

1. Derivación y aplicaciones

1.1. Derivadas direccionales

Ejemplo 1: Sea la función $f(x, y) = x^2y^3$

1. Calcula sus todas derivadas parciales hasta orden dos.
2. Encontrar la derivada en el punto $(1, 2)$ según la dirección $\vec{u} = (2, -1)$.
3. ¿Cuál es la dirección de máxima variación de f en el punto $(2, -1)$?

Ejercicio 1: Encontrar la derivada de la función $f(x, y) = xy$ en el punto $(1, -1)$ según la dirección $\vec{u} = (1, 1)$.

Ejercicio 2: Encontrar la derivada de la función $f(x, y) = \sin\left(\frac{x^2 + y^2}{1 + x^2 + y^2}\right)$ en el punto $(-1, 1)$ según la dirección $\vec{u} = (-4, 3)$.

Ejercicio 3: Encontrar la derivada de la función $f(x, y, z) = (x/y)^z$ en el punto $(1, 1, 1)$ según la dirección $\vec{u} = (2, 1, -1)$.

Ejercicio 4: Encontrar la derivada de la función $f(x, y, z) = (x^2 + y^2)^z$ en el punto $(1, 0, 1)$ según la dirección $\vec{u} = (1, -1, 1)$.

1.2. Límites, continuidad y diferenciabilidad

Ejemplo 1: Estudia el límite $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ para la función $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0); \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$

Ejemplo 2: Estudia el límite $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ para la función $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2y^2}{x^2 + y^2}, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0); \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$

Ejercicio 1: Estudia el límite $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ para la función

$$f(x, y) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2}\right), & \text{si } (x, y) \neq (0, 0); \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Ejercicio 2: Estudia el límite $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ para la función

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right), & \text{si } (x, y) \neq (0, 0); \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Ejemplo 3: Calcula la matriz de Jacobi (Diferencial) si existe de la función $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right) \\ \tan\left(\frac{x^2}{y}\right) \end{pmatrix}.$$

¿En cuáles puntos puede haber problemas? Calcula el valor de la diferencial en los puntos $(0, 1)$ y $(\sqrt{\pi}, 1)$.

Ejercicio 3: Calcula la matriz de Jacobi (Diferencial) si existe de la función $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^2$

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} \log(x^2 + y^2 + 2z^4 + 1) \\ \tanh(x^2 - yz) \end{pmatrix}.$$

¿En cuáles puntos puede haber problemas? Calcula el valor de la diferencial en los puntos $(1, 0, 1)$ y $(1, 1, 1)$.

1.3. Planos tangente

Ejemplo 1: Encuentra el plano tangente a la función $f(x, y) = 1 - x^2 - y^2$ en el punto $(-1, 1)$.

Ejercicio 1: Encuentra el plano tangente a la función $f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 + y^2}$ en el punto $(-2, 1)$.

Ejercicio 2: Encuentra el plano tangente a la función $f(x, y) = \arctan(x^2 + y^2)$ en el punto $(0, 1)$.

Ejercicio 3: Encuentra el plano tangente a la función $f(x, y) = (x^2 + y^2) \sin(x^2 + y^2)$ en los puntos $(0, 0)$ y $(0, 1)$.

Ejercicio 4: Encuentra el plano tangente a la función $f(x, y) = \exp(-x^2 - y^2)$ en los puntos $(0, 0)$ y $(1/2, -1/2)$.

1.4. Derivadas de orden superior

Ejemplo 1: Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Probar que $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$. Calcular $D_{12}f(0, 0)$ y $D_{21}f(0, 0)$. ¿Es la función f dos veces diferenciable en \mathbb{R}^2 ?

Ejercicio 1: Sea la función definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \operatorname{sen} \frac{1}{2} \left(\frac{x - y}{x + y} \right), & \text{si } x + y \neq 0; \\ 0, & \text{si } x + y = 0 \end{cases}$$

Estudia la continuidad y diferenciable de esta función. Calcula $D_{12}f(0, 0)$ y $D_{21}f(0, 0)$.

Ejercicio 2: Sea la función

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}(xy) - xy}{x^2 y}, & \text{si } x \neq 0, y \neq 0, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Estudia la continuidad y diferenciable de f en \mathbb{R}^2 . Calcular $D_{12}f(0, 0)$ y $D_{21}f(0, 0)$. ¿Es la función f dos veces diferenciable en \mathbb{R}^2 ?