1. Derivación y aplicaciones

1.1. Límites, continuidad y diferenciabilidad

Ejemplo 1: Estudia la continuidad y diferenciabilidad en $\mathbb{R}^2$ de función $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

Ejemplo 2: Estudia la continuidad y diferenciabilidad en $\mathbb{R}^2$ de función $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

Ejemplo 3: Estudia la continuidad y diferenciabilidad en $\mathbb{R}^2$ de función $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$

Ejemplo 4: Estudia el límite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ para la función

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right), & \text{si } (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Ejemplo 5: Calcula la matriz de Jacobi (diferencial) si existe de la función $f : A \subset \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} \arctan\left(\dfrac{x+y}{1-xy}\right) \\ \\ \tan\left(\dfrac{x^2}{y}\right) \end{pmatrix}.$$

¿En cuáles puntos puede haber problemas? Calcula el valor de la diferencial en los puntos $(0,1)$ y $(\sqrt{\pi},1)$.

Ejemplo 6: Calcula la matriz de Jacobi (diferencial) si existe de la función $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^2$

$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} \log(x^2+y^2+2z^4+1) \\ \tanh(x^2-yz) \end{pmatrix}.$$

¿En cuáles puntos puede haber problemas? Calcula el valor de la diferencial en los puntos $(1,0,1)$ y $(1,1,1)$. Encuentra el polinomio de Taylor de orden 2 de f (componente a componente).

1.2. Derivadas direccionales y planos tangente

En todos los ejemplos de este apartado encuentra las derivadas parciales de orden 1 para las funciones propuestas. Se asume que las funciones están bien definidas en un entorno del punto indicado.

Ejemplo 1: Sea la función $f(x,y) = x^2y^3$. Encontrar la derivada en el punto $A = (1,2)$ según la dirección $\vec{u} = (2,-1)$. ¿Cuál es la dirección de máxima variación de f en el punto $(2,-1)$? Dibuja la función en la dirección u en el punto A y en la dirección del gradiente en el punto A.

Ejemplo 2: Encontrar la derivada de la función $f(x,y) = \sin\left(\dfrac{x^2+y^2}{1+x^2+y^2}\right)$ en el punto $A = (-1,1)$ según la dirección $\vec{u} = (-4,3)$. Dibuja la función en la dirección u en el punto A y en la dirección del gradiente en el punto A.

Ejemplo 3: Encontrar la derivada de la función $f(x,y,z) = (x/y)^z$ en el punto $(1,1,1)$ según la dirección $\vec{u} = (2,1,-1)$.

Ejemplo 4: Encontrar la derivada de la función $f(x,y,z) = (x^2+y^2)^z$ en el punto $(1,0,1)$ según la dirección $\vec{u} = (1,-1,1)$.

Ejercicio para casa: Resolver los ejemplos 3 y 4 sin usar el ordenador, solo con lápiz y papel.

Ejemplo 5: Encuentra el plano tangente a la función $f(x,y) = 1 - x^2 - y^2$ en el punto $(-1,1)$.

Ejemplo 6: Encuentra el plano tangente a la función $f(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}$ en el punto $(-2,1)$.

Ejemplo 7: Encuentra el plano tangente a la función $f(x,y)=\arctan(x^2+y^2)$ en el punto $(0,1)$.

Ejemplo 8: Encuentra el plano tangente a la función $f(x,y)=(x^2+y^2)\sin(x^2+y^2)$ en los puntos $(0,0)$ y $(0,1)$.

Ejemplo 9: Encuentra el plano tangente a la función $f(x,y)=\exp(-x^2-y^2)$ en los puntos $(0,0)$ y $(1/2,-1/2)$.

1.3. Derivadas de orden superior

Ejemplo 1: Estudia la función $f(x,y)=\begin{cases}\arctan\left(\dfrac{x^4+y^4}{x^2+y^2}\right), & \text{si } (x,y)\neq(0,0);\\ 0, & \text{si } (x,y)=(0,0).\end{cases}$

Decide si es continua y diferenciable en $\mathbb{R}^2$. Decide si $f\in\mathcal{C}^1(R^2)$. Calcula $D_{12}f(0,0)$ y $D_{21}f(0,0)$. Decide si $f\in\mathcal{C}^2(R^2)$.

Ejemplo 2: Sea la función definida por

$$f(x,y)=\begin{cases} xy\,\mathrm{sen}\,\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x-y}{x+y}\right), & \text{si } x+y\neq 0;\\ 0, & \text{si } x+y=0\end{cases}$$

Estudia la continuidad y diferenciabilidad de esta función. Calcula $D_{12}f(0,0)$ y $D_{21}f(0,0)$.

Ejemplo 3: Sea la función

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\mathrm{sen}(xy)-xy}{x^2y}, & \text{si } x\neq 0, y\neq 0,\\ 0, & \text{en otro caso.}\end{cases}$$

Estudia la continuidad y diferenciabilidad de f en $\mathbb{R}^2$. Calcular $D_{12}f(0,0)$ y $D_{21}f(0,0)$. ¿Es la función dos veces diferenciable en $\mathbb{R}^2$? Si es dos veces diferenciable en un entorno de $(0,0)$ calcula su polinomio de Taylor de orden 2 en $(0,0)$.

Ejercicio para casa: Resolver con el ordenador el siguiente problema (resuelto en clase de problemas). Sea $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, definida por

$$f(x,y)=\begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

Probar que $f\in\mathcal{C}^1(R^2)$. Calcular $D_{12}f(0,0)$ y $D_{21}f(0,0)$. ¿Es la función f dos veces diferenciable en $\mathbb{R}^2$?