1. Introducción a las funciones de varias variables[1]. Diferenciación en $\mathbb{R}^n$

1.1. Espacios métricos, normados y euclídeos

Problema 1.1 Prueba la desigualdad de Young: Dados dos números reales $a, b > 0$ y $p > 1$, entonces,

$$a^{\frac{1}{p}} b^{\frac{1}{q}} \leq \frac{1}{p} a + \frac{1}{q} b, \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \tag{1.1}$$

Además la igualdad sólo tiene lugar si $a = b$. **Ayuda**: Encuentra los extremos de la función $f : [0, \infty) \mapsto \mathbb{R}$, $f(x) = x^\alpha - \alpha x + \alpha - 1$, $\alpha \in (0, 1)$ y prueba que $f(x) \leq 0$ para todo $x \geq 0$. Escogiendo $x = a/b$, $a, b > 0$ y $\alpha = 1/p$, $p > 1$ se deduce el resultado.

Problema 1.2 Prueba la desigualdad de Hölder: Sean los números x_i e y_i, $i = 1, 2 \ldots, n$ no negativos. Entonces, para todo $p > 1$ y $q > 1$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, se tiene

$$\sum_{i=1}^n x_i\, y_i \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n y_i^q \right)^{\frac{1}{q}}, \tag{1.2}$$

donde la igualdad sólo tiene lugar si $x_i^p = c\, y_i^q$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n$ (es decir si x_i^p y y_i^q son proporcionales). **Ayuda**: Usa la desigualdad de Young.

Problema 1.3 Prueba la desigualdad de Minkowski: Seas los números x_i e y_i, $i = 1, 2 \ldots, n$ no negativos. Entonces, para todo $p > 1$ se tiene

$$\left(\sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{i=1}^n y_i^p \right)^{\frac{1}{p}}, \tag{1.3}$$

donde la igualdad sólo tiene lugar si $x_i = c\, y_i$ para todo $i = 1, 2, \ldots, n$ (es decir si x_i y y_i son proporcionales). **Ayuda**: Usa la desigualdad de Hölder.

Problema 1.4 Unsando lo anterior prueba que el espacio $\mathbb{X} = \mathbb{R}^n$, es decir el espacio de las n-tuplas $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ con la métrica

$$\rho(x, y) = \left(\sum_{k=1}^n |x_k - y_k|^p \right)^{1/p}, \qquad p \geq 1.$$

es un espacio métrico. Dicho espacio lo denotaremos por $\mathbb{R}^n_p$. Un ejemplo de especial relevancia es el caso $p = 2$ (métrica euclídea). Lo anterior indica que el espacio $\mathbb{R}^n$ con la métrica euclídea es un espacio métrico.

Problema 1.5 Prueba que si dos elementos x e y de un espacio euclídeo son ortogonales, entonces

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

La igualdad anterior es una generalización del teorema de Pitágoras.

Problema 1.6 Sea $\mathbb{E}$ un espacio euclídeo y $\|\cdot\|$ la norma inducida por el producto escalar. Prueba que para todos $x, y \in \mathbb{E}$,

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Esta igualdad se suele denominar *ley del paralelogramo*. De hecho se tiene que un espacio normado $\mathbb{X}$ es euclídeo si y sólo si para todos $x, y \in \mathbb{E}$,

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Es decir, la ley del paralelogramo caracteriza los espacios euclídeos.

[1] Versión corregida el 7 de septiembre de 2022

1.2. Límites, continuidad y diferenciablidad en $\mathbb{R}^n$

Problema 1.7

Estudiar la existencia de $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ en los siguientes casos:

$$a)\ f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy-x+y}{x+y}, & \text{si } x+y\neq 0,\\ 0, & \text{en otro caso,}\end{cases}\qquad b)\ f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y}{x}\operatorname{sen}(x^2+y^2), & \text{si } x\neq 0,\\ 0, & \text{si } x=0\end{cases}$$

$$c)\ f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y)\neq(0,0);\\ 0, & \text{si } (x,y)=(0,0).\end{cases}\qquad d)\ f(x,y)=\begin{cases}\left(\dfrac{1}{x},\dfrac{1}{y}\right), & \text{si } xy\neq 0;\\ (0,0), & \text{si } xy=0.\end{cases}$$

Calcula los siguientes límites

$$e)\ \lim_{(x,y)\to(0,2)}(1+xy)^{\dfrac{2}{x^2+xy}},\qquad f)\ \lim_{(x,y)\to(\infty,\infty)}\frac{x+2y}{x^2+2xy+2y^2}.$$

Problema 1.8

Si $f:A\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ es $f(x,y)=\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$, siendo $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : |y|<x^2\}$, demostrar que existe $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ cuando $(x,y)\in A$. ¿Cuál es su valor? ¿Que ocurre si elegimos $A=\mathbb{R}^2$?

Problema 1.9

a) Prueba que existe el límite de la función $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\dfrac{y(x-\operatorname{arctang}(x))}{x^4+y^2}$. ¿Cuál es su valor?

b) Estudia los siguientes límites y calcúlalos en caso de que existan:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{(1-e^x)(y-\sin y)}{x^2+y^4}\quad \text{y}\quad \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x|y|}{|x|+|y|}.$$

Problema 1.10

Estudiar la continuidad de las siguientes funciones, (definidas como 0 donde no tenga sentido la expresión correspondiente):

$$a)\ f(x,y)=\frac{xy}{|x|+|y|},\qquad b)\ f(x,y)=\frac{x^2y^3}{x^4+y^6},\qquad c)\ f(x,y)=(x+y)\operatorname{sen}\frac{1}{x}\operatorname{sen}\frac{1}{y},$$

$$d)\ f(x,y)=\begin{cases}x, & \text{si } |x|\le|y|,\\ y, & \text{si } |x|>|y|.\end{cases}\qquad e)\ f(x,y)=\frac{x+\operatorname{sen}(x+y)}{x+y},\qquad f)\ f(x,y)=\frac{x^3y}{x^4+y^2},$$

$$g)\ f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\operatorname{sen}x-\operatorname{sen}y}{\tan x-\tan y}, & \text{si } \tan x\neq\tan y,\\ \cos^3 x, & \text{en otro caso,}\end{cases}\qquad (x,y)\in\left(\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\times\left(\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right).$$

Problema 1.11

Si $f(x,y)=(x^2+y^2)\operatorname{sen}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $f(0,0)=0$, probar que f es diferenciable en el origen, pero ni D_1f ni D_2f son continuas[2] en $(0,0)$.

[2] En los ejercicios propuestos se usa la notación D_1 y D_2 para las derivadas parciales respecto a la primera y segunda variable, respectivamente. En general $D_if(x_1,\dots,x_n)=\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1,\dots,x_n)$.

Problema 1.12

Consideremos la función $f(x,y)=\dfrac{x^2+y^2}{x+y}$, si $x+y\neq 0$, $f(x,-x)=0$. Demostrar que no es diferenciable en el origen. Prueba que la aplicación $u\to D_uf(0,0)$ no es lineal, de donde se deduce la no diferenciabilidad de f en $(0,0)$ (¿por qué?). ¿Es f continua en el origen?

