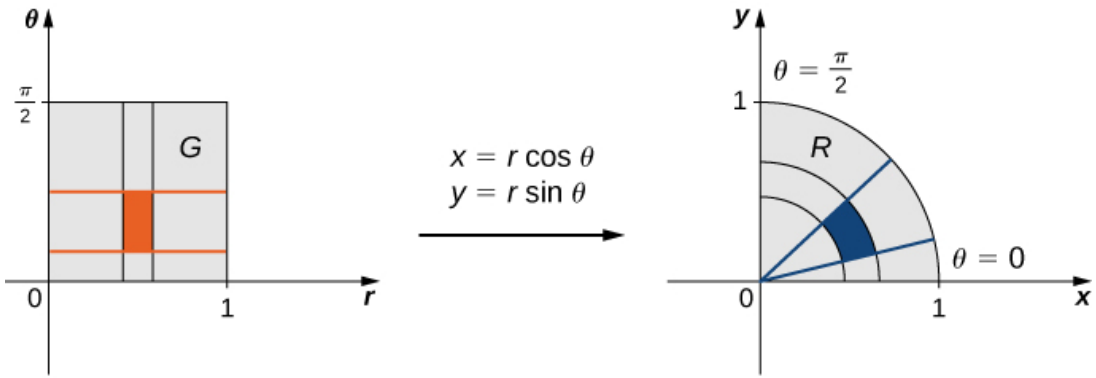
Cambio de variables con MAXIMA

Renato Álvarez-Nodarse

Universidad de Sevilla



https://renato.ryn-fismat.es/clases.html

Caso más simple de una función escalar con dos variables

Supongamos que tenemos una expresión del tipo

$$\Phi(x, y, z, z_x, z_y, z_{xx}, z_{xy}, z_{yy}, \dots)$$

donde x e y son **variables independientes** y z es una función $z : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, $z = z(x, y)$ y queremos escribirlas en las nuevas variables u, v y $w = w(u, v)$ asumiendo que las variables nuevas y viejas se relacionan mediante el sistema

$$g_i(x, y, z, u, v, w) = 0, \qquad i = 1, 2, 3,$$

que denominaremos expresiones del cambio de variables, donde las funciones g_i, $i = 1, 2, 3$ se asumen diferenciables tantas veces como haga falta.

Caso más simple de una función escalar con dos variables

Supongamos que tenemos una expresión del tipo

$$\Phi(x, y, z, z_x, z_y, z_{xx}, z_{xy}, z_{yy}, \dots)$$

donde x e y son **variables independientes** y z es una función $z : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, $z = z(x, y)$ y queremos escribirlas en las nuevas variables u, v y $w = w(u, v)$ asumiendo que las variables nuevas y viejas se relacionan mediante el sistema

$$g_i(x, y, z, u, v, w) = 0, \qquad i = 1, 2, 3,$$

que denominaremos expresiones del cambio de variables, donde las funciones g_i, $i = 1, 2, 3$ se asumen diferenciables tantas veces como haga falta.

Ejemplo: Escribir el laplaciano $\Delta z(x, y) := z_{xx} + z_{yy}$ en las variables r y ϕ, tales que $\mathrm{x} = \mathrm{r}\cos(\phi)$, $\mathrm{y} = \mathrm{r}\sin(\phi)$, $\mathrm{z} = \mathrm{w}$.

Cambio de variables

Hay dos opciones de especial interés:

1. Cuando las variables *viejas* se escriben en función de las *nuevas*:

$$x = f_1(u, v, w), \quad y = f_2(u, v, w), \quad z = f_3(u, v, w),$$

2. Cuando las variables *nuevas* se escriben en función de las *viejas*:

$$u = f_1(x, y, z), \quad v = f_2(x, y, z), \quad w = f_3(x, y, z).$$

Cambio de variables

Nos centraremos en el caso ❶ cuando se tiene la expresión explícita de las variables viejas en función de las nuevas

$$x = f_1(u, v, w), \quad y = f_2(u, v, w), \quad z = f_3(u, v, w).$$

Cambio de variables

Nos centraremos en el caso ❶ cuando se tiene la expresión explícita de las variables viejas en función de las nuevas

$$x = f_1(u, v, w), \quad y = f_2(u, v, w), \quad z = f_3(u, v, w).$$

Diferenciando las expresiones anteriores tenemos

$$\begin{aligned} dx &= D_u f_1\, du + D_v f_1\, dv + D_w f_1\, dw \\ dy &= D_u f_2\, du + D_v f_2\, dv + D_w f_2\, dw \\ dz &= D_u f_3\, du + D_v f_3\, dv + D_w f_3\, dw \end{aligned}$$

donde D_u, D_v y D_w son las correspondientes derivadas parciales respecto a las variables u, v y w, respectivamente.

