Un espacio vectorial V es de dimensión finita n si V está generado por una base de n elementos en cuyo caso $\dim V = n$.

Teorema

Si un espacio vectorial V tiene una base de n vectores $B = \{b_1, b_2, ..., b_n\}$, entonces cualquier conjunto con más de n vectores de V es linealmente dependiente. Además, si un espacio vectorial V tiene una base de n vectores $B = \{b_1, ..., b_n\}$, entonces cualquier otra base de V tendrá que tener n vectores de V.

El menor número de vectores linealmente independientes que generan un espacio vectorial es una propiedad intrínseca de dicho espacio y se denomina **dimensión del espacio vectorial**.

▶Un espacio vectorial V es de dimensión finita n si V está generado por una base de n elementos en cuyo caso $\dim V = n$.

▶El espacio nulo $\{0\}$ tiene dimensión 0.

Teorema

Si un espacio vectorial V tiene una base de n vectores $B = \{b_1, b_2, ..., b_n\}$, entonces cualquier conjunto con más de n vectores de V es linealmente dependiente. Además, si un espacio vectorial V tiene una base de n vectores $B = \{b_1, ..., b_n\}$, entonces cualquier otra base de V tendrá que tener n vectores de V.

El menor número de vectores linealmente independientes que generan un espacio vectorial es una propiedad intrínseca de dicho espacio y se denomina **dimensión del espacio vectorial**.

▶Un espacio vectorial V es de dimensión finita n si V está generado por una base de n elementos en cuyo caso $\dim V = n$.

▶El espacio nulo $\{0\}$ tiene dimensión 0.

▶Si V no puede ser generado por una base finita, entonces V es de dimensión infinita: $\dim V = \infty$.

Teorema

Si un espacio vectorial V tiene una base de n vectores $B = \{b_1, b_2, ..., b_n\}$, entonces cualquier conjunto con más de n vectores de V es linealmente dependiente. Además, si un espacio vectorial V tiene una base de n vectores $B = \{b_1, ..., b_n\}$, entonces cualquier otra base de V tendrá que tener n vectores de V.

El menor número de vectores linealmente independientes que generan un espacio vectorial es una propiedad intrínseca de dicho espacio y se denomina **dimensión del espacio vectorial**.

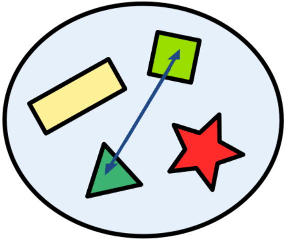
▶Un espacio vectorial V es de dimensión finita n si V está generado por una base de n elementos en cuyo caso $\dim V = n$.

▶El espacio nulo $\{0\}$ tiene dimensión 0.

▶Si V no puede ser generado por una base finita, entonces V es de dimensión infinita: $\dim V = \infty$.

Ejemplos: $\dim \mathbb{R}^n = n, \quad \dim C_{[a,b]} = \infty.$

Definiendo la distancia entre los elementos de un conjunto



Definición

Un **espacio métrico** *es un par* $(\mathbb{X}, \rho)$ *donde* $\mathbb{X}$ *es un conjunto y* $\rho := \rho(x, y)$ *es una función real (univaluada) no negativa definida para todos* $x, y, z \in \mathbb{X}$ *tal que*

1. $\rho(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$,
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$,
3. $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$.

Definición

Un **espacio métrico** *es un par* $(\mathbb{X}, \rho)$ *donde* $\mathbb{X}$ *es un conjunto y* $\rho := \rho(x, y)$ *es una función real (univaluada) no negativa definida para todos* $x, y, z \in \mathbb{X}$ *tal que*

1. $\rho(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$,
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$,
3. $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$.

Si escogemos $\mathbb{X} = \mathbb{R}^n$, i.e., $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ y definimos la función

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|^2},$$

obtenemos un espacio métrico $(\mathbb{R}, \rho)$. Esta métrica se suele denominar **métrica euclídea**.

Definición

Un **espacio métrico** *es un par* $(\mathbb{X}, \rho)$ *donde* $\mathbb{X}$ *es un conjunto y* $\rho := \rho(x, y)$ *es una función real (univaluada) no negativa definida para todos* $x, y, z \in \mathbb{X}$ *tal que*

1. $\rho(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$,
2. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$,
3. $\rho(x, z) \leq \rho(x, y) + \rho(y, z)$.

Si escogemos $\mathbb{X} = \mathbb{R}^n$, i.e., $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ y definimos la función

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|^2},$$

obtenemos un espacio métrico $(\mathbb{R}, \rho)$. Esta métrica se suele denominar **métrica euclídea**. **¿Prueba?**

Definición

Un espacio vectorial $\mathbb{X}$ se denomina **espacio normado** *si para todo $x \in \mathbb{X}$ existe un número real denominado norma, y que denotaremos por $\|x\|$, que cumple con las condiciones*

1. $\forall x \in \mathbb{X}$, $\|x\| \geq 0$ *y si* $\|x\| = 0$ *entonces* $x = 0$.
2. $\forall x \in \mathbb{X}$ *y* $\lambda \in \mathbb{R}$, $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$.
3. $\forall x, y \in \mathbb{X}$, *se tiene la des. triang.* $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Definición

Un espacio vectorial $\mathbb{X}$ *se denomina* **espacio normado** *si para todo* $x \in \mathbb{X}$ *existe un número real denominado norma, y que denotaremos por* $\|x\|$*, que cumple con las condiciones*

1. $\forall x \in \mathbb{X}$, $\|x\| \geq 0$ *y si* $\|x\| = 0$ *entonces* $x = 0$.
2. $\forall x \in \mathbb{X}$ *y* $\lambda \in \mathbb{R}$, $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$.
3. $\forall x, y \in \mathbb{X}$, *se tiene la des. triang.* $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Ejemplo

$\mathbb{X} = \mathbb{R}^n$ *con la norma* $\|x\| = \sqrt[p]{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p}$, $p = 2$ *es un espacio normado.*

La norma cuando $p = 2$ se denomina **norma euclídea**.

Definición

Un espacio vectorial $\mathbb{X}$ *se denomina* **espacio normado** *si para todo* $x \in \mathbb{X}$ *existe un número real denominado norma, y que denotaremos por* $\|x\|$, *que cumple con las condiciones*

1. $\forall x \in \mathbb{X}$, $\|x\| \geq 0$ *y si* $\|x\| = 0$ *entonces* $x = 0$.
2. $\forall x \in \mathbb{X}$ *y* $\lambda \in \mathbb{R}$, $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$.
3. $\forall x, y \in \mathbb{X}$, *se tiene la des. triang.* $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Ejemplo

$\mathbb{X} = \mathbb{R}^n$ *con la norma* $\|x\| = \sqrt[p]{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p}$, $p = 2$ *es un espacio normado.*

La norma cuando $p = 2$ se denomina **norma euclídea**. **¿y si $p \geq 1$?**

¿Todo espacio métrico es normado?

Si en un espacio normado $\mathbb{X}$ definimos $\rho(x, y) = \|x - y\|$, el par $(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$ es espacio métrico, i.e.,

Todo espacio normado es un espacio métrico

A ρ se denomina *métrica inducida por la norma*.