Problema 1.13

Calcular formalmente las derivadas parciales de las funciones compuestas:

a) $f(x,y)=x^2+y^2$; $x=r\operatorname{sen} t$, $y=r\cos t$.
b) $f(x,y)=\exp xy$; $x=u+v$, $y=u-v$.
c) $f(x,y)=x^2-\log y$; $x=\log t$, $y=t^2$.
d) $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$, $x=a\cos t$, $y=b\sin t$, $z=ct$, con a,b,c constantes dadas.

Problema 1.14

Demostrar que la función $f(x,y)=\dfrac{2xy}{x^2+y^2}$ si $(x,y)\neq(0,0)$ y $f(0,0)=0$, tiene derivadas parciales en el origen, a pesar de ser discontinua en ese punto.

Problema 1.15

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$ diferenciable tal que $\|f(t)\|=1$, $\forall t\in\mathbb{R}$. Demostrar que entonces $\langle f'(t),f(t)\rangle=0$, $\forall t\in\mathbb{R}$ $f'(t)=\frac{\partial f(t)}{\partial t}$. ¿Es cierto para $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$?

Problema 1.16

Sea $f(x,y)=\dfrac{x^5}{(y-x^2)^2+x^8}$ si $(x,y)\neq(0,0)$, $f(0,0)=0$. Calcula las derivadas direccionales de f en $(0,0)$. La aplicación $u\to D_uf(0,0)$, ¿es lineal? ¿Es f continua en $(0,0)$?

Problema 1.17

Dada la función

$$f(x,y)=\begin{cases} x+y+\dfrac{x^3y}{x^4+y^2}, & \text{si } (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & \text{si } (x,y)=(0,0),\end{cases}$$

estudia su continuidad y diferenciabilidad en el origen. La aplicación $u\to D_uf(0,0)$ ¿es lineal?

Problema 1.18

Dada la función $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{|xy|^a}{x^2-xy+y^2}, & \text{si } (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & \text{si } (x,y)=(0,0),\end{cases}$ donde $a>0$, estudia su continuidad y diferenciabilidad.

Problema 1.19

Sea $f(x,y)=(x+y)\sqrt{x^2+y^2}\operatorname{sen}\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ si $(x,y)\neq(0,0)$, $f(0,0)=0$. Estudia la continuidad, existencia de derivadas parciales y diferenciabilidad de f en $\mathbb{R}^2$.

Problema 1.20

Estudia la continuidad y diferenciabilidad de la función $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4 - y^4}{x^2 + xy + y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

Problema 1.21

Sea $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = (x^2 + y^2)^x$.

a) ¿Se puede definir f en $(0,0)$ para que sea continua?
b) ¿Es entonces f diferenciable en dicho punto?
c) ¿Existe $D_u f(0,0)$ para algún $u \in \mathbb{R}^2$?
d) Calcula las derivadas parciales de f.

Problema 1.22

Hallar las ecuaciones del plano tangente a las siguientes superficies:

a) $z = \dfrac{x^2}{2} - y^2$ en el punto $(2,1)$, b) $z = \dfrac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}$ en $(-1,1)$, c) $z = \arctan(x^2 + y^2)$ en $(0,1)$,

d) $z = (x^2 + y^2)\sin(x^2 + y^2)$ en $(\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi})$, e) $3xyz - z^3 = 1$ en el punto $(0,1)$.

Problema 1.23

Sea $f(x,y) = \dfrac{x|y|}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, si $(x,y) \neq (0,0)$, $f(0,0) = 0$. Demuestra que f es continua en $\mathbb{R}^2$, que existen $D_1 f$ y $D_2 f$ en el origen pero f no es diferenciable en $(0,0)$.

Problema 1.24

La función $f(x,y) = \begin{cases} xy \operatorname{sen} \dfrac{1}{y}, & \text{si } y \neq 0, \\ 0, & \text{si } y = 0, \end{cases}$ ¿es diferenciable en el origen?

Problema 1.25

a) Si $f(x,y) = \sqrt[3]{xy}$, halla las direcciones $u \in \mathbb{R}^2$ para las que existe $D_u f(0,0)$.

b) Si $f(x,y,z) = |x + y + z|$, ¿para qué direcciones $u \in \mathbb{R}^3$ existe $D_u f(1,-1,0)$?

Problema 1.26

Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciable en (a,b). Sean $u = (2,3)$ y $v = (1,1)$. Supongamos que $D_u f(a,b) = 1/\sqrt{13}$ y $D_v f(a,b) = \sqrt{2}$. Se pide:

a) Hallar el gradiente de f en (a,b).

b) Hallar los vectores $u \in \mathbb{R}^2$ para los que $D_u f(a,b) = 6$.

c) Calcular $\max\{D_u f(a,b) : \|u\|_2 = 1\}$.

Problema 1.27

Estudia la diferenciabilidad en el origen de la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x \operatorname{sen}(y) - y \operatorname{sen}(x)}{x^2 + y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Problema 1.28

Sea $f(x,y) = \dfrac{1-\cos xy}{y^2}$ si $y \neq 0$.

a) ¿Como definir f en $y=0$ para hacerla continua?
b) Calcula las derivadas parciales de f y prueba que $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$.

Problema 1.29

Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \dfrac{|x|^a}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$, $f(0,0) = 0$, donde $a \geq 0$. Estudia la continuidad y diferenciabilidad de f en $\mathbb{R}^2$. Hacer el mismo estudio para la función $f(x,y) = \dfrac{|x|^a y}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$.

Problema 1.30

Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = \dfrac{x^3y^3}{x^2+y^2}$, $f(0,0) = 0$.

a) Probar que $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$.

Problema 1.31

Para $a > 0$ se define la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ como

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|\operatorname{sen}(x)|^a \operatorname{arctang}(xy)}{x\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{si } x \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

(a) Demuestra que para todo $a > 0$, f es continua en $(0,0)$.
(b) Para $a = 1$, da explícitamente el valor de $D_u f(0,0)$, donde u es un vector de $\mathbb{R}^2$ con $\|u\| = 1$.
(c) Para $a = 1$ ¿es f diferenciable en $(0,0)$? Razona la respuesta.
(d) Demuestra que para $a > 1$ f es diferenciable en $(0,0)$.

Problema 1.32

Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Se dice que f es homogénea de grado m si $f(tx) = t^m f(x)$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $\forall x \in U$ tal que $tx \in U$. Probar que si f es diferenciable entonces verifica la ecuación de Euler, $mf(x) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i D_i f(x)$. Demostrar también el recíproco, es decir, si f satisface la ecuación de Euler en un abierto, entonces debe ser homogénea en él.

1.3. Derivadas de orden superior[3]

Problema 1.33

Dada la función

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 \arctan \dfrac{y}{x} - y^2 \arctan \dfrac{x}{y}, & \text{si } x \neq 0,\ y \neq 0, \\ 0, & \text{si } x = 0 \text{ ó } y = 0, \end{cases}$$

estudia la continuidad y diferenciabilidad de f. Calcula, caso de que existan, las derivadas parciales de segundo orden de f. Analiza el punto $(0,0)$ de forma independiente.