Cambio de variables

Nos centraremos en el caso ❶ cuando se tiene la expresión explícita de las variables viejas en función de las nuevas

$$x = f_1(u, v, w), \quad y = f_2(u, v, w), \quad z = f_3(u, v, w).$$

Diferenciando las expresiones anteriores tenemos

$$\begin{aligned} dx &= D_u f_1\, du + D_v f_1\, dv + D_w f_1\, dw \\ dy &= D_u f_2\, du + D_v f_2\, dv + D_w f_2\, dw \\ dz &= D_u f_3\, du + D_v f_3\, dv + D_w f_3\, dw \end{aligned}$$

donde D_u, D_v y D_w son las correspondientes derivadas parciales respecto a las variables u, v y w, respectivamente.

$$dw = D_u w du + D_v w dv$$

Cambio de variables

Nos centraremos en el caso ❶ cuando se tiene la expresión explícita de las variables viejas en función de las nuevas

$$x = f_1(u, v, w), \quad y = f_2(u, v, w), \quad z = f_3(u, v, w).$$

Diferenciando las expresiones anteriores tenemos

$$\begin{aligned} dx &= D_u f_1\, du + D_v f_1\, dv + D_w f_1\, \mathrm{dw} \\ dy &= D_u f_2\, du + D_v f_2\, dv + D_w f_2\, \mathrm{dw} \\ dz &= D_u f_3\, du + D_v f_3\, dv + D_w f_3\, \mathrm{dw} \end{aligned}$$

donde D_u, D_v y D_w son las correspondientes derivadas parciales respecto a las variables u, v y w, respectivamente.

$$\mathrm{dw} = D_u w du + D_v w dv$$

Cambio de variables. $w = w(u, v)$

Si usamos que $\mathrm{dw} = D_u w du + D_v w dv$ tenemos

$$dx = D_u f_1\, du + D_v f_1\, dv + D_w f_1\, \mathrm{dw} = D_u f_1\, du + D_v f_1\, dv + D_w f_1 (\mathrm{D_u w du} + \mathrm{D_v w dv})$$

Cambio de variables. $w = w(u, v)$

Si usamos que $\mathrm{dw} = D_u w du + D_v w dv$ tenemos

$$dx = D_u f_1\, du + D_v f_1\, dv + D_w f_1\, \mathrm{dw} = D_u f_1\, du + D_v f_1\, dv + D_w f_1 (\mathrm{D_u w du} + \mathrm{D_v w dv})$$

$$dx = [D_u f_1 + D_u w D_w f_1] du + [D_v f_1 + D_v w D_w f_1] dv \Rightarrow$$

Cambio de variables. $w = w(u, v)$

Si usamos que $\mathrm{dw} = D_u w du + D_v w dv$ tenemos

$$dx = D_u f_1\, du + D_v f_1\, dv + D_w f_1\, \mathrm{dw} = D_u f_1\, du + D_v f_1\, dv + D_w f_1 (\mathrm{D_u w du} + \mathrm{D_v w dv})$$

$$dx = [D_u f_1 + D_u w D_w f_1]\, du + [D_v f_1 + D_v w D_w f_1]\, dv \Rightarrow \text{si usamos la notación}$$

$$\mathcal{D}_u = \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial}{\partial w} = \frac{\partial}{\partial u} + w_u \frac{\partial}{\partial w}, \quad \mathcal{D}_v = \frac{\partial}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial}{\partial w} = \frac{\partial}{\partial v} + w_v \frac{\partial}{\partial w}$$

obtenemos

$$\begin{cases} dx = \mathcal{D}_u f_1\, du + \mathcal{D}_v f_1\, dv \\ dy = \mathcal{D}_u f_2\, du + \mathcal{D}_v f_2\, dv \\ dz = \mathcal{D}_u f_3\, du + \mathcal{D}_v f_3\, dv \end{cases} \tag{1}$$

