DIFERENCIACIÓN DE FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

Profesor: Renato Álvarez-Nodarse

1 Proyecto 1. Espacios métricos, normados e euclídeos.

1.1 Problema 1. Algunas propiedades de los espacios métricos

Definición 1.1. *Se dice que el conjunto $M \subset \mathbb{X}$ es abierto en $\mathbb{X}$ si todos sus puntos (elementos) se pueden encerrar en una bola abierta contenida completamente en M. Un conjunto $M \subset \mathbb{X}$ es cerrado en $\mathbb{X}$ si es su complementario en $\mathbb{X}$, $\mathbb{X}\backslash M$ es abierto.*

Definición 1.2. *Sea $M \subset \mathbb{X}$. Diremos que $x \in \mathbb{X}$ es un punto de contacto (o adherente) de M si en cualquier bola $B(x,\epsilon)$, $\epsilon > 0$ hay al menos un elemento de M. Así mismo, diremos que x es un punto de acumulación (o punto límite) de M si en cualquier bola $B(x,\epsilon)$, $\epsilon > 0$ hay al menos un elemento de M distinto de x, o equivalentemente, en cada bola $B(x,\epsilon)$, $\epsilon > 0$ hay infinitos elementos de M. Un punto x se denomina aislado de M si existe una bola $B(x,\epsilon)$, $\epsilon > 0$ que no contiene ningún elemento M excepto el propio x.*

Definición 1.3. *Dado un subconjunto $M \in \mathbb{X}$, se denomina clausura de M al conjunto $\overline{M}$ de los elementos de M y sus puntos de contacto.*

Prueba la siguiente:

Proposición 1.4. *Un subconjunto $M \in \mathbb{X}$ es cerrado si y sólo si $M = \overline{M}$.*

Prueba el siguiente:

Teorema 1.5. *Sea M un subespacio no vacío de un espacio métrico $\mathbb{X}$, y sea $\overline{M}$ su clausura. Entonces*

1. *$x \in \overline{M}$ si y sólo si existe una sucesión $(x_n)_n$ de elementos de M, i.e., $\forall n$, $x_n \in M$ tal que $\lim_{n\to\inf} x_n = x$.*
2. *M es cerrado si y sólo si $\lim_{n\to\inf} x_n = x$ implica que $x \in M$.*

Definición 1.6. *Un subconjunto $M \subset \mathbb{X}$ es denso en $\mathbb{X}$ si su clausura $\overline{M} = \mathbb{X}$.*

De la definición anterior se infiere que si M es denso en $\mathbb{X}$ entonces cualquiera sea la bola $B(x,\epsilon)$ (por pequeño que sea $\epsilon > 0$) siempre contiene puntos de M. En otras palabras, cualquiera sea $x \in \mathbb{X}$, siempre tiene elementos de M tan cerca como se quiera. Por ejemplo, $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$.

Definición 1.7. *Un espacio métrico $\mathbb{X}$ es separable si contiene un subespacio numerable*[1] *$M \subset \mathbb{X}$ denso en $\mathbb{X}$.*

Por ejemplo, $\mathbb{R}$ es separable pues $\mathbb{Q}$ es numerable y denso en $\mathbb{R}$.

Demuestra que $\mathbb{R}^n$, con la métrica

$$\rho(x,y) = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|^p\right)^{1/p}, \quad p \geq 1, \quad x, y \in \mathbb{R}^n.$$

es un espacio métrico separable.

Definición 1.8. *La sucesión de esferas (bolas cerradas) $(S_n(x_n,r_n))_{n\in\mathbb{N}}$, $S_n(x_n,r_n) \subset \mathbb{X}$, $S(x,r) = \{y \in \mathbb{X};\ \rho(x,y) \leq r\}$, tales que*

$$S_1(x_1,r_1) \supset S_2(x_2,r_2) \supset \cdots \supset S_n(x_n,r_n) \supset S_{n+1}(x_{n+1},r_{n+1}) \supset \cdots .$$

se denomina sucesión de esferas encajadas.