[3]En los ejercicios propuestos se usa la notación D_{ij} para las derivadas parciales de orden dos respecto a las variables x_j y la y variable x_i, respectivamente. Así, $D_{ij}f(x_1,\ldots,x_n) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_1,\ldots,x_n)$. Concretamente $D_{12}f = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ y $D_{21}f = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$

Problema 1.34

Sea $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definida por $f(x,y)=\dfrac{x^3y^3}{x^2+y^2}$, $f(0,0)=0$. ¿Es f dos veces diferenciable en el origen?

Problema 1.35

Se considera la función definida por

$$f(x,y)=\begin{cases} xy\operatorname{sen}\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x-y}{x+y}\right), & \text{si } x+y\neq 0;\\ 0, & \text{si } x+y=0\end{cases}$$

Estudia la continuidad y diferenciabilidad de esta función. Calcula $D_{12}f(0,0)$ y $D_{21}f(0,0)$.

Problema 1.36

Sea $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, definida por

$$f(x,y)=\begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

a) Probar que $f\in\mathcal{C}^1(R^2)$.
b) Calcular $D_{12}f(0,0)$ y $D_{21}f(0,0)$.
c) ¿Es la función f dos veces diferenciable en $\mathbb{R}^2$? Razone la respuesta.

Problema 1.37

Consideremos la función

$$f(x,y)=\begin{cases} y^2\operatorname{sen}\dfrac{x}{y}, & \text{si } y\neq 0,\\ 0, & \text{si } y=0\end{cases}$$

¿En qué puntos de $\mathbb{R}^2$ verifica las hipótesis del teorema de Heffter-Young sobre igualdad de derivadas cruzadas? En los puntos en que no se verifican, ¿se verifica la tesis del teorema?

Problema 1.38

Sea la función

$$f(x,y)=\begin{cases} x^2y\cos\dfrac{1}{x}, & \text{si } x\neq 0,\\ 0, & \text{si } x=0\end{cases}$$

Calcular en valor de las segundas derivadas cruzadas en $(0,0)$. ¿Se verificas las hipótesis del teorema de Heffter-Young? ¿Y las del teorema de Schwarz?

Problema 1.39

Consideramos la función

$$f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(xy)-xy}{x^2y}, & \text{si } x\neq 0, y\neq 0,\\ 0, & \text{en otro caso.}\end{cases}$$

(a) Estudia la continuidad de f en $\mathbb{R}^2$.
(b) Calcula las derivadas parciales de primer orden de f.
(c) ¿Es f diferenciable en el origen?
(d) Calcular $D_{12}f(0,0)$ y $D_{21}f(0,0)$.

Problema 1.40

Hallar todas las derivadas parciales hasta el orden 2 inclusive de las siguientes funciones

a) $f(x,y) = x^3y^2 + y^3 - 5xy$, b) $f(x,y) = \operatorname{sen}(xy)$, $f(x,y,z) = \exp(x^2 + y^2 + z^2)$.

b) Usando lo anterior escribe el polinomio de Taylor de orden 2 en el origen para cada una de las funciones anteriores.

Problema 1.41

Si $f(x,y) = x \operatorname{sen} y + y \operatorname{sen} x$, da un desarrollo de Taylor de orden 8 en el origen.

Utilizar la fórmula de Taylor para desarrollar las siguientes funciones (hasta orden dos) en los puntos indicados:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= x^3 + y^2 + xy^2 \quad \text{en} \quad (1,2), \\ g(x,y) &= \log(x+y) \quad \text{en} \quad (1,1), \\ h(x,y,z) &= e^{a(x+y+z)} \quad \text{en} \quad (0,0,0). \end{aligned}$$

Problema 1.42

Comprobar que cada una de las siguientes funciones verifica la ecuación indicada (se usa la notación $D_x z = \frac{\partial z}{\partial x}$, etc.):

$$a) \quad f(x,y) = e^{xy} + \operatorname{sen}(x+y) \quad \Rightarrow \quad xD_x f(x,y) - yD_y f(x,y) = (x-y)\cos(x+y),$$

$$b) \quad f(x,y) = xy + y\sqrt{x^2 - a^2} + b \quad \Rightarrow \quad D_x f(x,y) D_y f(x,y) = xD_x f(x,y) + yD_y f(x,y),$$

$$c) \quad f(x,y) = a\ln(x^2 + y^2) + b \quad \Rightarrow \quad \Delta f = D_{xx} f(x,y) + D_{yy} f(x,y) = 0.$$

1.4. Miscelánea

Problema 1.43

Sea la función $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{\frac{k\pi}{2}\}_{k\in\mathbb{Z}} \mapsto \mathbb{R}$, $f(x,y) = |y|^\alpha \tan x$, $\alpha > 0$.

1. Calcula $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.
2. ¿Para qué valores de α f es continua en $\mathbb{R}^2 \setminus \{\frac{k\pi}{2}\}_{k\in\mathbb{Z}}$?
3. Calcula sus derivadas parciales de f.
4. ¿Para que valores de α f es diferenciable en $(0,0)$? Justifica la respuesta y calcula la derivada total de f en $(0,0)$ si existe.
5. Calcula la derivada total de f en $(1,\pi)$.

Problema 1.44

Sea la función $g : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, $g(x,y,z) = x^2 + ye^{x\,z}$.

1. Decide si g es diferenciable en $\mathbb{R}^2$. Justifica la respuesta.
2. Calcula las derivadas parciales $\frac{\partial g}{\partial x}$, $\frac{\partial g}{\partial y}$ y $\frac{\partial g}{\partial z}$.
3. ¿Cuánto vale la derivada g en el punto $(1,2,0)$ según la dirección del vector $(3/4, \sqrt{3}/2, 1/2)$.
4. ¿En que dirección es máxima la variación de g en dicho punto $(1,2,0)$? ¿Y mínima?
5. Escribe la expresión para el plano tangente a la superficie definida por $w = g(x,y,z)$ en el punto $(1,2,0)$.
6. Escribe el polinomio de Taylor de orden 2 en el punto $(1,2,0)$.

Problema 1.45

Se considera la función $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{|x|^\alpha \arctan y}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{si } (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & \text{si } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

(a). Demuestra que para $\alpha>0$, la función f es continua en $(0,0)$.

(b). Para $\alpha>0$, escribe el valor de $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

(c). Demuestra que f es diferenciable en $(0,0)$ cuando $\alpha>1$.

(d). ¿Es f diferenciable en $(0,0)$, cuando $\alpha=1$? Razona la respuesta.

Problema 1.46

Estudia el siguiente límite $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{y(x-\sin x)}{x^4+y^2}$ y calcúlalo caso de que exista.

Problema 1.47

Sea la función $f:\mathbb{R}^3\mapsto\mathbb{R}$ $f(x,y,z)=(x\cos(y^2+1)+y\sin(ze^x))e^z$.

1. Decide si f es diferenciable en $\mathbb{R}^3$. Justifica la respuesta.
2. Calcula las derivadas parciales $\frac{\partial g}{\partial x}$, $\frac{\partial g}{\partial y}$ y $\frac{\partial g}{\partial z}$.
3. En caso de ser diferenciable escribe la derivada total de f en un punto (x,y,z).
4. ¿Cuánto vale la derivada f en el punto $(0,1,-1)$ según la dirección del vector $(-1/\sqrt{2},0,1/\sqrt{2})$.
5. Escribe la expresión para el plano tangente a la superficie definida por $w=f(x,y,z)$ en el punto $(0,1,-1)$.
6. Escribe el polinomio de Taylor de orden 2 en el punto $(0,1,-1)$.