Cambio de variables. $w = w(u, v)$

Si usamos que $\mathrm{dw} = D_u w du + D_v w dv$ tenemos

$$dx = D_u f_1\, du + D_v f_1\, dv + D_w f_1\, \mathrm{dw} = D_u f_1\, du + D_v f_1\, dv + D_w f_1 (\mathrm{D_u w du} + \mathrm{D_v w dv})$$

$$dx = [D_u f_1 + D_u w D_w f_1]\, du + [D_v f_1 + D_v w D_w f_1]\, dv \Rightarrow \text{si usamos la notación}$$

$$\mathcal{D}_u = \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial u}\frac{\partial}{\partial w} = \frac{\partial}{\partial u} + w_u \frac{\partial}{\partial w}, \quad \mathcal{D}_v = \frac{\partial}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial v}\frac{\partial}{\partial w} = \frac{\partial}{\partial v} + w_v \frac{\partial}{\partial w}$$

obtenemos

$$\begin{cases} dx = \mathcal{D}_u f_1\, du + \mathcal{D}_v f_1\, dv \\ dy = \mathcal{D}_u f_2\, du + \mathcal{D}_v f_2\, dv \\ dz = \mathcal{D}_u f_3\, du + \mathcal{D}_v f_3\, dv \end{cases} \tag{1}$$

Si el determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} \mathcal{D}_u f_1 & \mathcal{D}_v f_1 \\ \mathcal{D}_u f_2 & \mathcal{D}_v f_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

entonces las dos primeras ecuaciones de (1) se pueden resolver respecto a dx y dy, i.e, despejar la du y dv en función de dx y dy:

De esta forma obtenemos

$$du = \frac{1}{\Delta}\left(\mathcal{D}_v f_2\, dx - \mathcal{D}_v f_1\, dy\right), \quad dv = \frac{1}{\Delta}\left(-\mathcal{D}_u f_2\, dx + \mathcal{D}_u f_1\, dy\right),$$

que sustituimos en la 3ª expresión de (1) $\boxed{dz = \mathcal{D}_u f_3\, du + \mathcal{D}_v f_3\, dv}$

$$dz = \frac{1}{\Delta}\left(\mathcal{D}_u f_3 \mathcal{D}_v f_2 - \mathcal{D}_v f_3 \mathcal{D}_u f_2\right) dx + \frac{1}{\Delta}\left(-\mathcal{D}_u f_3 \mathcal{D}_v f_1 + \mathcal{D}_v f_3 \mathcal{D}_u f_1\right) dy.$$

De esta forma obtenemos

$$du = \frac{1}{\Delta}\Big(\mathcal{D}_v f_2\, dx - \mathcal{D}_v f_1\, dy\Big), \quad dv = \frac{1}{\Delta}\Big(-\mathcal{D}_u f_2\, dx + \mathcal{D}_u f_1\, dy\Big),$$

que sustituimos en la 3ª expresión de (1) $\boxed{dz = \mathcal{D}_u f_3\, du + \mathcal{D}_v f_3\, dv}$

$$dz = \frac{1}{\Delta}\Big(\mathcal{D}_u f_3 \mathcal{D}_v f_2 - \mathcal{D}_v f_3 \mathcal{D}_u f_2\Big)\, dx + \frac{1}{\Delta}\Big(-\mathcal{D}_u f_3 \mathcal{D}_v f_1 + \mathcal{D}_v f_3 \mathcal{D}_u f_1\Big)\, dy.$$

Pero $dz(x,y) = z_x\, dx + z_y\, dy$ luego

$$z_x = \frac{1}{\Delta}\Big(\mathcal{D}_u f_3 \mathcal{D}_v f_2 - \mathcal{D}_v f_3 D_u f_2\Big) = F_1(u, v, w, w_u, w_v),$$

$$z_y = \frac{1}{\Delta}\Big(-\mathcal{D}_u f_3 \mathcal{D}_v f_1 + \mathcal{D}_v f_3 \mathcal{D}_u f_1\Big) = F_2(u, v, w, w_u, w_v).$$

Ejemplo: Escribir las expresiones de z_x y z_y en las nuevas variables $x = r\cos(\phi)$, $y = r\sin(\phi)$, $z = w$.