[1] Un conjunto M cualquiera se denomina *numerable* si se puede poner en correspondencia biunívoca con $\mathbb{N} = \{1,2,3,\dots\}$. Es decir, existe una correspondencia biunívoca entre los elementos de M y los números naturales. Por ejemplo, $\mathbb{Q}$ es numerable, pero $\mathbb{R}$ no lo es.

Prueba el siguiente:

Teorema 1.9 (De las esferas encajadas)**.** *Sea $\mathbb{X}$ un espacio métrico. $\mathbb{X}$ es completo si y sólo si, cualquier sucesión de esferas encajadas cuyos radios tiendan a cero ($r_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$) tiene intersección no vacía, i.e., $\bigcap_{n=1}^{\infty} S_n(x_n, r_n) \neq \emptyset$. Además, si $\mathbb{X}$ es completo (como el caso de $\mathbb{R}^n$), entonces dicha intersección $\bigcap_{n=1}^{\infty} S_n(x_n, r_n)$ contiene un único punto.*

Definición 1.10. *Sea $T : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{X}$ una aplicación. Si existe un $\alpha \in (0, 1)$ tal que*

$$\forall x, y \in \mathbb{X} \quad \Longrightarrow \quad \rho(Tx, Ty) \leq \alpha\rho(x, y),$$

diremos que T es una aplicación de contracción.

Definición 1.11. *Se dice que una aplicación $T : D(T) \subset \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$ es continua en $x_0 \in D(T)$ si para todo $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que $\forall x \in D(T)$ con $\rho(x, x_0) < \delta$ es tal que*[2] *$\sigma(Tx, Tx_0) < \epsilon$. Se dice que T es continua en todo $M \subset D(T)$ si T es continua en todo $x \in M$.*

La definición anterior es equivalente a decir que para toda sucesión $(x_n)_n$ con $x_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} x_0$, $Tx_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} Tx$.

Prueba la siguiente:

Proposición 1.12. *Toda aplicación de contracción es continua.*

Definición 1.13. *Sea $T : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{X}$ una aplicación. El punto $x \in \mathbb{X}$ se denomina punto fijo de T si $Tx = x$.*

Prueba el siguiente:

Teorema 1.14 (Del punto fijo)**.** *Sea $\mathbb{X}$ un espacio métrico completo y $T : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{X}$ una aplicación de contracción. Entonces T tiene un único punto fijo.*

1.2 Problema 2. Relación entre espacios euclídeos y normados.

Demuestra los siguientes dos teoremas:

Teorema 1.15 (desigualdad de Cauchy-Schwarz)**.** *Sea $\mathbb{E}$ un espacio euclídeo. Entonces para todos $f, g \in \mathbb{E}$,*

$$|\langle f, g\rangle|^2 \leq \langle f, f\rangle\langle g, g\rangle.$$

Teorema 1.16. *Todo espacio euclídeo $\mathbb{E}$ es normado si en él definimos la norma mediante la fórmula $\|f\| = \sqrt{\langle f, f\rangle}$. Además, $|\langle f, g\rangle| \leq \|f\| \cdot \|g\|$.*

Sea $\mathbb{X}$ un espacio vectorial sobre el campo $\mathbb{K}$ (real o complejo) y sea $\mathbb{E}$ un espacio euclídeo asociado a $\mathbb{X}$ y $\mathbb{K}$. Denotemos por $\|\cdot\|$ la norma inducida por el producto escalar, o sea, $\|x\|^2 = \langle x, x\rangle$.

Prueba que para todos $x, y \in \mathbb{E}$,

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Esta igualdad se suele denominar *ley del paralelogramo*.

Si bien todo espacio euclídeo es normado, lo contrario no siempre es cierto (encuentra un contraejemplo). No obstante se tiene el siguiente teorema:

Teorema 1.17. *Un espacio normado $\mathbb{X}$ es euclídeo si y sólo si para todos $x, y \in \mathbb{E}$,*

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Es decir, la ley del paralelogramo caracteriza los espacios euclídeos. Prueba lo anterior en el caso cuando $\mathbb{K}$ es real.