Problema 1.48

Se considera la función $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin(xy)|y|^\alpha}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{si } y\neq 0,\\ 0, & \text{si } y=0.\end{cases}$$

(a) Decide si para $\alpha>-1$, la función f es continua en $(0,0)$.

(b) Para $\alpha>0$, escribe el valor de $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

(c) Demuestra que f es diferenciable en $(0,0)$ cuando $\alpha>0$.

(d) ¿Es f diferenciable en $(0,0)$, cuando $\alpha=0$? Razona la respuesta.

Problema 1.49

Sea la función $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3\cos y}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si} \quad (x,y)=(0,0)\ .\end{cases}$$

1. Prueba que f es continua en todo su dominio.
2. Encuentra las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ en $\mathbb{R}^2$.
3. Prueba que la derivada direccional $D_{\hat{u}} f(0,0) = u_1^3$ cualquiera sea el vector unitario $\vec{u} = (u_1, u_2)$.
4. Decide si f es diferenciable $(0,0)$. ¿Y en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$?
5. En caso que f sea diferenciable en $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$, calcula el vector gradiente $\nabla f\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$.
6. Usando el apartado anterior si es neceario escribe la ecuación del plano tangente a la función $f(x, y)$ en el punto $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$.

Problema 1.50

Sea $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2x^2 y - \dfrac{4x^6 y^2}{(x^4 + y^2)^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$, $f(0,0) = 0$.

a) Demostrar que $4x^4 y^2 \leq (x^4 + y^2)^2$, $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$. Deducir que f es continua en $\mathbb{R}^2$.

b) Si $0 \leq t \leq 2\pi$ y $r > 0$, sea $g_t(r) = f(r \cos t, r \operatorname{sen} t)$.
Probar que $g_t(0) = g_t'(0) = 0$; $g_t''(0) = 2$.

c) Deducir que la restricción de f a cada recta que pasa por el origen de coordenadas tiene un mínimo local estricto en $(0,0)$, pero tal punto no es mínimo local de f.

Problema 1.51

Para $a > 0$ se define la función $f : (-1, +\infty) \times (-\pi, \pi) \to \mathbb{R}$ como

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\log(1+x)|y|^a}{\operatorname{sen}(y)\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{si } y \neq 0, \\ 0, & \text{si } y = 0. \end{cases}$$

(a) Demuestra que para todo $a > 1$, f es continua en $(0,0)$.

(b) Para $a = 1$, da explícitamente el valor de $D_u f(0,0)$, donde u es un vector de $\mathbb{R}^2$ de norma euclídea igual a 1.

(c) Para $a = 2$ ¿es f diferenciable en $(0,0)$? Razona la respuesta.

(d) Demuestra que para $a > 2$ f es diferenciable en $(0,0)$.

Problema 1.52

Sea $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,a)\} \mapsto \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, $f(x,y) = \dfrac{|x|^\alpha \cos(x) \arcsin(xy)}{\sqrt{3x^2 + y^2}}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Demuestra que para $\alpha > -1$ existe el límite $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.
2. ¿Qué valor ha de tomar f en $(0,0)$ para que sea continua en $(0,0)$? Justifica la respuesta
3. Calcula, si es posible, las derivadas parciales de f en $(0,0)$.
4. ¿Para que valores de α f es diferenciable en $(0,0)$? Justifica la respuesta y calcula la derivada (diferencial) de f en $(0,0)$ si existe.
5. ¿Es diferenciable para $\alpha = 0$? Justifica la respuesta.

Problema 1.53

Sea $g : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, $g(x,y) = \dfrac{x^2 \cos(y) + y^2 \cos(x)}{2}$.

1. Decide si g es diferenciable en $\mathbb{R}^2$. Justifica la respuesta.
2. Calcula las derivadas parciales $\frac{\partial g}{\partial x}$ y $\frac{\partial g}{\partial y}$.

3. ¿Cuánto vale la derivada de g en el punto $(0, \pi/4)$ según la dirección del vector $(1, -1)$.
4. ¿En que dirección es máxima la variación de g en dicho punto $(0, \pi/4)$? ¿Y mínima?
5. Escribe la expresión para el plano tangente a la superficie definida por $z = g(x, y)$ en el punto $(0, \pi/4)$?
6. Escribe el polinomio de Taylor de orden 2 en el punto $(0, \pi/4)$.

Problema 1.54

Sea $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \mapsto \mathbb{R}$, $f(x, y) = \dfrac{|x|^\alpha e^{3x^2} \arcsin(2x)}{\sqrt{2x^2 + y^2}}$, $\alpha \geq 0$.

1. Demuestra que si $\alpha > 0$ existe el límite $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y)$ y calcúlalo.
2. ¿Qué valor ha de tomar f en $(0, 0)$ para que sea continua en $\mathbb{R}^2$? Justifica la respuesta
3. Calcula cuando sea posible las derivadas parciales de f en $(0, 0)$.
4. ¿Para que valores de α f es diferenciable en $(0, 0)$? Justifica la respuesta y calcula la derivada (diferencial) de f en $(0, 0)$ si existe.
5. ¿Es diferenciable para $\alpha = 1$? Justifica la respuesta.

Problema 1.55

Sea $g : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$, $g(x, y, z) = \left(y^2 + x^2\right) e^{z^2-1} - 2\, e^{x^2-1} \left(z^2 + y^2\right)$.

1. Decide si g es diferenciable en $\mathbb{R}^2$. Justifica la respuesta.
2. Calcula las derivadas parciales $\frac{\partial g}{\partial x}$, $\frac{\partial g}{\partial y}$ y $\frac{\partial g}{\partial z}$.
3. ¿Cuánto vale la derivada g en el punto $(1, 0, 1)$ según la dirección del vector $(3, 4, 0)$.
4. ¿En que dirección es máxima la variación de g en dicho punto $(1, 0, 1)$? ¿Y mínima?
5. Escribe la expresión para el plano tangente a la superficie definida por $w = g(x, y, z)$ en el punto $(1, 0, 1)$?
6. Escribe el polinomio de Taylor de orden 2 de g en el punto $(0, 0, 0)$.

Problema 1.56

Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ y sea $f(x, y) = \dfrac{|x|^\alpha \cos(2x) \arctan(x)}{\sin(x^2) + \sin(y^2)}$.

1. Encuentra la mayor región de $\mathbb{R}^2$ donde se pueda definir f.
2. En los puntos donde no esté definida decide si para algún valor de α se puede redefinir de forma que sea continua. Justifica la respuesta
3. Calcula, si es posible, las derivadas parciales de f en $(0, 0)$.
4. Demuestra que para $\alpha > 2$ f es diferenciable en $(0, 0)$? Justifica la respuesta.
5. ¿Es diferenciable para $\alpha = 2$? Justifica la respuesta.