Si en un espacio normado $\mathbb{X}$ definimos $\rho(x, y) = \|x - y\|$, el par $(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$ es espacio métrico, i.e.,

Todo espacio normado es un espacio métrico

A ρ se denomina *métrica inducida por la norma*.

Lema

Sea $\mathbb{X}$ un espacio normado. Entonces, la métrica ρ inducida por la norma satisface las condiciones

1. $\rho(x + z, y + z) = \rho(x, y)$,
2. $\rho(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| \rho(x, y)$.

¿Todo espacio métrico es normado? **NO**

Si en un espacio normado $\mathbb{X}$ definimos $\rho(x,y) = \|x-y\|$, el par $(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$ es espacio métrico, i.e.,

Todo espacio normado es un espacio métrico

A ρ se denomina *métrica inducida por la norma*.

Lema

Sea $\mathbb{X}$ un espacio normado. Entonces, la métrica ρ inducida por la norma satisface las condiciones

1. $\rho(x+z, y+z) = \rho(x,y)$,
2. $\rho(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| \rho(x,y)$.

Dado que estamos interesados en $\mathbb{R}^n$ que es un espacio normado y por tanto métrico con la métrica ρ inducida por la norma $\rho(x,y) = \|x-y\|$ en adelante vamos a asumir que $\mathbb{X}$ es un espacio métrico cuya métrica viene inducida por la correspondientes norma.

Ejercicio: Probar que $\mathbb{R}^n$ con la p-métrica

$$\rho(x,y) = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|^p \right)^{1/p}, \qquad p \geq 1,$$

es un espacio métrico.

Ejercicio: Probar que $\mathbb{R}^n$ con la p-métrica

$$\rho(x,y) = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|^p \right)^{1/p}, \qquad p \geq 1,$$

es un espacio métrico.

Idea: Probamos que es normado con la norma $\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p \right)^{1/p}$.

Ejercicio: Probar que $\mathbb{R}^n$ con la p-métrica

$$\rho(x,y) = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|^p\right)^{1/p}, \qquad p \geq 1,$$

es un espacio métrico.

Idea: Probamos que es normado con la norma $\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p}$.

1. Probar que para todos $u, v \geq 0$ y $1 \leq p < +\infty$ se tiene

$$(u+v)^p = \inf_{t\in(0,1)} \left\{ t^{1-p} u^p + (1-t)^{1-p} v^p ; u, v \geq 0, 0 < t < 1 \right\}.$$

Ejercicio: Probar que $\mathbb{R}^n$ con la p-métrica

$$\rho(x,y) = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|^p\right)^{1/p}, \qquad p \geq 1,$$

es un espacio métrico.

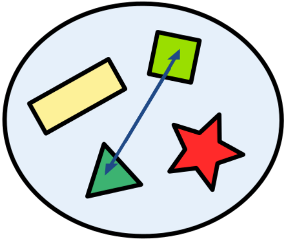
Idea: Probamos que es normado con la norma $\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p}$.

1. Probar que para todos $u, v \geq 0$ y $1 \leq p < +\infty$ se tiene

$$(u+v)^p = \inf_{t\in(0,1)} \left\{ t^{1-p}u^p + (1-t)^{1-p}v^p;\, u, v \geq 0, 0 < t < 1 \right\}.$$

2. Usamos 1. $|x_i + y_i|^p \leq (|x_i| + |y_i|)^p = \cdots$

¿Para qué sirve la métrica?



¿Para qué sirve la métrica?

Así, en los espacios normados, como en los métricos, podemos definir la convergencia de sucesiones, sucesiones de Cauchy, etc.

Así, en los espacios normados, como en los métricos, podemos definir la convergencia de sucesiones, sucesiones de Cauchy, etc.

Definición

Una sucesión $(x_n)_n$ de elementos de $\mathbb{X}$ **es convergente***, y lo denotaremos por* $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, **si existe un x** $\in \mathbb{X}$ *t.q.* $\forall \epsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ *t.q.* $\forall n > N$, $\rho(x, x_n) < \epsilon$. *En caso contrario diremos que $(x_n)_n$ es* **divergente**.

Así, en los espacios normados, como en los métricos, podemos definir la convergencia de sucesiones, sucesiones de Cauchy, etc.

Definición

Una sucesión $(x_n)_n$ de elementos de $\mathbb{X}$ **es convergente**, *y lo denotaremos por* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, **si existe un x** $\in \mathbb{X}$ *t.q.* $\forall \epsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ *t.q.* $\forall n > N$, $\rho(x, x_n) < \epsilon$. *En caso contrario diremos que $(x_n)_n$ es* **divergente**.

Corolario: Una sucesión $(x_n)_n$ de elementos de $\mathbb{R}^n$ es convergente a $x \in \mathbb{R}^n$, si $\forall \epsilon > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$ t.q. $\forall n > N$, $\|x - x_n\| < \epsilon$.

Así, en los espacios normados, como en los métricos, podemos definir la convergencia de sucesiones, sucesiones de Cauchy, etc.

Definición

Una sucesión $(x_n)_n$ de elementos de $\mathbb{X}$ **es convergente**, *y lo denotaremos por* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, **si existe un x** $\in \mathbb{X}$ *t.q.* $\forall \epsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ *t.q.* $\forall n > N$, $\rho(x, x_n) < \epsilon$. *En caso contrario diremos que* $(x_n)_n$ *es* **divergente**.

Corolario: Una sucesión $(x_n)_n$ de elementos de $\mathbb{R}^n$ es convergente a $x \in \mathbb{R}^n$, si $\forall \epsilon > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$ t.q. $\forall n > N$, $\|x - x_n\| < \epsilon$.

Ejercicio: Si existe el límite es único.

Así, en los espacios normados, como en los métricos, podemos definir la convergencia de sucesiones, sucesiones de Cauchy, etc.

Definición

Una sucesión $(x_n)_n$ de elementos de $\mathbb{X}$ **es convergente**, *y lo denotaremos por* $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, **si existe un x** $\in \mathbb{X}$ *t.q.* $\forall \epsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ *t.q.* $\forall n > N$, $\rho(x, x_n) < \epsilon$. *En caso contrario diremos que $(x_n)_n$ es* **divergente**.

Corolario: Una sucesión $(x_n)_n$ de elementos de $\mathbb{R}^n$ es convergente a $x \in \mathbb{R}^n$, si $\forall \epsilon > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$ t.q. $\forall n > N$, $\|x - x_n\| < \epsilon$.

Ejercicio: Si existe el límite es único.

Ejercicio: Tanto la norma como la métrica son aplicaciones continuas: Es decir, si $x_n \to x$ entonces $\|x_n\| \to \|x\|$.

Así, en los espacios normados, como en los métricos, podemos definir la convergencia de sucesiones, sucesiones de Cauchy, etc.