Ejemplo: Escribir las expresiones de z_x y z_y en las nuevas variables $x = r\cos(\phi)$, $y = r\sin(\phi)$, $z = w$.

Definimos nuestras nuevas variables y calculamos los diferenciales

```
(%i1) depends(w,[r,phi]); depends(z,[x,y]);
(%i3) x=r*cos(phi); eq1:diff(%);
(%i5) y=r*sin(phi); eq2:diff(%);
(%i7) z=w;eq3:diff(%);
```

Encontramos las *du* y *dv* en función de las *dx* y *dy*

```
(%i9) linsolve([eq1,eq2],[del(r),del(phi)])$
      sol1:trigsimp(%);
```

Que sustituimos en la expresión para el diferencial de *z*

```
(%i11)subst(sol1,eq3)$ expand(%)$ a:second(%);
```

A continuación seleccionamos los coeficientes delante de ambos diferenciales que nos dan los valores de las derivadas z_x y z_y, respectivamente

```
(%i14) zx:coeff(a,del(x),1);
(%i15) zy:coeff(a,del(y),1);
```

$$\Rightarrow \quad z_x = w_r \cos\phi - \frac{1}{r} w_\phi \sin\phi, \quad z_y = w_r \sin\phi + \frac{1}{r} w_\phi \cos\phi$$

o, como $w = z$,

$$z_x = z_r \cos\phi - \frac{1}{r} z_\phi \sin\phi, \quad z_y = z_r \sin\phi + \frac{1}{r} z_\phi \cos\phi$$

A continuación seleccionamos los coeficientes delante de ambos diferenciales que nos dan los valores de las derivadas z_x y z_y, respectivamente

```
(%i14) zx:coeff(a,del(x),1);
(%i15) zy:coeff(a,del(y),1);
```

$$\Rightarrow \quad z_x = w_r \cos\phi - \frac{1}{r} w_\phi \sin\phi, \quad z_y = w_r \sin\phi + \frac{1}{r} w_\phi \cos\phi$$

o, como $w = z$, $$z_x = z_r \cos\phi - \frac{1}{r} z_\phi \sin\phi, \quad z_y = z_r \sin\phi + \frac{1}{r} z_\phi \cos\phi$$

Problema: Escribir el laplaciano de orden dos $z_{xx} + z_{yy} = 0$ en las nuevas variables $x = r\cos(\phi)$, $y = r\sin(\phi)$, $z = w$.

Cambio de variables: derivadas superiores

Recordemos que $z_x = F_1(u, v, w, w_u, w_v)$ y $z_y = F_2(u, v, w, w_u, w_v)$.

Para obtener las expresiones de las $2^{\underline{a}}$ derivadas calculamos $d(z_x)$

$$d(z_x) = [D_u F_1]du + [D_v F_1]dv + [D_w F_1]dw + [D_{w_u} F_1]dw_u + [D_{w_v} F_1]dw_v.$$

y sustituimos en el miembro derecho los valores de las diferenciales de las w, w_u y w_v:

$$dw = w_u du + w_v dv, \quad dw_u = w_{uu} du + w_{vu} dv, \quad dw_v = w_{uv} du + w_{vv} dv$$

Cambio de variables: derivadas superiores

Recordemos que $z_x = F_1(u, v, w, w_u, w_v)$ y $z_y = F_2(u, v, w, w_u, w_v)$.

Para obtener las expresiones de las 2ª derivadas calculamos $d(z_x)$

$$d(z_x) = [D_u F_1]du + [D_v F_1]dv + [D_w F_1]dw + [D_{w_u} F_1]dw_u + [D_{w_v} F_1]dw_v.$$

y sustituimos en el miembro derecho los valores de las diferenciales de las w, w_u y w_v:

$$dw = w_u du + w_v dv, \quad dw_u = w_{uu} du + w_{vu} dv, \quad dw_v = w_{uv} du + w_{vv} dv$$

$$\Downarrow$$

$$d(z_x) = [D_u F_1 + D_w F_1 w_u + D_{w_u} F_1 w_{uu} + D_{w_v} F_1 w_{uv}]du + [\cdots]dv$$

Cambio de variables: derivadas superiores

Recordemos que $z_x = F_1(u, v, w, w_u, w_v)$ y $z_y = F_2(u, v, w, w_u, w_v)$.