Problema 1.57

Calcula, si es posible, los siguientes límites

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 + 3y^2 + 6xy - 5xy^2}{\sqrt{x^2 + 2y^2}}, \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x|y|^{3/2})}{|x|^2 + |y|}.$$

Problema 1.58

Sea $f : [-1,1] \times [-1,1] \setminus \{(0,0)\} \mapsto \mathbb{R}$, $f(x,y) = \dfrac{|y|^\alpha \cos(x) \sin(x)}{\sin(x^2) + \sin(y^2)}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Demuestra que para $\alpha > 1$ existe el límite $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.
2. ¿Qué valor ha de tomar f en $(0,0)$ para que sea continua en $\mathbb{R}^2$? Justifica la respuesta
3. Calcula, si es posible, las derivadas parciales de f en $(0,0)$.
4. Demuestra que para $\alpha > 2$ f es diferenciable en $(0,0)$? Justifica la respuesta.
5. ¿Es diferenciable para $\alpha = 2$? Justifica la respuesta.

Problema 1.59

Sea $g : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, $g(x,y) = xe^y + ye^x + 2xy$.

1. Decide si g es diferenciable en $\mathbb{R}^2$. Justifica la respuesta.
2. Calcula las derivadas parciales de orden uno y dos.
3. ¿Cuánto vale la derivada g en el punto $(0,0)$ según la dirección del vector $(2,1)$.
4. Escribe el polinomio de Taylor de orden 2 en el punto $(0,0)$.

Problema 1.60

Sea $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \mapsto \mathbb{R}$, $f(x,y) = \dfrac{|y|^\alpha e^{2x} \sin(x)}{\sqrt{x^2 + 2y^2}}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. Demuestra que para $\alpha > 0$ existe el límite $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ y calcúlalo.
2. ¿Qué valor ha de tomar f en $(0,0)$ para que sea continua en $\mathbb{R}^2$? Justifica la respuesta
3. Calcula cuando sea posible las derivadas parciales de f en $(0,0)$.
4. ¿Para que valores de α f es diferenciable en $(0,0)$? Justifica la respuesta y calcula la derivada (diferencial) de f en $(0,0)$ si existe.
5. ¿Es diferenciable para $\alpha = 1$? Justifica la respuesta.

2. Teoremas de inversión local. Extremos

2.1. Teoremas de la función inversa y de la función implícita

Problema 2.1

Calcular las derivadas de las funciones implícitas definidas por

i) $x^2 + y^2 = 1$, $y\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

ii) $x^3 \log x^2 + y^2 = 0$, $x(0) = 1$. En este caso prueba además que $x(y)$ tiene un extremo y calcúlalo.

Problema 2.2

Prueba que la ecuación $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} - r^2 = 0$ define una función $z = f(x, y)$ diferenciable en el entorno de cualquier punto $A = (x_0, y_0, z_0)$ con $z_0 \neq 0$. Encuentra la ecuación de plano tangente a la superficie en dicho punto A. ¿Cómo encontrarías la ecuación del plano en un punto con $z_0 = 0$?

Problema 2.3

Determinar la función implícita g definida en un entorno del punto $(0, 0)$ la ecuación

$$f(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 2z(x + y) - 2x + y - 2z + 1 = 0$$

con $z = g(x, y)$ y tal que $g(0, 0) = 1$. Da un desarrollo de Taylor de orden 2 de g en un entorno de $(0, 0)$.

Problema 2.4

Sea $f(x, y, z, t) = (x^3 z + y^3 t^2 - 1, 2zt^3 + xy^2)$. Probar que f define una función implícita de clase $\mathcal{C}^\infty$, $(z, t) = (h_1(x, y), h_2(x, y))$ en un entorno de $(0, 1, 0, 1)$. Calcula $Dh(0, 1)$.

Problema 2.5

Sea la ecuación $e^{z^2-1} + (xe^{y^2} + e^{x^2} y)z - 1 = 0$.

1. Para que valores de $a \in \mathbb{R}$ la ecuación anterior define una función $z = f(x, y)$ en el entorno U del punto $(0, 0, a)$. ¿Para alguno de dichos puntos la función $z = f(x, y)$ es diferenciable? ¿Cuántas veces? Justifica la respuesta.
2. Calcula, si es posible, las derivadas parciales $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$ en el entorno de los puntos obtenidos en el apartado 1.
3. Escribe, si es posible, la ecuación del plano tangente a la curva $z = f(x, y)$ en los puntos obtenidos en el apartado 1.

Problema 2.6

Estudiar para qué valores de la constante a, la ecuación $x^2 + y^3 + xy + x^3 + ay = 0$ define y como función implícita de x en un entorno del punto (0,0). Hallar $y\prime(0)$. ¿Define la ecuación a x como función implícita de y en un entorno del mismo punto? Decide si $y(x)$ tiene un extremo en $x = 0$.

Problema 2.7

Probar que existen funciones f y g de clase $\mathcal{C}^\infty$ definidas en un entorno de $(1, 1)$, tales que $f(1, 1) = -1$, $g(1, 1) = 0$ y verificando las ecuaciones:

$$f(x, y)^3 + xg(x, y)^2 + y = 0, \qquad g(x, y)^3 + yg(x, y) + f(x, y)^2 = x.$$

Problema 2.8

Probar que la ecuación $x^2+y^2+z^2=\mathrm{e}^{x+y+z}-1$, define z como función $z=f(x,y)$, de clase infinito, en un entorno de $(0,0)$, verificando $f(0,0)=0$. Calcular el polinomio de Taylor de $f(x,y)$ en un entorno de (0,0) hasta los términos de segundo orden inclusive.

Problema 2.9

Sea $f(x,y,z)=x^2y+e^x+z$. Probar que existe una función g diferenciable, definida en un entorno del punto $(1,-1)$ tal que $g(1,-1)=0$ y $f(g(y,z),y,z)=0$. Calcula $Dg(1,-1)$.

Problema 2.10

La ecuación $\mathrm{sen}(ax+by+cz)+e^{cxyz}+x+2y=1$ define z como función implícita de x e y en un entorno del origen. Calcular los valores de las constantes a, b y c que hacen que el desarrollo de Taylor en un entorno de $(0,0)$ de dicha función implícita tenga los tres primeros términos nulos.

Problema 2.11

Prueba que la ecuación $y^2z+x\log z-x=0$ define una función dos veces diferenciable $z=f(x,y)$ en el entorno del punto $(1,-1,1)$. Calcula el polinomio de Taylor de orden dos de dicha función en dicho punto.

Problema 2.12

Si x_1,x_2,x_3 son las raices del polinomio $p(x)=x^3+y_1x^2+y_2x+y_3$, existe la siguiente relación con los coeficientes:

$$\begin{aligned} y_1 &= -(x_1+x_2+x_3), \\ y_2 &= x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3, \qquad \text{(Ecuaciones de Cardano – Vieta)} \\ y_3 &= -x_1x_2x_3. \end{aligned}$$

Demostrar que en un entorno de una terna de raíces reales (a,b,c) distintas dos a dos está definida una función de clase C^1 que expresa las raices en término de los coeficientes. Calcula una de las derivadas parciales de una de las componentes de dicha función.