Definición

Una sucesión $(x_n)_n$ de elementos de $\mathbb{X}$ **es convergente***, y lo denotaremos por $\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n = x$,* **si existe un x** $\in \mathbb{X}$ *t.q.* $\forall\epsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ *t.q.* $\forall n > N$, $\rho(x, x_n) < \epsilon$. *En caso contrario diremos que $(x_n)_n$ es* **divergente***.*

Corolario: Una sucesión $(x_n)_n$ de elementos de $\mathbb{R}^n$ es convergente a $x \in \mathbb{R}^n$, si $\forall\epsilon > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$ t.q. $\forall n > N$, $\|x - x_n\| < \epsilon$.

Ejercicio: Si existe el límite es único.

Ejercicio: Tanto la norma como la métrica son aplicaciones continuas: Es decir, si $x_n \to x$ entonces $\|x_n\| \to \|x\|$.

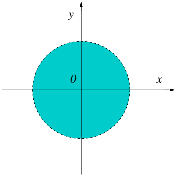
Ejercicio: Una sucesión $(x_n)_n$ de $\mathbb{R}^n$ converge a $x \in \mathbb{R}^n \iff$ convergen sus componentes a las componentes del límite.

Definición

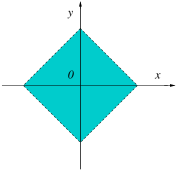
Sea $\mathbb{X}$ *un espacio métrico,* $x_0 \in \mathbb{X}$ *y* $r > 0$*.* $B(x_0, r)$ *es una "bola" si* $B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{X};\ \rho(x_0, x) < r\} \Leftrightarrow \{x \in \mathbb{X};\ \|x_0 - x\| < r\}$.

Definición

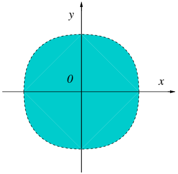
Sea $\mathbb{X}$ *un espacio métrico,* $x_0 \in \mathbb{X}$ *y* $r > 0$*.* $B(x_0, r)$ *es una "bola" si* $B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{X};\ \rho(x_0, x) < r\} \Leftrightarrow \{x \in \mathbb{X};\ \|x_0 - x\| < r\}$.



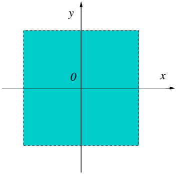
$\|x\| = \sqrt{x^2 + y^2}$



$\|x\| = |x| + |y|$



$\|x\| = \sqrt[p]{x^p + y^p}$, $p > 2$

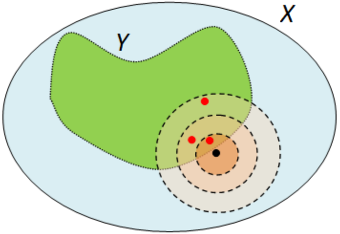


$\|x\| = \text{máx}(|x|, |y|)$

Puntos aislados, adherentes y

Definición

Diremos que x_0 es un **punto de límite** *de $M \subset \mathbb{X}$ si $\forall\epsilon > 0$ en la bola $B(x_0, \epsilon)$, hay al menos un $x \in M$, $x \neq x_0$, i.e., su $\forall\epsilon > 0$ en cada $B(x, \epsilon)$ hay infinitos elementos de M distintos de x.*

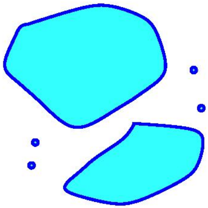


Definición

Un subconjunto $M \subset \mathbb{X}$ *es acotado si existe una bola de radio finito que contiene a* M*, i.e., dado un* $x_0 \in \mathbb{X}$ $\exists r > 0$ *t.q.* $M \subset B(x_0, r)$*.*

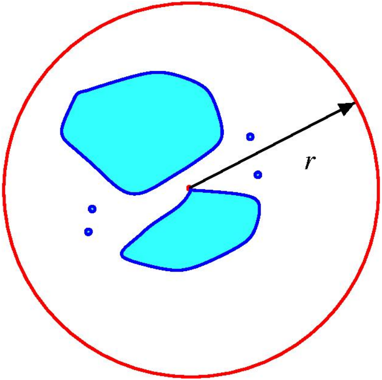
Definición

Un subconjunto $M \subset \mathbb{X}$ es acotado si existe una bola de radio finito que contiene a M, i.e., dado un $x_0 \in \mathbb{X}$ $\exists r > 0$ t.q. $M \subset B(x_0, r)$.



Definición

Un subconjunto $M \subset \mathbb{X}$ es acotado si existe una bola de radio finito que contiene a M, i.e., dado un $x_0 \in \mathbb{X}$ $\exists r > 0$ t.q. $M \subset B(x_0, r)$.

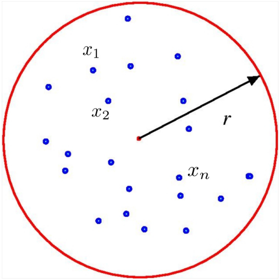


Definición

Una sucesión $(x_n)_n$ *de elementos de* $\mathbb{X}$ *es acotada si existe un* $x_0 \in \mathbb{X}$ *y un número* $K > 0$ *tal que* $\rho(x_0, x_n) < K$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

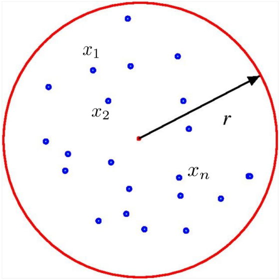
Definición

Una sucesión $(x_n)_n$ *de elementos de* $\mathbb{X}$ *es acotada si existe un* $x_0 \in \mathbb{X}$ *y un número* $K > 0$ *tal que* $\rho(x_0, x_n) < K$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*.*



Definición

Una sucesión $(x_n)_n$ *de elementos de* $\mathbb{X}$ *es acotada si existe un* $x_0 \in \mathbb{X}$ *y un número* $K > 0$ *tal que* $\rho(x_0, x_n) < K$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*.*



Theorem (Bolzano-Weierstrass)

Todo conjunto infinito y acotado de $\mathbb{R}^n$ *tiene al menos un punto de acumulación.* *¿para una sucesión?*

Definición

Una sucesión $(x_n)_n$ de elementos de $\mathbb{X}$ se denomina de **Cauchy o fundamental** *si para todo $\epsilon > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > N$ y todo $p \in \mathbb{N}$, $\rho(x_n, x_{n+p}) < \epsilon$.*

Una sucesión en $\mathbb{R}^n$ es de Cauchy $\Leftrightarrow$ lo son sus componentes, i.e., en $\mathbb{R}^n$ toda sucesión es convergente $\Leftrightarrow$ es de Cauchy. Esta propiedad de $\mathbb{R}^n$ no es cierta para cualquier espacio métrico $\mathbb{X}$.

Definición

Una sucesión $(x_n)_n$ de elementos de $\mathbb{X}$ se denomina de **Cauchy o fundamental** *si para todo $\epsilon > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > N$ y todo $p \in \mathbb{N}$, $\rho(x_n, x_{n+p}) < \epsilon$.*

Una sucesión en $\mathbb{R}^n$ es de Cauchy $\Leftrightarrow$ lo son sus componentes, i.e., en $\mathbb{R}^n$ toda sucesión es convergente $\Leftrightarrow$ es de Cauchy. Esta propiedad de $\mathbb{R}^n$ no es cierta para cualquier espacio métrico $\mathbb{X}$.