[2] Aquí ρ denota la métrica de $\mathbb{X}$ y σ la de $\mathbb{Y}$.

2 Proyecto 2. Funciones diferenciables

2.1 Problema 1. Condición suficiente de diferenciabilidad.

En clase se ha probado que si $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, A abierto es tal que existen todas sus derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $i = 1, \ldots, n$ en un entorno de a y son continuas en a, entonces f es derivable en a. Probar la siguiente generalización del teorema anterior:

Teorema (Condición suficiente de diferenciabilidad): Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, A abierto, $a \in S$. Si existe la derivada parcial de f en a con respecto a una de las variables y las restantes $n - 1$ derivadas parciales existen en un entorno de a y son continuas en a, entonces f es derivable en a. Para funciones con valores en $\mathbb{R}^m$, el teorema se aplica si las hipótesis se suponen sobre las componentes.

¿Es posible generalizarlo aún más?

2.2 Problema 2: Prueba la versión general del teorema de la función implícita.

Sea $F : A \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{R}^m$ definida en un entorno del punto $(x_0, y_0) \in A$, A abierto de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. Supongamos que:

1. $F(x, y) \in C^{(p)}(A)$, $p \geq 1$,
2. $F(x_0, y_0) = 0$,
3. $\det F'_y(x_0, y_0) \neq 0$ o sea,$F'_y(x, y)$ es una matriz invertible.

Entonces existe un intervalo $I = I_x \times I_y = (x_0 - h, x_0 + h) \times (y_0 - k, y_0 + k)$ alrededor del punto (x_0, y_0), $I \subset A$, y una función $f : I_x \subset \mathbb{R}^n \mapsto I_y \subset \mathbb{R}^m$ tal que:

1. $F(x, y) = 0$ en I si y sólo si $f(x) = y$,
2. $f(x) \in C^{(p)}(I_x)$.
3. Para todo $x \in I_x$, las derivadas parciales de $f(x)$ se calculan por la fórmula

$$f'(x) = -[F'_y(x, f(x))]^{-1} \cdot [F'_x(x, f(x))], \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Se entiende que $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{n+m}$, i.e., $(x, y) = (x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1 \cdots, y_m)$.

3 Proyecto 3. Dependencia e independencia funcional.

Definición 3.1. *Sean las funciones $\phi_k : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$, $k = 1, 2, \dots, m$, $m \le n$ diferenciables en cierto abierto $A \subset \mathbb{R}^n$ y sea $u_k = \phi_k(x_1, \dots, x_n)$ Diremos que una de las funciones anteriores u_k (para cierto $k = 1, 2, \dots, m$) depende funcionalmente de las demás en A si para todos los $x \in A$ existe una función $\Phi : \mathbb{R}^{m-1} \mapsto \mathbb{R}$, diferenciable en el correspondiente dominio[3] $B \subset \mathbb{R}^{m-1}$, tal que $u_k = \Phi(u_1, \dots, u_{k-1}, u_{k+1}, \dots, u_m)$.*

Definición 3.2. *Dado el sistema de funciones diferenciables*

$$(1) \qquad \begin{cases} u_1 = \phi_1(x_1, \dots, x_n), \\ u_2 = \phi_2(x_1, \dots, x_n), \\ \qquad \vdots \\ u_m = \phi_m(x_1, \dots, x_n), \end{cases} \qquad m \le n,$$

diremos que es funcionalmente dependiente en el abierto $A \subset \mathbb{R}^n$ si al menos una de las funciones u_k depende funcionalmente de las demás, en caso contrario diremos que el sistema es funcionalmente independiente.

Ejemplo 1: El sistema

$$\begin{cases} u_1 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2, \\ u_2 = x_1 + x_2 + x_3, \\ u_3 = 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3, \end{cases}$$

es funcionalmente dependiente pues $u_1 = \Phi(u_2, u_3) = u_2^2 - u_3$.