Problema 2.13

Sea $f:\mathbb{R}^2\longmapsto\mathbb{R}^2$, definida por $f(u,v)=(e^u+e^v,e^u-e^v)$.

a) Determinar los puntos de $\mathbb{R}^2$ en los que f es localmente invertible.

b) ¿Es f globalmente invertible? En caso afirmativo caracterizar la imagen de f y calcular la función inversa f^{-1}.

c) Comprobar que las derivadas de f y de f^{-1} en puntos correspondientes son matrices inversas.

Problema 2.14

Sea $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ definida por $f(x,y)=(e^{x+y},x^2)$.

a) ¿En qué puntos es aplicable el teorema de la función inversa. Calcula la derivada de la función inversa local.

b) Estudia la inversión global de f en regiones de $\mathbb{R}^2$.

Problema 2.15

Sea $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^2$, $f(x,y)=(xe^y,xe^{-y})$.

1. ¿En qué puntos de $\mathbb{R}^2$ se puede garantizar la existencia de inversa local?
2. ¿Es f inyectiva? En caso negativo, encuentra el mayor subconjunto de $\mathbb{R}^2$ donde lo es, caracteriza su imagen y da una expresión de f^{-1}.

Problema 2.16

Sea $f(x,y) = (e^x \cos y, e^x \operatorname{sen} y)$.

a) Probar que f es localmente invertible, pero no globalmente, aunque su jacobiano es distinto de 0 siempre.

b) Comprobar que si $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -\pi < y < \pi\}$ entonces $f_{|U}$ es invertible, siendo su inversa continua.

c) Probar que U con la condición anterior es maximal.

Problema 2.17

Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(x,y) = (\cosh x \cos y, \operatorname{senh} x \operatorname{sen} y)$.

a) Estudiar donde es f localmente invertible. ¿Lo es en los puntos $(0, n\pi)$, $n \in \mathbb{Z}$?

b) Si $S = \{(x,y) : x > 0\}$, ¿es f inyectiva en S?

c) Sea $U = \{(x,y) : x > 0,\ 0 < y < 2\pi\}$. Calcular $f(U)$ y ver que $f_{|U}$ es biyectiva sobre su imagen.

Problema 2.18

Encontrar las expresiones en las nuevas variables de las siguientes expresiones y cambios de variables (se usa la notación $z_x = D_1 z = \frac{\partial z}{\partial x}$, etc.)

1. $(x\, z_x)^2 + (y\, z_y)^2 = z^2\, z_x\, z_y$ con $x = u \exp(w)$, $y = v \exp(w)$, y $z = w \exp(w)$;

2. $z_{xx} - z_{yy} = 0$ con $x = u + v$, $y = u - v$, y $z = w$;

3. $z_{xx} - z_y = 0$ con $x = -u/v$, $y = -1/v$, $z = \sqrt{-v}e^{u^2/(4v)}w$;

Problema 2.19

a) Sea $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $u(r,t,z) = (r \cos t, r \operatorname{sen} t, z)$. Si $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ es de clase $\mathcal{C}^3$ y supuesta conocida $f \circ u$, calcula $D_{11}f + D_{22}f + D_{33}f$.

Problema 2.20

1. Escribir el laplaciano de orden dos $\Delta z(x,y) := z_{xx} + z_{yy}$ en las nuevas variables $x = r\cos(\phi)$, $y = r\sin(\phi)$, $z = w$.

2. Escribir la ecuación de Laplace $w_{xx} + w_{yy} + w_{zz} = 0$ en las nuevas variables $x = r\cos(\phi)\sin(\theta)$, $y = r\sin(\phi)\sin(\theta)$, $z = r\cos(\theta)$, siendo la función $w(x,y,z) = w(r,\theta,\phi)$.

2.1.1. Miscelánea

Problema 2.21

Sea la ecuación $z^3 + 2(x+y)^2 z + e^{z-1} - 4 = 0$.

1. Prueba que la ecuación anterior define una función $z = f(x,y)$ en el entorno U del punto $(0,-1,1)$ y que dicha función es una función $C^{(\infty)}(U)$ en dicho U.

2. Calcula las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ en dicho punto.

3. Escribe el polinomio de Taylor de orden 1 de f en $(0,-1,1)$.

Problema 2.22

Sea la ecuación $z^3 - xyz + y^2 = 16$.

a) Prueba que dicha ecuación define una función $z = f(x,y)$ en cierto entorno U de $(1,4,2)$ y que dicha función f es $C^{(p)}(U)$ para todo $p \in \mathbb{N}$.

b) Calcula la expresión formal de $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ en un punto (x,y) de U.

c) Calcula los valores numéricos de las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}(1,4)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(1,4)$. ¿Cuánto vale la derivada direccional de f en la dirección $(1,-2)$ en dicho punto $(1,4)$?

d) Calcula el valor de $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,4)$

Problema 2.23

Sea la ecuación $F(x, y, z) := x^2y^2z^2 + \exp(x + y + 2z) + 5y^3 - 4y - 2 = 0$.

1. Prueba que la ecuación anterior define una función $z = f(x, y)$ en el entorno U del punto $(-1, 1, 0)$ y que dicha función es una función $C^{(\infty)}(U)$ en dicho U.
2. Calcula las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ en dicho punto.
3. Calcula la derivada direccional de f en el punto $(-1, 1)$ según la dirección $(1, 1)$. ¿En que dirección dicha derivada direccional es mínima?

Problema 2.24

Sea la ecuación $e^{z^2-1} + (xe^{y^2} + e^{x^2}y)z - 1 = 0$.

1. Para que valores de $a \in \mathbb{R}$ la ecuación anterior define una función $z = f(x, y)$ en el entorno U del punto $(0, 0, a)$. ¿Para alguno de dichos puntos la función $z = f(x, y)$ es diferenciable? ¿Cuántas veces? Justifica la respuesta.
2. Calcula, si es posible, las derivadas parciales $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$ en el entorno de los puntos obtenidos en el apartado 1.
3. Escribe, si es posible, la ecuación del plano tangente a la curva $z = f(x, y)$ en los puntos obtenidos en el apartado 1.

Problema 2.25

Sea la ecuación

$$F(x, y, z) = x^2\, e^{-z+y^2+a} + x^2\, y^2\, z^2 - x^3\, y, \qquad a \in \mathbb{R}.$$

1. ¿Para qué valores de a la ecuación anterior define una función $z = f(x, y)$ en el entorno U del punto $(1, 1, 0)$? Justifica la respuesta.
2. ¿Cuántas veces podemos derivar la función resultante $z = f(x, y)$ en el entorno U del punto $(1, 1, 0)$? Justifica la respuesta.
3. Calcula las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ en dicho punto.
4. Calcula la derivada direccional de f en el punto $(1, 1)$ según la dirección $u = (2, -1)$.
5. Escribe, si es posible, el plano tangente a la superficie definida por la ecuación $F(x, y, z) = 0$ en el punto $(1, 1, 0)$.