Definición

Un **espacio métrico** *$\mathbb{X}$ se denomina* **completo** *si y sólo si toda sucesión de Cauchy de elementos de $\mathbb{X}$ converge.*

Definición

Un espacio normado completo (en la métrica inducida por la norma) se denomina **espacio de Banach***.*

Definición

Una sucesión $(x_n)_n$ de elementos de $\mathbb{X}$ se denomina de **Cauchy o fundamental** *si para todo $\epsilon > 0$ existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > N$ y todo $p \in \mathbb{N}$, $\rho(x_n, x_{n+p}) < \epsilon$.*

Una sucesión en $\mathbb{R}^n$ es de Cauchy $\Leftrightarrow$ lo son sus componentes, i.e., en $\mathbb{R}^n$ toda sucesión es convergente $\Leftrightarrow$ es de Cauchy. Esta propiedad de $\mathbb{R}^n$ no es cierta para cualquier espacio métrico $\mathbb{X}$.

Definición

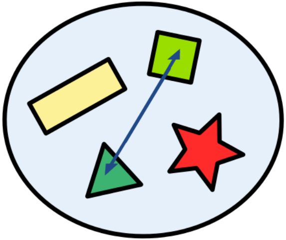
Un **espacio métrico** *$\mathbb{X}$ se denomina* **completo** *si y sólo si toda sucesión de Cauchy de elementos de $\mathbb{X}$ converge.*

Definición

Un espacio normado completo (en la métrica inducida por la norma) se denomina **espacio de Banach**.

$\mathbb{R}^n$ es un espacio métrico completo y además de Banach.

Espacios normados de dimensión finita



¿En cualquier norma en $\mathbb{R}^n$, $\|x_n - x\| \to 0$?

Lema (Lema técnico)

Sean n vectores cualesquiera $x_1, \ldots, x_n$ linealmente independientes de un espacio normado $\mathbb{X}$. Entonces, existe un número real $c > 0$ tal que cuales quiera sean los escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$,

$$\|\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n\| \geq c(|\alpha_1| + \cdots + |\alpha_n|). \qquad (*)$$

Lema (Lema técnico)

Sean n vectores cualesquiera $x_1, \ldots, x_n$ linealmente independientes de un espacio normado $\mathbb{X}$. Entonces, existe un número real $c > 0$ tal que cuales quiera sean los escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$,

$$\|\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n\| \geq c(|\alpha_1| + \cdots + |\alpha_n|). \qquad (*)$$

Demostración: Sea $s = |\alpha_1| + \cdots + |\alpha_n|$. Si $s = 0$ el lema es trivial así que asumiremos $s > 0$. Dividiendo la igualdad (*) por s se sigue que la fórmula (*) es equivalente a probar que si $x_1, \ldots, x_n$ son linealmente independientes, entonces existe un número real $c > 0$ tal que cuales quiera sean los los escalares $\beta_1, \ldots, \beta_n$, con $\sum_{k=1}^n |\beta_k| = 1$

$$\|\beta_1 x_1 + \cdots + \beta_n x_n\| \geq c.$$

La prueba será por reducción al absurdo.

Prueba del Lema técnico

Entonces ha de existir (¿por qué?) una sucesión $(y_m)_m \subset \mathbb{X}$ tal que

$$y_m = \beta_1^{(m)} x_1 + \cdots + \beta_n^{(m)} x_n, \quad \sum_{k=1}^{n} |\beta_k^{(m)}| = 1, \text{ y } \|y_m\| \stackrel{m\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

De la condición $\sum_{k=1}^{n} |\beta_k^{(m)}| = 1$ se sigue que las n sucesiones numéricas $(\beta_k^{(m)})_m$, $k = 1, \ldots, n$, son acotadas.

Entonces ha de existir (¿por qué?) una sucesión $(y_m)_m \subset \mathbb{X}$ tal que

$$y_m = \beta_1^{(m)} x_1 + \cdots + \beta_n^{(m)} x_n, \quad \sum_{k=1}^{n} |\beta_k^{(m)}| = 1, \text{ y } \|y_m\| \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

De la condición $\sum_{k=1}^{n} |\beta_k^{(m)}| = 1$ se sigue que las n sucesiones numéricas $(\beta_k^{(m)})_m$, $k = 1, \ldots, n$, son acotadas.

Sea la sucesión $(\beta_1^{(m)})_m$ acotada, entonces por el T de B-W de ella se puede extraer una subsucesión convergente

Entonces ha de existir (¿por qué?) una sucesión $(y_m)_m \subset \mathbb{X}$ tal que

$$y_m = \beta_1^{(m)} x_1 + \cdots + \beta_n^{(m)} x_n, \quad \sum_{k=1}^{n} |\beta_k^{(m)}| = 1, \text{ y } \|y_m\| \stackrel{m\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

De la condición $\sum_{k=1}^{n} |\beta_k^{(m)}| = 1$ se sigue que las n sucesiones numéricas $(\beta_k^{(m)})_m$, $k = 1, \ldots, n$, son acotadas.

Sea la sucesión $(\beta_1^{(m)})_m$ acotada, entonces por el T de B-W de ella se puede extraer una subsucesión convergente $\beta_1^{(m_j)} \stackrel{j\to\infty}{\longrightarrow} \beta_1$.

Escojamos de cada una de las sucesiones restantes $(\beta_k^{(m)})_m$, $k = 2, \ldots, n$, las subsucesiones definidas por los índices m_j.

Entonces ha de existir (¿por qué?) una sucesión $(y_m)_m \subset \mathbb{X}$ tal que

$$y_m = \beta_1^{(m)} x_1 + \cdots + \beta_n^{(m)} x_n, \quad \sum_{k=1}^{n} |\beta_k^{(m)}| = 1, \text{ y } \|y_m\| \stackrel{m\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

De la condición $\sum_{k=1}^{n} |\beta_k^{(m)}| = 1$ se sigue que las n sucesiones numéricas $(\beta_k^{(m)})_m$, $k = 1, \ldots, n$, son acotadas.

Sea la sucesión $(\beta_1^{(m)})_m$ acotada, entonces por el T de B-W de ella se puede extraer una subsucesión convergente $\beta_1^{(m_j)} \stackrel{j\to\infty}{\longrightarrow} \beta_1$.

Escojamos de cada una de las sucesiones restantes $(\beta_k^{(m)})_m$, $k = 2, \ldots, n$, las subsucesiones definidas por los índices m_j.

Entonces $(\beta_2^{(m_j)})_j$ es acotada y por B-W y podemos extraer una subsucesión convergente $\beta_2^{(j_l)} \stackrel{l\to\infty}{\longrightarrow} \beta_2$. Además, si escogemos los índices j_l definidos, la subsucesión $(\beta_1^{(j_l)})_j \stackrel{l\to\infty}{\longrightarrow} \beta_1$ (¿por qué?).