Para obtener las expresiones de las 2ª derivadas calculamos $d(z_x)$

$$d(z_x) = [D_u F_1]du + [D_v F_1]dv + [D_w F_1]dw + [D_{w_u} F_1]dw_u + [D_{w_v} F_1]dw_v.$$

y sustituimos en el miembro derecho los valores de las diferenciales de las w, w_u y w_v:

$$dw = w_u du + w_v dv, \quad dw_u = w_{uu} du + w_{vu} dv, \quad dw_v = w_{uv} du + w_{vv} dv$$

$$\Downarrow$$

$$d(z_x) = [D_u F_1 + D_w F_1 w_u + D_{w_u} F_1 w_{uu} + D_{w_v} F_1 w_{uv}]du + [\cdots]dv$$

Luego sustituimos los valores de du y dv en función de las diferenciales antiguas dx y dy calculados antes y obtenemos para $d(z_x)$

$$d(z_x) = [\cdots]dx + [\cdots]dy = z_{xx}dx + z_{xy}dy$$

Cambio de variables: derivadas superiores

Recordemos que $z_x = F_1(u, v, w, w_u, w_v)$ y $z_y = F_2(u, v, w, w_u, w_v)$.

Para obtener las expresiones de las 2ª derivadas calculamos $d(z_x)$

$$d(z_x) = [D_u F_1]du + [D_v F_1]dv + [D_w F_1]dw + [D_{w_u} F_1]dw_u + [D_{w_v} F_1]dw_v.$$

y sustituimos en el miembro derecho los valores de las diferenciales de las w, w_u y w_v:

$$dw = w_u du + w_v dv, \quad dw_u = w_{uu} du + w_{vu} dv, \quad dw_v = w_{uv} du + w_{vv} dv$$

$$\Downarrow$$

$$d(z_x) = [D_u F_1 + D_w F_1 w_u + D_{w_u} F_1 w_{uu} + D_{w_v} F_1 w_{uv}]du + [\cdots]dv$$

Luego sustituimos los valores de du y dv en función de las diferenciales antiguas dx y dy calculados antes y obtenemos para $d(z_x)$

$$d(z_x) = [\cdots]dx + [\cdots]dy = z_{xx}dx + z_{xy}dy$$

Las expresiones $[\cdots]$ y $[\cdots]$ delante de las diferenciales dx y dy son los valores z_{xx} y z_{xy} en las nuevas variables: $z_{xx} = [\cdots]$ y $z_{yy} = [\cdots]$.

Cambio de variables: derivadas de 2º orden con MAXIMA

Cambio de variables: derivadas de 2º orden con MAXIMA

Calculamos el diferencial de $dz_x = z_{xx}dx + z_{xy}dy$

```
(%i16) eqdzx:diff(zx);
```

y sustituimos los diferenciales nuevos dr y $d\phi$ por los antiguos dx y dy

```
(%i17) subst(sol1,eqdzx)$    b:expand(%);
```

Identificamos el coeficiente delante de dx que es igual a z_{xx}

```
(%i19) zxx:coeff(b,del(x),1);
```

Para obtener z_{yy} hacemos lo mismo pero partiendo de z_y:

```
(%i20) subst(sol1,diff(zy))$ c:expand(subst(sol1,eqdzy));
(%i22) zyy:coeff(c,del(y),1);
```

Para terminar calculamos $z_{xx} + z_{yy} = 0$

```
(%i24) expand(trigsimp(zxx+zyy))$ subst(w=z,%);
```

$$\Rightarrow \qquad \boxed{\frac{d^2z}{d\,r^2} + \frac{1}{r}\frac{dz}{d\,r} + \frac{1}{r^2}\frac{d^2z}{d\,\varphi^2} = 0}$$

Cambio de variables

Ejercicio: Encontrar las expresiones en las nuevas variables de la siguiente ecuación $z_{xx} - z_{yy} = 0$, $x = u + v$, $y = u - v$, $z = w$ ...

Cambio de variables

Ejercicio: Encontrar las expresiones en las nuevas variables de la siguiente ecuación $z_{xx} - z_{yy} = 0$, $x = u + v$, $y = u - v$, $z = w$ ...