Problema 2.26

Sea la ecuación $x^2z - yz^2 + x\cos(xz^2) - 1 = 0$

1. Para que valores de $a, b \in \mathbb{R}$ la ecuación anterior define una función $z = f(x, y)$ en el entorno U del punto $(a, b, 0)$. ¿Es para alguno de dichos puntos la función $z = f(x, y)$ diferenciable? ¿Cuántas veces? Justifica la respuesta.
2. Calcula las derivadas parciales $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$ en los puntos anteriores donde sea posible.
3. En que dirección es máxima la variación de $z = f(x, y)$ en el punto $(1, 1, 0)$.

Problema 2.27

Sea $F(x, y, z) = x^2y^2e^{z^2+y^2+x^2-a} + 4xyz - x^4 - 3 = 0$, $a \in \mathbb{R}$.

1. ¿Para qué valores de a la ecuación anterior define una función $z = f(x, y)$ en el entorno U del punto $(1, 2, 0)$? Justifica la respuesta.

2. ¿Cuántas veces podemos derivar la función resultante $z = f(x, y)$ en el entorno U del punto $(1, 2, 0)$? Justifica la respuesta.

3. Calcula las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ en dicho punto.

4. Calcula la derivada direccional de f en el punto $(1, 2)$ según la dirección $(-1, 2)$.

5. Escribe, si es posible, el plano tangente a la superficie definida por la ecuación $F(x, y, z) = 0$ en el punto $(1, 2, 0)$.

6. Escribe la expresión del polinomio de Taylor de orden 1 de $f(x, y)$ alrededor del punto $(1, 2)$.

Problema 2.28

Sea la ecuación $F(x, y, z) = -3xe^{z^2+y^2-1} + x^2z^2 + 3y^2z - a = 0$, con $a \in \mathbb{R}$.

1. ¿Para qué valores de a la ecuación anterior define una función $z = f(x, y)$ en el entorno U del punto $(0, 1, 1)$? Justifica la respuesta.

2. ¿Cuántas veces podemos derivar la función resultante $z = f(x, y)$ en el entorno U del punto $(0, 1, 1)$? Justifica la respuesta.

3. Calcula las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ en dicho punto.

4. Calcula la derivada direccional de f en el punto $(0, 1)$ según la dirección $(1, 1)$.

5. Escribe, si es posible, el plano tangente a la superficie definida por la ecuación $F(x, y, z) = 0$ en el punto $(0, 1, 1)$.

2.2. Extremos en $\mathbb{R}^n$

2.2.1. Extremos libres

Problema 2.29

Estudiar la existencia de máximos y mínimos locales de las funciones:

$$a)\ f(x,y) = xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}, \qquad b)\ f(x,y) = \frac{x-y}{x^2+y^2+1}, \qquad c)\ f(x,y) = x^3 + y^3 - 9xy + 27,$$

$$d)\ f(x,y) = 2x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2, \quad e)\ f(x,y) = (x+y)\exp(-x^2-y^2), \quad f)\ f(x,y) = \sin x + \cos y.$$

Problema 2.30

Estudiar los extremos relativos de las siguientes funciones:

a) $f(x, y) = (1+e^y)\cos(x) - ye^y$, b) $f(x, y) = x^3+3xy^2-15x-12y$, c) $f(x, y) = xy+x^3+\frac{1}{2}y^2+1$.

Problema 2.31

Demostrar que la función $g(x, y) = (x + y)e^{-(x+2y)}$ alcanza sus extremos absolutos en $x \geq 0, y \geq 0$. Calcúlalos razonadamente.

Problema 2.32

Sea $f : [0, 1] \times [0, 1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = \begin{cases} x(1-y) & \text{si } x \leq y, \\ y(x-1) & \text{si } x > y \end{cases}.$

Demostrar que f alcanza su máximo en el interior del cuadrado donde está definida. Calcular ese máximo y el punto donde se alcanza. ¿Qué ocurre si cambiamos la función por la siguiente?

$g : [0, 1] \times [0, 1] \to \mathbb{R}$ definida por $g(x, y) = \begin{cases} x(1-y) & \text{si } x \leq y, \\ y(1-x) & \text{si } x > y \end{cases}.$

Problema 2.33

Sean $f(x,y) = xe^{x(1+y^2)^2}$ y $g(x,y) = 3xe^y - x^3 - e^{3y}$. Estudia sus extremos, tanto relativos como absolutos, en $\mathbb{R}^2$.

Problema 2.34

Estudia los extremos relativos y absolutos de la función $f(x,y,z) = x^4 + z^4 - 2(x^2+z^2) + y^2$

Problema 2.35

Deducir razonadamente que la ecuación $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 4y - 2z + 8 = 0$ define en un entorno de $(2,2,2)$ una función $z = g(x,y)$ que verifica la ecuación y posee un máximo local estricto en dicho punto.

Problema 2.36

Demostrar que si el punto (a,b) verifica la ecuación $xy - \log x + \log y = 0$, $(x, y > 0)$, entonces existe una solución indefinidamente diferenciable $y = f(x)$ que pasa por dicho punto. Probar asimismo que existe un punto (a,b) tal que la solución correspondiente $y = f(x)$ tiene un máximo en a.

2.2.2. Extremos condicionados

Problema 2.37

Encuentra los extremos de $f(x,y,z) = x^2 - y^2 + z^2$ si $2x - y - 3 = 0$. Resuélvelo sustituyendo directamente la y en función de la x mediante la ligadura y por el método de los coeficientes indeterminados de Lagrange.

Problema 2.38

Hallar las distancias máxima y mínima del origen a la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 - 6x - 8y - 75 = 0$.

Problema 2.39

Calcular los extremos de $f(x,y) = x + y$ sobre la elipse $x^2 + 2y^2 = 1$. Idem para $f(x,y) = -4x - 3y + 6$ sobre $x^2 + y^2 = 1$.

Problema 2.40

Encuentra los extremos absolutos de $f(x,y) = x^2 + y^2 - x - y + 1$ sobre la región $x^2 + y^2 \leq 2$. ¿Tiene extremos relativos?

Problema 2.41

Probar que la función $f(x,y) = x^2 + y^2 + x + y$ alcanza extremos absolutos en el recinto $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4, y \leq 1\}$. Calcularlos.

Problema 2.42

Hallar la distancia mínima del origen de coordenadas a la cónica de ecuación $x^2 + 3xy + y^2 = 5$. ¿Qué se puede decir de la distancia máxima?

Problema 2.43

a) Descomponer un numero positivo a en producto de cuatro factores cuya suma sea la menor posible.
b) Descomponer un número positivo a en suma de tres términos cuyo producto sea máximo

Problema 2.44

Sea $f:\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x,y)=\log\Big(x^2+y^2\Big)$.

(a) Probar que f no tiene ni extremos relativos y ni absolutos.

(b) Prueba que f tiene extremos absolutos en $A=\{(x,y): x\geq 1, (x-1)^2+y^2\leq 4\}$. Calculalos razonadamente

Problema 2.45

Sea $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ dada por $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2+x+y+z$. Sea $M=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: x^2+y^2+z^2\leq 12,\ z\leq 1\}$.

a) Encuentra todos los puntos críticos de f en M.

b) Prueba que f tiene en M extremos absolutos y calcúlalos.

Problema 2.46

Sea $M=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: 0\leq z\leq 1-x^2-y^2\}$, y sea $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, definida por $F(x,y,z)=(1-z^2)(x-y)$. Prueba que F alcanza extremos absolutos en M y calcúlalos.