Prueba del Lema técnico

$$\beta_1^{(m)} \quad \beta_2^{(m)} \quad \beta_3^{(m)} \quad \cdots \quad \beta_n^{(m)},$$

Prueba del Lema técnico

$\beta_1^{(m)} \quad \beta_2^{(m)} \quad \beta_3^{(m)} \quad \cdots \quad \beta_n^{(m)}, \qquad \beta_1^{(m)}$ acotada $\Rightarrow \exists (m_j)_j$

$$\beta_1^{(m)} \quad \beta_2^{(m)} \quad \beta_3^{(m)} \quad \cdots \quad \beta_n^{(m)}, \qquad \beta_1^{(m)} \text{ acotada} \Rightarrow \exists (m_j)_j$$

$$\beta_1^{(m_j)} \quad \beta_2^{(m_j)} \quad \beta_3^{(m_j)} \quad \cdots \quad \beta_n^{(m_j)}, \qquad \beta_1^{(m_j)} \stackrel{j\to\infty}{\longrightarrow} \beta_1,$$

Prueba del Lema técnico

$$\beta_1^{(m)} \quad \beta_2^{(m)} \quad \beta_3^{(m)} \quad \cdots \quad \beta_n^{(m)}, \qquad \beta_1^{(m)} \text{ acotada} \Rightarrow \exists (m_j)_j$$

$$\beta_1^{(m_j)} \quad \beta_2^{(m_j)} \quad \beta_3^{(m_j)} \quad \cdots \quad \beta_n^{(m_j)}, \qquad \beta_1^{(m_j)} \overset{j\to\infty}{\longrightarrow} \beta_1, \qquad \beta_{2,3\ldots}^{(m_j)} \overset{j\to\infty}{\not\to} \beta_k$$

$$\beta_1^{(m)} \quad \beta_2^{(m)} \quad \beta_3^{(m)} \quad \cdots \quad \beta_n^{(m)}, \qquad \beta_1^{(m)} \text{ acotada} \Rightarrow \exists (m_j)_j$$

$$\beta_1^{(m_j)} \quad \beta_2^{(m_j)} \quad \beta_3^{(m_j)} \quad \cdots \quad \beta_n^{(m_j)}, \qquad \beta_1^{(m_j)} \xrightarrow{j\to\infty} \beta_1, \qquad \beta_{2,3\ldots}^{(m_j)} \overset{j\to\infty}{\not\to} \beta_k$$

$$\beta_2^{(m_j)} \text{ acotada} \Rightarrow (m_{j_l})_l := (j_l)_l$$

$$\beta_1^{(j_l)} \quad \beta_2^{(j_l)} \quad \beta_3^{(j_l)} \quad \cdots \quad \beta_n^{(j_l)}, \qquad \beta_2^{(j_l)} \xrightarrow{l\to\infty} \beta_2,$$

$$\beta_1^{(m)} \quad \beta_2^{(m)} \quad \beta_3^{(m)} \quad \cdots \quad \beta_n^{(m)}, \qquad \beta_1^{(m)} \text{ acotada} \Rightarrow \exists (m_j)_j$$

$$\beta_1^{(m_j)} \quad \beta_2^{(m_j)} \quad \beta_3^{(m_j)} \quad \cdots \quad \beta_n^{(m_j)}, \qquad \beta_1^{(m_j)} \xrightarrow{j\to\infty} \beta_1, \quad \beta_{2,3\ldots}^{(m_j)} \overset{j\to\infty}{\not\to} \beta_k$$

$$\beta_2^{(m_j)} \text{ acotada} \Rightarrow (m_{j_l})_l := (j_l)_l$$

$$\beta_1^{(j_l)} \quad \beta_2^{(j_l)} \quad \beta_3^{(j_l)} \quad \cdots \quad \beta_n^{(j_l)}, \qquad \beta_2^{(j_l)} \xrightarrow{l\to\infty} \beta_2, \quad \beta_1^{(j_l)} \xrightarrow{l\to\infty} \beta_1$$

$$\vdots \qquad\qquad \text{y así sucesivamente}$$

$$\beta_1^{(m)} \quad \beta_2^{(m)} \quad \beta_3^{(m)} \quad \cdots \quad \beta_n^{(m)}, \qquad \beta_1^{(m)} \text{ acotada} \Rightarrow \exists (m_j)_j$$

$$\beta_1^{(m_j)} \quad \beta_2^{(m_j)} \quad \beta_3^{(m_j)} \quad \cdots \quad \beta_n^{(m_j)}, \qquad \beta_1^{(m_j)} \xrightarrow{j\to\infty} \beta_1, \quad \beta_{2,3\ldots}^{(m_j)} \overset{j\to\infty}{\not\to} \beta_k$$

$$\beta_2^{(m_j)} \text{ acotada} \Rightarrow (m_{j_l})_l := (j_l)_l$$

$$\beta_1^{(j_l)} \quad \beta_2^{(j_l)} \quad \beta_3^{(j_l)} \quad \cdots \quad \beta_n^{(j_l)}, \qquad \beta_2^{(j_l)} \xrightarrow{l\to\infty} \beta_2, \quad \beta_1^{(j_l)} \xrightarrow{l\to\infty} \beta_1$$

$$\vdots$$

y así sucesivamente

$$\beta_1^{(l_i)} \quad \beta_2^{(l_i)} \quad \beta_3^{(l_i)} \quad \cdots \quad \beta_n^{(l_i)},$$

existe $(l_i)_i$ subsuceción

$$\beta_1^{(m)} \quad \beta_2^{(m)} \quad \beta_3^{(m)} \quad \cdots \quad \beta_n^{(m)}, \qquad \beta_1^{(m)} \text{ acotada} \Rightarrow \exists (m_j)_j$$

$$\beta_1^{(m_j)} \quad \beta_2^{(m_j)} \quad \beta_3^{(m_j)} \quad \cdots \quad \beta_n^{(m_j)}, \qquad \beta_1^{(m_j)} \xrightarrow{j\to\infty} \beta_1, \qquad \beta_{2,3\dots}^{(m_j)} \overset{j\to\infty}{\not\to} \beta_k$$

$$\beta_2^{(m_j)} \text{ acotada} \Rightarrow (m_{j_l})_l := (j_l)_l$$

$$\beta_1^{(j_l)} \quad \beta_2^{(j_l)} \quad \beta_3^{(j_l)} \quad \cdots \quad \beta_n^{(j_l)}, \qquad \beta_2^{(j_l)} \xrightarrow{l\to\infty} \beta_2, \qquad \beta_1^{(j_l)} \xrightarrow{l\to\infty} \beta_1$$

$$\vdots$$

y así sucesivamente

$$\beta_1^{(l_i)} \quad \beta_2^{(l_i)} \quad \beta_3^{(l_i)} \quad \cdots \quad \beta_n^{(l_i)},$$

existe $(l_i)_i$ subsuceción

$$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \dots \quad \downarrow$$

tal que $i \to \infty$

$$\beta_1 \quad \beta_2 \quad \beta_3 \quad \cdots \quad \beta_n,$$

Dicha sucesión de índices define una subsucesión $(y_{l_i})_i$ de $(y_m)_m$ t.q.