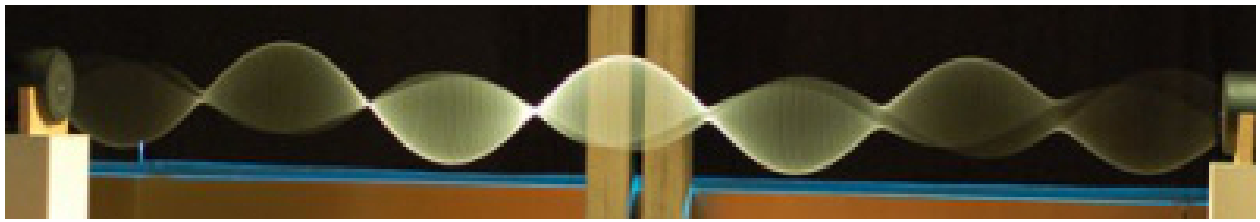
$$z_{xx} - z_{yy} = 0 \iff z_{uv} = 0 \iff z(x, y) = f(x + y) + g(x - y).$$

Cambio de variables

Ejercicio: Encontrar las expresiones en las nuevas variables de la siguiente ecuación $z_{xx} - z_{yy} = 0$, $x = u + v$, $y = u - v$, $z = w$ ...

$$z_{xx} - z_{yy} = 0 \iff z_{uv} = 0 \iff z(x,y) = f(x+y) + g(x-y).$$

Volvamos al primer día de clases: **la ecuación de la cuerda vibrante**



La solución geberal de la ecuación de ondas $\dfrac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2} = v^2 \dfrac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2}$ es

$y(x,y) = \phi(x+vt) + \psi(x-vt)$ donde v es la **velocidad** de propagación de la onda y ϕ y ψ son **funciones cualesquiera** con derivadas parciales de orden 2.

La ecuación de ondas

Este problema lo trató detalladamente Jean Bernulli (en 1727), su hijo Daniel Bernoulli (en 1733) y Leonard Euler (en 1736). Pero fue Jean d'Alembert quien en 1746 encontró la solución general.

De izquierda a derecha: J. Bernoulli, D. Bernoulli, Euler y d'Alembert.

Este problema lo trató detalladamente Jean Bernulli (en 1727), su hijo Daniel Bernoulli (en 1733) y Leonard Euler (en 1736). Pero fue Jean d'Alembert quien en 1746 encontró la solución general.

De izquierda a derecha: J. Bernoulli, D. Bernoulli, Euler y d'Alembert.

En 1753 D. Bernoulli afirmó que la solución general era la serie infinita

$$y(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m \sin\frac{m\pi x}{l}\cos\frac{m\pi at}{l} \Rightarrow y(x,0) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m \sin\frac{m\pi x}{l}$$

i.e., una función $f(x) = y(x,0)$ **cualquiera** ha de poder representarse en un intervalo como una **serie trigonométrica infinita**.

Cambio de variables

Ejercicio: Encontrar las expresiones en las nuevas variables de la siguiente ecuación: $z_{xx} - z_y = 0$, con $x = -u/v$, $y = -1/v$, $z = \sqrt{-v}e^{u^2/(4v)}w$

Cambio de variables

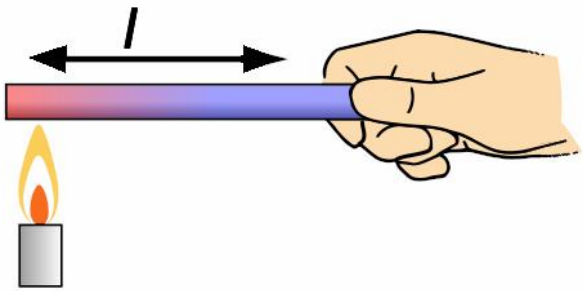
Ejercicio: Encontrar las expresiones en las nuevas variables de la siguiente ecuación: $z_{xx} - z_y = 0$, con $x = -u/v$, $y = -1/v$, $z = \sqrt{-v}e^{u^2/(4v)}w$

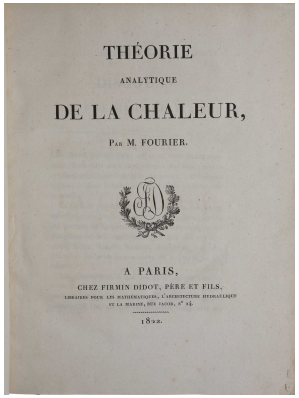
$w_{uu} - w_v = 0 \Longleftrightarrow$ como $z = 1$ es solución, entonces $w = e^{-u^2/(4v)}/\sqrt{-v}$ es solución de la ecuación del calor.

