

Teoremas que hay que saber demostrar

Teorema 1 (Equivalencia de las normas en \mathbb{R}^n) Sea \mathbb{X} un espacio vectorial de dimensión finita. Entonces cualquier norma $\|\cdot\|$ en \mathbb{X} es equivalente a cualquier otra norma en \mathbb{X} .

Teorema 2 (Acotación de las aplicaciones lineales) Toda aplicación lineal $T : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$ de un espacio normado de dimensión finita \mathbb{X} en otro espacio normado cualquiera \mathbb{Y} es acotada.

Teorema 3 (Regla de la cadena) Sean $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ y $g : B \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^k$, A, B abiertos tales que $f(A) \subset B$. Supongamos que f es diferenciable en a y g es diferenciable en $f(a)$. Entonces la función compuesta $g \circ f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ es diferenciable en a y $D(g \circ f)(a) = Dg(f(a)) \circ Df(a)$. Lo anterior se puede escribir en coordenadas de la siguiente forma:

$$D_j(g \circ f)_i(a) = \sum_{k=1}^m D_k g_i(f(a)) D_j f_k(a), \quad \frac{\partial(g \circ f)_i(a)}{\partial x_j} = \sum_{l=1}^m \frac{\partial g_i(f(a))}{\partial x_l} \frac{\partial f_l(a)}{\partial x_j}$$

donde $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, k$. Matricialmente lo anterior se escribe como: $D(g \circ f)(a) = Dg(f(a)) \cdot Df(a)$ o $J_{g \circ f}(a) = J_g(f(a)) \cdot J_f(a)$.

Teorema 4 (Condición suficiente de diferenciability I) Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, con A abierto y sea $a \in A$. Supongamos que existen las derivadas parciales de cada una de las componentes de f en a con respecto a cada una de las variables y son continuas en a , entonces f es diferenciable en a .

Teorema 5 (del valor medio) Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, diferenciable en A abierto y convexo. Sean $a, b \in A$ y sea s el segmento que los une ($s = \{(1-t)a + tb : t \in [0, 1]\}$). Entonces, para cada vector $v \in \mathbb{R}^m$ existe un punto z en el interior del segmento s tal que

$$\langle v, f(b) - f(a) \rangle = \langle v, Df(z)(b - a) \rangle,$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota el producto escalar en \mathbb{R}^m .

Teorema 6 (Schwarz) Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ con A abierto, y sea $x_0 \in A$. Si en A existen las derivadas parciales $\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}$, $\frac{\partial f(x)}{\partial x_j}$ y $\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_j \partial x_i}$ y la derivada $\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_j \partial x_i}$ es continua en x_0 , entonces en $x_0 \in A$ existe la derivada $\frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_i \partial x_j}$ y $\frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 f(x_0)}{\partial x_i \partial x_j}$.

Teorema 7 (Heffter-Young) Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, A abierto y sea $a \in A$. Supongamos que existen las derivadas parciales $\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}$, y $\frac{\partial f(x)}{\partial x_j}$ en un entorno de a y son diferenciables en a . Entonces $\frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_i \partial x_j}$.

Teorema 8 (de Taylor con resto de Lagrange) Supongamos que $f : A \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$, $f \in C^k(A)$. Sea $a \in A$ y asumamos que el intervalo $[a, a + h] \subset A$ para cierto $h \neq 0$. Entonces

$$f(a + h) = f(a) + \sum_{l=1}^{k-1} \frac{1}{l!} D^l f(a)(h) + r_k(a, h),$$

donde

$$r_k(a, h) = \frac{1}{k!} D^k f(a + \xi h)(h), \quad \xi \in (0, 1).$$

Teorema 9 (de la función implícita) Sea $F : A \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ definida en un entorno del punto $(x_0, y_0) \in A$, A abierto de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. Supongamos que:

1. $F(x, y) := F(x_1, x_2, \dots, x_n, y) \in C^{(p)}(A)$, $p \geq 1$,
2. $F(x_0, y_0) := F(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n}, y_0) = 0$,
3. $F'_y(x_0, y_0) = \frac{\partial F(x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n}, y_0)}{\partial y} \neq 0$.

Entonces existe un abierto $I = I_x \times I_y = (x_0 - h, x_0 + h) \times (y_0 - k, y_0 + k)$ ¹⁰ alrededor del punto (x_0, y_0) , $I \subset A$, y una función $f : I_x \subset \mathbb{R}^n \mapsto I_y \subset \mathbb{R}$ tal que:

1. $F(x, y) = 0$ en I si y sólo si $f(x) = y$,
2. $f(x) \in C^{(p)}(I_x)$.
3. Para todo $x \in I_x$, las derivadas parciales de $f(x)$ se calculan por la fórmula

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_i} := \frac{\partial f(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_i} = -[F'_y(x, f(x))]^{-1} \cdot [F'_{x_i}(x, f(x))], \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (4.8)$$

donde por F'_{x_i} denotamos la derivada parcial $\frac{\partial F}{\partial x_i}$.

Teorema 10 (Condición necesaria de extremo relativo) Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, A abierto, $a \in A$. Supongamos que f tiene en a un extremo relativo. Entonces, si existen las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x_k}$, $k = 1, \dots, n$ éstas son iguales a cero en a , i.e., $\frac{\partial f}{\partial x_k}(a) = 0$, $k = 1, \dots, n$. En particular si f es diferenciable en a , entonces $Df(a) = 0$.

Teorema 11 (Condición suficiente de extremo) Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dos veces diferenciable en $a \in A$, A abierto, y sea $x = a$ un punto crítico de f , i.e., $Df(a) = 0$. Entonces

1. Si la segunda diferencial $D^2 f(a)(x)$ es definida positiva en a , entonces f tiene un mínimo relativo en a .
2. Si la segunda diferencial $D^2 f(a)(x)$ es definida negativa, entonces f tiene un máximo relativo en a .
3. Si la segunda diferencial $D^2 f(a)(x)$ es indefinida, i.e., si existen $x, y \in \mathbb{R}^n$ tales que $D^2 f(a)(x) > 0 > D^2 f(a)(y)$, entonces f tiene un punto de silla en a .

¹⁰Análogamente al caso de los intervalos definidos justo antes del Teorema 2.8, definiremos el abierto $(x_0 - h, x_0 + h)$ como $(x_{01} - h_2, x_{01} + h_1) \times (x_{02} - h_2, x_{02} + h_2) \times \dots \times (x_{0n} - h_n, x_{0n} + h_n)$.