$$y_{l_i} = \beta_1^{(l_i)} x_1 + \cdots + \beta_n^{(l_i)} x_n \xrightarrow{i\to\infty} \beta_1 x_1 + \cdots + \beta_n x_n := y.$$

Así, tenemos una sucesión de índices $(l_i)_i$ t.q. $\beta_k^{(l_i)} \stackrel{i\to\infty}{\longrightarrow} \beta_k, \forall k = 1, 2, \ldots, n$. Además, dicha sucesión de índices define una subsucesión $(y_{l_i})_i$ de $(y_m)_m$ t.q.

$$y_{l_i} = \sum_{k=1}^{n} \beta_k^{(l_i)} x_k, \quad \text{donde} \quad \beta_k^{(l_i)} \stackrel{i\to\infty}{\longrightarrow} \beta_k \quad \Rrightarrow$$

$$\sum_{k=1}^{n} |\beta_k^{(l_i)}| = 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} |\beta_k| = 1, \quad \text{y} \quad \lim_{i\to\infty} y_{l_i} = \sum_{k=1}^{n} \beta_k x_k := y$$

Así, tenemos una sucesión de índices $(l_i)_i$ t.q. $\beta_k^{(l_i)} \stackrel{i\to\infty}{\longrightarrow} \beta_k, \forall k = 1, 2, \ldots, n$. Además, dicha sucesión de índices define una subsucesión $(y_{l_i})_i$ de $(y_m)_m$ t.q.

$$y_{l_i} = \sum_{k=1}^{n} \beta_k^{(l_i)} x_k, \quad \text{donde} \quad \beta_k^{(l_i)} \stackrel{i\to\infty}{\longrightarrow} \beta_k \quad \Rightarrow$$

$$\sum_{k=1}^{n} |\beta_k^{(l_i)}| = 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} |\beta_k| = 1, \quad \text{y} \quad \lim_{i\to\infty} y_{l_i} = \sum_{k=1}^{n} \beta_k x_k := y$$

Luego, no todos los $\beta_k = 0$ al mismo tiempo (¿por qué?).

Prueba del Lema técnico

Así, tenemos una sucesión de índices $(l_i)_i$ t.q. $\beta_k^{(l_i)} \overset{i\to\infty}{\longrightarrow} \beta_k, \forall k = 1, 2, \ldots, n$. Además, dicha sucesión de índices define una subsucesión $(y_{l_i})_i$ de $(y_m)_m$ t.q.

$$y_{l_i} = \sum_{k=1}^{n} \beta_k^{(l_i)} x_k, \quad \text{donde} \quad \beta_k^{(l_i)} \overset{i\to\infty}{\longrightarrow} \beta_k \quad \Rrightarrow$$

$$\sum_{k=1}^{n} |\beta_k^{(l_i)}| = 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} |\beta_k| = 1, \qquad \text{y} \qquad \lim_{i\to\infty} y_{l_i} = \sum_{k=1}^{n} \beta_k x_k := y$$

Luego, no todos los $\beta_k = 0$ al mismo tiempo (¿por qué?). Como los vectores $x_1, \ldots, x_n$ son **li** $\Rrightarrow y \neq 0$ (¿por qué?).

Así, tenemos una sucesión de índices $(l_i)_i$ t.q. $\beta_k^{(l_i)} \stackrel{i\to\infty}{\longrightarrow} \beta_k, \forall k = 1, 2, \ldots, n$. Además, dicha sucesión de índices define una subsucesión $(y_{l_i})_i$ de $(y_m)_m$ t.q.

$$y_{l_i} = \sum_{k=1}^{n} \beta_k^{(l_i)} x_k, \quad \text{donde} \quad \beta_k^{(l_i)} \stackrel{i\to\infty}{\longrightarrow} \beta_k \quad \Rightarrow$$

$$\sum_{k=1}^{n} |\beta_k^{(l_i)}| = 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} |\beta_k| = 1, \quad \text{y} \quad \lim_{i\to\infty} y_{l_i} = \sum_{k=1}^{n} \beta_k x_k := y$$

Luego, no todos los $\beta_k = 0$ al mismo tiempo (¿por qué?). Como los vectores $x_1, \ldots, x_n$ son **li** $\Rightarrow y \neq 0$ (¿por qué?). Pero recordemos que la norma es una aplicación continua $\Rightarrow$

$$\lim_{i\to\infty} y_{l_i} = y \neq 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{i\to\infty} \|y_{l_i}\| = \|y\| \neq 0.$$

Por otro lado $\|y_m\| \stackrel{m\to\infty}{\longrightarrow} 0$, entonces $\lim_{i\to\infty} \|y_{l_i}\| = 0$, luego $\|y\| = 0$ de donde se sigue que $y = 0$ lo cual es una contradicción. ■

x_k l.i. & $\forall \alpha_k$, $\exists c > 0$ t.q. $\|\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n\| \geq c(|\alpha_1| + \cdots + |\alpha_n|)$

Como corolario tenemos el siguiente teorema de completitud:

Teorema

Todo subespacio M de dimensión finita de un espacio normado es completo. En particular, todo espacio normado de dimensión finita es completo.

$$x_k \text{ l.i. } \& \ \forall \alpha_k, \ \exists c > 0 \text{ t.q. } \|\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n\| \geq c(|\alpha_1| + \cdots + |\alpha_n|)$$

Como corolario tenemos el siguiente teorema de completitud:

Teorema

Todo subespacio M de dimensión finita de un espacio normado es completo. En particular, todo espacio normado de dimensión finita es completo.

Corolario: $\mathbb{R}^n$ es completo.

$$x_k \text{ l.i. } \& \ \forall \alpha_k,\ \exists c > 0 \text{ t.q. } \|\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n\| \geq c(|\alpha_1| + \cdots + |\alpha_n|)$$

Como corolario tenemos el siguiente teorema de completitud:

Teorema

Todo subespacio M de dimensión finita de un espacio normado es completo. En particular, todo espacio normado de dimensión finita es completo.

Corolario: $\mathbb{R}^n$ es completo.

Definición

Una norma $\|\cdot\|$ en un espacio vectorial $\mathbb{X}$ es **equivalente** *a otra norma $\|\cdot\|'$ en $\mathbb{X}$ si existen dos números $a > 0$, $b > 0$, tales que para todo $x \in \mathbb{X}$*

$$a\|x\|' \leq \|x\| \leq b\|x\|'.$$

$$x_k \text{ l.i. } \& \ \forall \alpha_k,\ \exists c > 0 \text{ t.q. } \|\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n\| \geq c(|\alpha_1| + \cdots + |\alpha_n|)$$

Como corolario tenemos el siguiente teorema de completitud:

Teorema

Todo subespacio M de dimensión finita de un espacio normado es completo. En particular, todo espacio normado de dimensión finita es completo.
Corolario: $\mathbb{R}^n$ es completo.