Ejercicio: Encontrar las expresiones en las nuevas variables de la siguiente ecuación: $z_{xx} - z_y = 0$, con $x = -u/v$, $y = -1/v$, $z = \sqrt{-v}e^{u^2/(4v)}w$

$w_{uu} - w_v = 0 \iff$ como $z = 1$ es solución, entonces $w = e^{-u^2/(4v)}/\sqrt{-v}$ es solución de la ecuación del calor.

Volvamos al primer día de clases: **la ecuación del calor**





Joseph Fourier y la portada de *Théorie analytique de la chaleur*

En una dimensión la ecuación que describe la propagación del calor es

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$$

Para resolver la Ec. del calor Fourier utilizó el método de separación de variables de d'Alembert. La idea es suponer que la solución admite una representación de la forma

$$u(x,t) = X(x)T(t), \qquad X(x) \not\equiv 0, \quad T(t) \not\equiv 0,$$

lo que le llevó a la solución

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\frac{a^2\pi^2 n^2 t}{l^2}} \sin\frac{n\pi x}{l}.$$

Si $t = 0$ entonces, la condición *inicial* $u(x,0) = f(x)$ nos lleva a la fórmula

$$u(x,0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\frac{n\pi x}{l}.$$

Para resolver la Ec. del calor Fourier utilizó el método de separación de variables de d'Alembert. La idea es suponer que la solución admite una representación de la forma

$$u(x,t) = X(x)T(t), \qquad X(x) \not\equiv 0, \quad T(t) \not\equiv 0,$$

lo que le llevó a la solución

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\frac{a^2\pi^2 n^2 t}{l^2}} \sin\frac{n\pi x}{l}.$$

Si $t = 0$ entonces, la condición *inicial* $u(x,0) = f(x)$ nos lleva a la fórmula

$$u(x,0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\frac{n\pi x}{l}. \quad \textbf{¿Os suena?}$$

Para resolver la Ec. del calor Fourier utilizó el método de separación de variables de d'Alembert. La idea es suponer que la solución admite una representación de la forma

$$u(x,t) = X(x)T(t), \qquad X(x) \not\equiv 0, \quad T(t) \not\equiv 0,$$

lo que le llevó a la solución

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\frac{a^2\pi^2 n^2 t}{l^2}} \sin\frac{n\pi x}{l}.$$

Si $t = 0$ entonces, la condición *inicial* $u(x,0) = f(x)$ nos lleva a la fórmula

$$u(x,0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\frac{n\pi x}{l}. \quad \textbf{¿Os suena?}$$

Pero Fourier fue a más ...

Fourier usa un ingenioso método para encontrar la forma de los coeficientes

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{l}$$

Fourier usa un ingenioso método para encontrar la forma de los coeficientes

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{l} \quad \Big| \quad \times \sin \frac{m\pi x}{l} \quad +$$

Fourier usa un ingenioso método para encontrar la forma de los coeficientes

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{l} \quad \Big| \quad \times \sin \frac{m\pi x}{l} \quad + \quad \int_0^l \ldots dx$$

$$\int_0^l f(x) \sin \frac{m\pi x}{l} dx = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_0^l \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{m\pi x}{l} dx = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{l}{2} \delta_{n,m} \Rightarrow$$

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(s) \sin \frac{n\pi s}{l} ds$$

¡Habían nacido las Series de Fourier!