Ejemplo 2: El sistema lineal

$$(2) \qquad \begin{cases} u_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \dots, a_{1n}x_n, \\ u_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2, \dots, a_{2n}x_n, \\ \qquad \vdots \\ u_m = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2, \dots, a_{mn}x_n, \end{cases} \qquad m \le n,$$

es funcionalmente independiente si el rango de la matriz del sistema es igual a m y dependiente si es menor que m. En efecto, si el rango de la matriz del sistema es m entonces existe al menos un menor de orden m con determinante distinto de cero y por tanto el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} 0 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2, \dots, a_{1n}x_n, \\ 0 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2, \dots, a_{2n}x_n, \\ \qquad \vdots \\ 0 = a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2, \dots, a_{mn}x_n, \end{cases} \qquad m \le n,$$

tiene como solución única $x_1 = \cdots = x_n = 0$, por tanto las ecuaciones son linealmente independientes y no se puede expresar ninguna de ellas en función de las demás. En el caso cuando el rango es menor que m el sistema tiene soluciones no triviales y por tanto una de las ecuaciones se puede escribir como combinación de las demás, i.e., el sistema es un sistema linealmente (y por tanto funcionalmente) dependiente.

3.1 Problema 1.

Probar el siguiente teorema

Teorema 3.3. *Supongamos que tenemos m funciones de n variables $m \le n$, $\phi_k : A \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$, $k = 1, 2, \dots, m$, definidas en (1) que son diferenciables en cierto abierto $A \subset \mathbb{R}^n$ y sea $a \in A$. Entonces, si el jacobiano (o sea el determinante de la correspondiente matriz jacobiana) formado por las funciones $u_1, \dots, u_m$ respecto a alguna combinación de m variables (digamos $x_{n_1}, \dots, x_{n_m}$) es distinto de cero en a, las funciones $u_1, \dots, u_m$ son funcionalmente independientes en todo un entorno $U(a)$ de a.*

[3] B es un abierto contenido en el conjunto definido por los vectores $(\phi_1(A), \dots, \phi_{k-1}(A), \phi_{k+1}(A), \dots, \phi_m(A))$.

Ejemplo 3: Sea el sistema de funciones $u = x+y$ y $v = x-y$. Como $\det \begin{pmatrix} D_x u & D_y u \\ D_x v & D_y v \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -2 \neq 0$, estas funciones son funcionalmente independientes.

Como corolario inmediato del teorema anterior la siguiente condición necesaria de dependencia funcional:

Corolario 3.4. *Si el sistema de m funciones diferenciables de n variables $m \leq n$ en un entorno $U(a) \subset A$, A abierto, de cierto punto $a \in A$ $\phi_k : A \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$, $k = 1, 2, \ldots, m$, definido en* (1) *es un sistema funcionalmente dependiente, entonces su jacobiano* (**??**) *respecto a cualquier combinación de $m \leq n$ variables es nulo.*

La condición anterior se puede parafrasear diciendo que si el sistema (1) es funcionalmente dependiente entonces el rango de la correspondiente matriz jacobiana del sistema es menor que m.

Ejemplo 4: Si tomamos las funciones del ejemplo 1, estas son dependientes. Un cálculo directo nos da:

$$\det \begin{pmatrix} D_1 u_1(a) & D_2 u_1(a) & D_3 u_1(a) \\ D_1 u_2(a) & D_2 u_2(a) & D_3 u_2(a) \\ D_1 u_3(a) & D_2 u_3(a) & D_3 u_3(a) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 2x_1 & 2x_2 & 2x_3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2(x_2 + x_3) & 2(x_1 + x_3) & 2(x_1 + x_2) \end{pmatrix} = 0.$$

3.2 Problema 2.

Probar el siguiente teorema mucho más general:

Teorema 3.5 (del rango)**.** *Sea el sistema de funciones* (1)*. Asumiremos que las funciones están definidas y son diferenciables en el entorno de cierto $a \in A \subset \mathbb{R}^n$. Por sencillez asumiremos que todas las derivadas parciales $\frac{\partial u_k}{\partial x_l}$, $k = 1, \ldots, m$, $l = 1, 2, \ldots, n$ son continuas en a. Sea J la matriz jacobiana del sistema*

$$J = \begin{pmatrix} D_1 u_1(a) & D_2 u_1(a) & \ldots & D_n u_1(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_1 u_m(a) & D_2 u_m(a) & \ldots & D_n u_m(a) \end{pmatrix}.$$