Definición

Una norma $\|\cdot\|$ en un espacio vectorial $\mathbb{X}$ es **equivalente** *a otra norma $\|\cdot\|'$ en $\mathbb{X}$ si existen dos números $a > 0$, $b > 0$, tales que para todo $x \in \mathbb{X}$*

$$a\|x\|' \leq \|x\| \leq b\|x\|'.$$

Consecuencia:

Si dos normas son equivalentes entonces toda sucesión de Cauchy en el espacio $(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$ también lo es en $(\mathbb{X}, \|\cdot\|')$, y viceversa.

x_k l.i. & $\forall \alpha_k$, $\exists c > 0$ t.q. $\|\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n\| \geq c(|\alpha_1| + \cdots + |\alpha_n|)$

Otro consecuencia del Lema técnico:

Teorema (Equivalencia de las normas en $\mathbb{R}^n$)

Sea $\mathbb{X}$ un espacio vectorial de dimensión finita. Entonces cualquier norma $\|\cdot\|$ en $\mathbb{X}$ es equivalente a cualquier otra norma en $\mathbb{X}$.

Es decir, en $\mathbb{R}^n$ todas las normas son equivalentes

x_k l.i. & $\forall \alpha_k$, $\exists c > 0$ t.q. $\|\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n\| \geq c(|\alpha_1| + \cdots + |\alpha_n|)$

Otro consecuencia del Lema técnico:

Teorema (Equivalencia de las normas en $\mathbb{R}^n$)

Sea $\mathbb{X}$ un espacio vectorial de dimensión finita. Entonces cualquier norma $\|\cdot\|$ en $\mathbb{X}$ es equivalente a cualquier otra norma en $\mathbb{X}$.

Es decir, en $\mathbb{R}^n$ todas las normas son equivalentes

Sin pérdida de generalidad vamos a usar la norma $\|\cdot\|_2$ (norma euclídea)

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2} \quad \Rrightarrow \rho(x,y) = \|x - y\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|^2}.$$

Definición

Un espacio métrico $\mathbb{X}$ se denomina **compacto** *(secuencial) si cualquier sucesión $(x_n)_n$ de elementos de $\mathbb{X}$ tiene una subsucesión convergente.*

Un subconjunto $M \subset \mathbb{X}$ es compacto si M es compacto por si mismo, i.e., $\forall (x_n)_n$ de M tiene una subsucesión convergente en M.

Definición

Un espacio métrico $\mathbb{X}$ se denomina **compacto** *(secuencial) si cualquier sucesión $(x_n)_n$ de elementos de $\mathbb{X}$ tiene una subsucesión convergente.*

Un subconjunto $M \subset \mathbb{X}$ es compacto si M es compacto por si mismo, i.e., $\forall (x_n)_n$ de M tiene una subsucesión convergente en M.

Un poco de topología (desde en análisis)

- $x_0 \in \mathbb{X}$ es **punto interior** de $M \subset \mathbb{X}$ si $\exists \epsilon > 0$ tal que $B(x_0, \epsilon) \subset M$.

Definición

Un espacio métrico $\mathbb{X}$ *se denomina* **compacto** *(secuencial) si cualquier sucesión* $(x_n)_n$ *de elementos de* $\mathbb{X}$ *tiene una subsucesión convergente.*

Un subconjunto $M \subset \mathbb{X}$ *es compacto si* M *es compacto por si mismo, i.e.,* $\forall (x_n)_n$ *de* M *tiene una subsucesión convergente en* M*.*

Un poco de topología (desde en análisis)

- $x_0 \in \mathbb{X}$ es **punto interior** de $M \subset \mathbb{X}$ si $\exists \epsilon > 0$ tal que $B(x_0, \epsilon) \subset M$.
- $x_0 \in \mathbb{X}$ es un **punto de contacto** de M si $\forall \epsilon > 0$ en la bola $B(x, \epsilon)$, hay al menos un $x \in M$.

Definición

Un espacio métrico $\mathbb{X}$ *se denomina* **compacto** *(secuencial) si cualquier sucesión* $(x_n)_n$ *de elementos de* $\mathbb{X}$ *tiene una subsucesión convergente.*

Un subconjunto $M \subset \mathbb{X}$ *es compacto si* M *es compacto por si mismo, i.e.,* $\forall (x_n)_n$ *de* M *tiene una subsucesión convergente en* M*.*

Un poco de topología (desde en análisis)

- $x_0 \in \mathbb{X}$ es **punto interior** de $M \subset \mathbb{X}$ si $\exists \epsilon > 0$ tal que $B(x_0, \epsilon) \subset M$.
- $x_0 \in \mathbb{X}$ es un **punto de contacto** de M si $\forall \epsilon > 0$ en la bola $B(x, \epsilon)$, hay al menos un $x \in M$. $\Rightarrow$ Si $x \in M$ entonces es de contacto.

Definición

Un espacio métrico $\mathbb{X}$ se denomina **compacto** *(secuencial) si cualquier sucesión $(x_n)_n$ de elementos de $\mathbb{X}$ tiene una subsucesión convergente.*

Un subconjunto $M \subset \mathbb{X}$ es compacto si M es compacto por si mismo, i.e., $\forall (x_n)_n$ de M tiene una subsucesión convergente en M.

Un poco de topología (desde en análisis)

- $x_0 \in \mathbb{X}$ es **punto interior** de $M \subset \mathbb{X}$ si $\exists \epsilon > 0$ tal que $B(x_0, \epsilon) \subset M$.
- $x_0 \in \mathbb{X}$ es un **punto de contacto** de M si $\forall \epsilon > 0$ en la bola $B(x, \epsilon)$, hay al menos un $x \in M$. $\Rightarrow$ Si $x \in M$ entonces es de contacto.
- $x_0 \in \mathbb{X}$ es un **punto límite** de M si $\forall \epsilon > 0$ en la bola $B(x, \epsilon)$, hay al menos un $x \in M$, $x \neq x_0$

Definición

Un espacio métrico $\mathbb{X}$ se denomina **compacto** *(secuencial) si cualquier sucesión $(x_n)_n$ de elementos de $\mathbb{X}$ tiene una subsucesión convergente.*

Un subconjunto $M \subset \mathbb{X}$ es compacto si M es compacto por si mismo, i.e., $\forall (x_n)_n$ de M tiene una subsucesión convergente en M.

Un poco de topología (desde en análisis)

- $x_0 \in \mathbb{X}$ es **punto interior** de $M \subset \mathbb{X}$ si $\exists \epsilon > 0$ tal que $B(x_0, \epsilon) \subset M$.
- $x_0 \in \mathbb{X}$ es un **punto de contacto** de M si $\forall \epsilon > 0$ en la bola $B(x, \epsilon)$, hay al menos un $x \in M$. $\Rightarrow$ Si $x \in M$ entonces es de contacto.
- $x_0 \in \mathbb{X}$ es un **punto límite** de M si $\forall \epsilon > 0$ en la bola $B(x, \epsilon)$, hay al menos un $x \in M$, $x \neq x_0$ ($\Rightarrow$ infinitos $x \neq x_0$).