Problema 2.47

Sea la curva en $\mathbb{R}^3$ definida por las ecuaciones $x+y+z=12$ y $z=x^2+y^2$.

a) Encuentra los puntos más alto y más bajo de dicha curva.

b) Encuentra los puntos de la curva más cercano y lejano al origen de coordenadas.

Problema 2.48

Estudiar los extremos de la función $f(x,y,z)=x+y+2z$ sobre el elipsoide de ecuación $x^2+y^2+2z^2=2$.

Problema 2.49

Sea el paraboloide truncado definido por las ecuaciones $x^2+y^2=z$, $z\leq 3$. Encuentra los puntos que estén respectivamente más próximos y más lejos del punto $(3,3,1)$.

Problema 2.50

Sea la superficie definida por $x^4+2y^2+4z^2=8$. Encuentra los puntos que estén respectivamente más próximos y más lejos del punto $(0,0,3)$.

Problema 2.51

Calcula los extremos de la función $f(x,y)=x^2+xy+y^2$ bajo la condición $x^3y+xy^3=2a^4$, $a>0$.

Problema 2.52

Encuentra los extremos de la función $f(x,y,z)=x+y+z^2$ bajo las ligaduras

$$\begin{cases} z-x=1, \\ y-xz=1. \end{cases}$$

Resuélvelo mediante a) los coeficientes indeterminados de Lagrange y b) sustituyendo los valores de z e y en función de x en la función f.

Problema 2.53

Encontrar los puntos de la curva de ecuación $x^2+y^2=4$, $6x+3y+2z=6$ que estén respectivamente más próximos y más lejos del origen.

Problema 2.54

Dadas las rectas de ecuaciones

$$\frac{x-2}{3}=\frac{y-6}{7}=z, \qquad \frac{x-1}{6}=y=\frac{z-2}{7},$$

hallar la mínima distancia entre ellas.

Problema 2.55

Encuentras los extremos locales (y absolutos caso de que existan) de la función $u=x+y-z$ definida sobre la curva

$$\begin{cases} x+y=1, \\ 4x^3+4y^3+4z^3+12x+12y+12z=13. \end{cases}$$

Ayuda: Es más fácil encontrar las relaciones entre los diferenciales dx, dy y dz y calcular du y d^2u.

Problema 2.56

Encuentrar los puntos de la curva $x^2+y^2-z^2-xy=1$, $x^2+y^2=1$ que están más cerca del origen.

2.2.3. Miscelánea

Problema 2.57

Sea la función $f: A\subset\mathbb{R}^3\mapsto\mathbb{R}$, $\quad f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2+4z-4x$, donde A es la región definida por $A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\,|\,x^2+2y^2+z^2\leq 8,\ z\leq 1\}$.

1. Calcula todos los puntos críticos de dicha función. Decide, si es posible si son extremos locales.
2. ¿Alcanza f su máximo y mínimo globales en A? Justifica tu respuesta.
3. Calcula, si existen, dichos máximo y mínimo globales de f.

Problema 2.58

Sea el conjunto $D:=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ :\ x^2+y^4\leq 1\}$ y sea $f: D\longrightarrow\mathbb{R}$ la función definida por $f(x,y)=4x^2+2y^4-y$.

(a) Encuentra todos los extremos relativos de f en D.

(b) Prueba que f tiene extremos absolutos en D. Calcúlalos razonadamente.

(c) ¿Tiene f extremos absolutos en $D\cup\{(x,y)|x\geq 0\}$? Justifica tu respuesta y calcúlalos si procede.

Problema 2.59

Sea la función

$$f: A\subset\mathbb{R}^3\mapsto\mathbb{R}, \quad f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-2x+4y-3,$$

donde A es la región definida por

$$A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\,|x^2+y^2+z^2\leq 9,\ x\geq 0\}.$$

1. Calcula todos los extremos locales de dicha función.

2. ¿Alcanza f su máximo y mínimo globales en A? Justifica tu respuesta.
3. Calcula, si existen, dichos máximo y mínimo globales de f.

Problema 2.60

Sea la función $f : A \subset \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = z^2 - 2z + 2y^2 + 4x^2 - 3$, donde A es la región definida por (paraboloide elíptico) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x^2 + y^2 \leq z \leq 4\}$.

1. Calcula todos los puntos críticos de dicha función.
2. ¿Alcanza f su máximo y mínimo globales en A? Justifica tu respuesta.
3. Calcula, si existen, dichos máximo y mínimo globales de f.

Problema 2.61

1. Dada la elipse de ecuación $x^2 - xy + y^2 = 1$, encuentra los puntos más cercanos y alejados del punto $(2, 2)$.
2. Sea $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 + 4y - 4$.
   a) Decide si f tiene extremos relativos en $\mathbb{R}^2$. En caso de que los tenga calcúlalos.
   b) Decide si f tiene extremos absolutos sobre la circunferencia $x^2 + y^2 = 9$ y en caso de tenerlos encuentra dónde se encuentran y cuáles son sus valores.

Problema 2.62

Sea la superficie S de $\mathbb{R}^3$ definida por $x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 9$.

1. Sea la función $f : S \mapsto \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = x - y + \sqrt{3}\,z$ definida sobre S. Encuentra todos los puntos críticos de f en S y decide si son extremos locales o puntos de silla.
2. ¿Tiene f extremos absolutos sobre S. Justifica la respuesta y en caso de tenerlos encuéntralos.
3. Encuentra, si existen, los puntos de la superficie S más próximos y más alejados del punto $(0, 0, 3)$.

Problema 2.63

Sea $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 + 4y - 4$.

1. Decide si f tiene extremos relativos en $\mathbb{R}^2$. En caso de que los tenga calcúlalos.
2. Sea la elipse de ecuación $2x^2 + 4y^2 = 1$. Decide si f tiene extremos absolutos sobre dicha elipse y en caso de tenerlos encuentra dónde se encuentran y cuál es su valor.

Problema 2.64

Sea la superficie S de $\mathbb{R}^3$ definida por la fórmula $x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 9$.

1. Sea la función $f : S \mapsto \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = x - y + \sqrt{3}\,z$ definida sobre S. Encuentra todos los puntos críticos de f en S y decide si son extremos locales o puntos de silla.
2. ¿Tiene f extremos absolutos sobre S. Justifica la respuesta y en caso de tenerlos encuéntralos.
3. Encuentra, si existen, los puntos de la superficie S más próximos y más alejados del punto $(0, 0, 3)$.

Se recomienda a los alumnos consultar además los siguientes libros de problemas:

1. Carmona Álvarez, J., Facenda Aguirre, J. A., Freniche Ibáñez, F. J. *Ejercicios de Cálculo Diferencial de varias variables*. Secretariado de Publicaciones. Universidad de Sevilla, 2008.
2. Demidovich, B. *5000 problemas de Análisis Matemático*, Paraninfo, 1980. (Existe una versión de la editorial MIR).
3. Liashkó, I.I. y otros. Matemática superior. Problemas resueltos (Vol. 3). Ed. URSS 1999.
4. Spiegel, M. R. Variables reales. Serie Schaum, McGraw-Hill 1969.