Supongamos que en la matriz J anterior cierto menor de orden $r \leq m \leq n$ es distinto de cero en a[4] *y que cualquier menor de orden $r+1$ es nulo en el entorno de a. Entonces las r funciones correspondientes al menor distinto de cero son funcionalmente independientes en el entorno de a y cada una de las demás funciones depende, en dicho entorno, de las r funciones independientes.*

[4] De la continuidad de las derivadas parciales se deduce que dicho menor será distinto de cero en todo un entorno de a.

4 Proyecto 4. Cambio de variables con Maxima.

Existen distintas situaciones donde se tiene una expresión del tipo

$$\Phi(x, y, z, z_x, z_y, z_{xx}, z_{xy}, z_{yy}, \dots) = 0$$

siendo x e y variables independientes y z es una función $z : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, $z = z(x, y)$ y se quiere escribir la expresión de Φ en las nuevas variables u, v y $w = w(u, v)$ asumiendo que las variables nuevas y viejas se relacionan mediante el sistema

$$g_i(x, y, z, u, v, w) = 0, \qquad i = 1, 2, 3,$$

que denominaremos expresiones del cambio de variables, donde las funciones g_i, $i = 1, 2, 3$ se asumen diferenciables tantas veces como haga falta.

En clase hemos discutido el caso cuando las variables viejas se expresan en función de las nuevas

$$x = f_1(u, v, w), \quad y = f_2(u, v, w), \quad z = f_3(u, v, w),$$

y hemos desarrollado un pequeño programa de Maxima para realizar los cálculos.

4.1 Problema 1. Caso de tres variables con Maxima

1. Encuentra la expresión de las derivadas de orden uno y dos de una función $f(x, y, z)$ en en coordenadas cilíndricas, es decir, mediante el cambio: $x = r\cos(\phi)$, $y = r\sin(\phi)$, $z = w$, siendo la función $f(x, y, z) = F(r, \phi, z)$.

2. Encuentra una expresión para laplaciano $\Delta f(x, y, z)$ en coordenadas cilíndricas: $x = r\cos(\phi)$, $y = r\sin(\phi)$, $z = w$, $f(x, y, z) = F(r, \phi, z)$.

3. Encuentra la expresión de las derivadas de orden uno y dos de una función $f(x, y, z)$ en en coordenadas esféricas: $x = r\cos(\phi)\sin(\theta)$, $y = r\sin(\phi)\sin(\theta)$, $z = r\cos(\theta)$, siendo la función $w(x, y, z) = w(r, \theta, \phi)$.

4. Encuentra una expresión para laplaciano $\Delta f(x, y, z)$ en coordenadas esféricas: $x = r\cos(\phi)\sin(\theta)$, $y = r\sin(\phi)\sin(\theta)$, $z = r\cos(\theta)$, siendo la función $w(x, y, z) = w(r, \theta, \phi)$.

5. Encuentra una expresión para laplaciano $\Delta f(x, y, z)$ en coordenadas parabólicas: $x = u\,v\cos\theta$, $y = u\,v\sin(\theta)$, $z = \frac{1}{2}(u^2 - v^2)$, siendo la función $w(x, y, z) = w(u, v, \theta)$.

6. Encuentra una expresión para laplaciano $\Delta f(x, y, z)$ en coordenadas esféricas:

4.2 Problema 2. Caso cuando las variables nuevas se expresan en función de las viejas.

Desarrolla el caso cuando las variables nuevas se escriben en función de las viejas, es decir

$$u = f_1(x, y, z), \quad v = f_2(x, y, z), \quad w = f_3(x, y, z).$$

Haz un par de ejemplos representativos y escribe un programa en Maxima para realizar los cálculos.