Definición

Un espacio métrico $\mathbb{X}$ se denomina **compacto** *(secuencial) si cualquier sucesión $(x_n)_n$ de elementos de $\mathbb{X}$ tiene una subsucesión convergente.*

Un subconjunto $M \subset \mathbb{X}$ es compacto si M es compacto por si mismo, i.e., $\forall (x_n)_n$ de M tiene una subsucesión convergente en M.

Un poco de topología (desde en análisis)

▶ $x_0 \in \mathbb{X}$ es **punto interior** de $M \subset \mathbb{X}$ si $\exists \epsilon > 0$ tal que $B(x_0, \epsilon) \subset M$.

▶ $x_0 \in \mathbb{X}$ es un **punto de contacto** de M si $\forall \epsilon > 0$ en la bola $B(x, \epsilon)$, hay al menos un $x \in M$. $\Rightarrow$ Si $x \in M$ entonces es de contacto.

▶ $x_0 \in \mathbb{X}$ es un **punto límite** de M si $\forall \epsilon > 0$ en la bola $B(x, \epsilon)$, hay al menos un $x \in M$, $x \neq x_0$ ($\Rightarrow$ infinitos $x \neq x_0$).

▶ $M \subset \mathbb{X}$ es abierto si todos sus puntos son interiores. M es cerrado si $\mathbb{X} \setminus M$ es abierto.

▶Dado M se denomina **clausura** de M al $\overline{M}$ formado por todos los puntos de contacto de $M \iff \overline{M} = M \cup \{\text{conjunto de sus puntos límites}\}$

▶Dado M se denomina **clausura** de M al $\overline{M}$ formado por todos los puntos de contacto de $M \iff \overline{M} = M \cup \{\text{conjunto de sus puntos límites}\}$

▶**Caracterización:** $x \in \overline{M}$ si y sólo si existe una sucesión $(x_n)_n$ de elementos de M tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

▶Dado M se denomina **clausura** de M al $\overline{M}$ formado por todos los puntos de contacto de $M \Longleftrightarrow \overline{M} = M \cup \{\text{conjunto de sus puntos límites}\}$

▶**Caracterización:** $x \in \overline{M}$ si y sólo si existe una sucesión $(x_n)_n$ de elementos de M tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

▶Un subconjunto $M \in \mathbb{X}$ es cerrado si y sólo si $M = \overline{M}$. Es decir, un conjunto cerrado es aquel que contiene a todos sus puntos límite.

▶Dado M se denomina **clausura** de M al $\overline{M}$ formado por todos los puntos de contacto de $M \Longleftrightarrow \overline{M} = M \cup \{\text{conjunto de sus puntos límites}\}$

▶**Caracterización:** $x \in \overline{M}$ si y sólo si existe una sucesión $(x_n)_n$ de elementos de M tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

▶Un subconjunto $M \in \mathbb{X}$ es cerrado si y sólo si $M = \overline{M}$. Es decir, un conjunto cerrado es aquel que contiene a todos sus puntos límite.

Lema

Si $M \subset \mathbb{X}$ es compacto, entonces M es cerrado y acotado.

▶Dado M se denomina **clausura** de M al $\overline{M}$ formado por todos los puntos de contacto de $M \Longleftrightarrow \overline{M} = M \cup \{$conjunto de sus puntos límites$\}$

▶**Caracterización:** $x \in \overline{M}$ si y sólo si existe una sucesión $(x_n)_n$ de elementos de M tal que $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.

▶Un subconjunto $M \in \mathbb{X}$ es cerrado si y sólo si $M = \overline{M}$. Es decir, un conjunto cerrado es aquel que contiene a todos sus puntos límite.

Lema

Si $M \subset \mathbb{X}$ es compacto, entonces M es cerrado y acotado.

El recíproco, en general, es falso. Pero para $\mathbb{R}^n$ se tiene

Teorema

En un espacio normado $\mathbb{X}$ de dimensión finita (y por tanto en $\mathbb{R}^n$), todo subconjunto es compacto si y sólo si es cerrado y acotado.

Para terminar esta introducción recordemos la definición de espacios euclídeos.

Definición

Se dice que un espacio vectorial $\mathbb{E}$ *sobre* $\mathbb{R}$ *es un* **espacio euclídeo** *si dados dos elementos cualesquiera* $x, y \in \mathbb{E}$ *existe un número denominado producto escalar, que denotaremos por* $\langle x, y \rangle$*, tal que*

1. *Para todo* $x, y \in \mathbb{E}$, $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$.
2. *Para todo* $x, y, z \in \mathbb{E}$, $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$.
3. *Para todo* $x, y \in \mathbb{E}$ *y* $\lambda \in \mathbb{C}$, $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$
4. *Para todo* $x \in \mathbb{E}$, $x \neq 0$, $\langle x, x \rangle > 0$ *y si* $\langle x, x \rangle = 0$, *entonces* $x = 0$.

El ejemplo más sencillo de espacio euclídeo es el espacio $\mathbb{R}^n$ con el producto escalar estándar: dados $x = (x_1, \ldots, x_n)$, e $y = (y_1, \ldots, y_n)$

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k .$$

El ejemplo más sencillo de espacio euclídeo es el espacio $\mathbb{R}^n$ con el producto escalar estándar: dados $x = (x_1, \ldots, x_n)$, e $y = (y_1, \ldots, y_n)$

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k.$$

Teorema (desigualdad de Cauchy-Schwarz)

Sea $\mathbb{E}$ un espacio euclídeo. Entonces para todos $f, g \in \mathbb{E}$,

$$|\langle f, g \rangle|^2 \leq \langle f, f \rangle \langle g, g \rangle.$$

$$\text{Para } \mathbb{R}^n \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{n} |x_k y_k| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2} \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |y_k|^2}.$$

Teorema

Todo espacio euclídeo $\mathbb{E}$ es normado si en él definimos la norma mediante la fórmula $\|f\| = \sqrt{\langle f, f\rangle}$. Además, $|\langle f, g\rangle| \leq \|f\| \cdot \|g\|$.

Teorema

Todo espacio euclídeo $\mathbb{E}$ es normado si en él definimos la norma mediante la fórmula $\|f\| = \sqrt{\langle f, f\rangle}$. Además, $|\langle f, g\rangle| \leq \|f\| \cdot \|g\|$.

Luego, todo espacio euclídeo $\mathbb{E}$ es un espacio métrico con la métrica inducida por el producto escalar mediante la fórmula

$$\rho(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\langle x - y, x - y\rangle}.$$

Así, en $\mathbb{R}^n$ el producto escalar escalar induce la norma

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2},$$

Teorema

Todo espacio euclídeo $\mathbb{E}$ es normado si en él definimos la norma mediante la fórmula $\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle}$. Además, $|\langle f, g \rangle| \leq \|f\| \cdot \|g\|$.

Luego, todo espacio euclídeo $\mathbb{E}$ es un espacio métrico con la métrica inducida por el producto escalar mediante la fórmula

$$\rho(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle}.$$

Así, en $\mathbb{R}^n$ el producto escalar escalar induce la norma

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2},$$

Un espacio euclídeo $\mathbb{E}$ completo se denomina **espacio de Hilbert**. $\mathbb{R}^n$ es un espacio de Hilbert.