Fourier usa un ingenioso método para encontrar la forma de los coeficientes

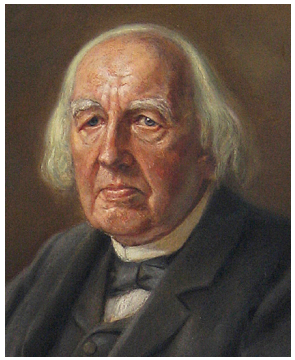
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{l} \quad \Big| \quad \times \sin \frac{m\pi x}{l} \quad + \quad \int_0^l \ldots dx$$

$$\int_0^l f(x) \sin \frac{m\pi x}{l} dx = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_0^l \sin \frac{n\pi x}{l} \sin \frac{m\pi x}{l} dx = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{l}{2} \delta_{n,m} \Rightarrow$$

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(s) \sin \frac{n\pi s}{l} ds$$

¡Habían nacido las Series de Fourier! y con ellas cambiaron las matemáticas para siempre:

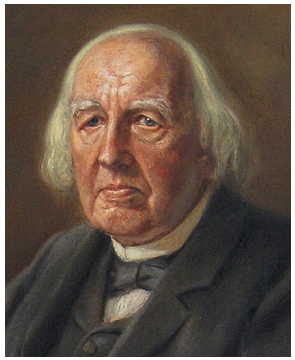
Las series de Fourier ...



De izq. a der.: Dirichlet, Weierstrass,

1. Hubo que **revisar** a fondo el **concepto de función** y el de convergencia (Dirichlet, Weierstrass, ...)

Las series de Fourier ...



De izq. a der.: Dirichlet, Weierstrass, Riemann, Lebesgue,

1. Hubo que **revisar** a fondo el **concepto de función** y el de convergencia (Dirichlet, Weierstrass, ...)

2. Desarrollar la **teoría de integración**: Riemman, Lebesgue, ...

Las series de Fourier ...

De izq. a der.: Dirichlet, Weierstrass, Riemann, Lebesgue, Cantor y Dedekind

1. Hubo que **revisar** a fondo el **concepto de función** y el de convergencia (Dirichlet, Weierstrass, ...)

2. Desarrollar la **teoría de integración**: Riemman, Lebesgue, ...

3. **Inventar** la **teoría de conjuntos** (Cantor, Dedekind, ...)

De izq. a der.: Dirichlet, Weierstrass, Riemann, Lebesgue, Cantor y Dedekind

❶ Hubo que **revisar** a fondo el **concepto de función** y el de convergencia (Dirichlet, Weierstrass, . . .)

❷ Desarrollar la **teoría de integración**: Riemman, Lebesgue, . . .

❸ **Inventar** la **teoría de conjuntos** (Cantor, Dedekind, . . .)

❹ La unicidad de la SF llevó a Cantor a la teoría de conjuntos y a los **números transfinitos**: la primera vez que los matemáticos se enfrentaban al ∞ *de facto*

Pero ¿y a quién se le ocurre ese cambio de variable?

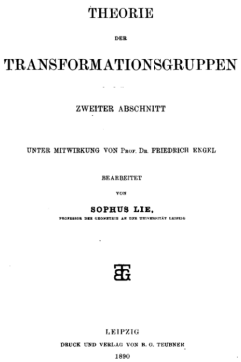
Pero ¿y a quién se le ocurre ese cambio de variable?

A **Sophus Lie**: estudió las transformaciones que dejan invariantes las ecuaciones diferenciales y descubrió lo que hoy llamamos **grupos de Lie** ...

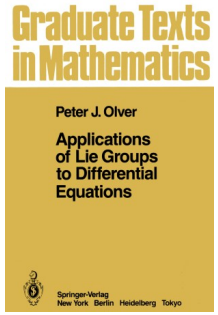
Sophus Lie, la portada de *Theorie Der Transformationsgruppen*

Pero ¿y a quién se le ocurre ese cambio de variable?

A **Sophus Lie**: estudió las transformaciones que dejan invariantes las ecuaciones diferenciales y descubrió lo que hoy llamamos **grupos de Lie** ...



Sophus Lie, la portada de *Theorie Der Transformationsgruppen*

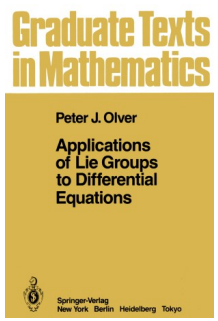


RAN's TFM en la Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова (Universidad Estatal de Moscú "*Lomonosov*", Rusia)

Pero ¿y a quién se le ocurre ese cambio de variable?

A **Sophus Lie**: estudió las transformaciones que dejan invariantes las ecuaciones diferenciales y descubrió lo que hoy llamamos **grupos de Lie** ...

Sophus Lie, la portada de *Theorie Der Transformationsgruppen*



RAN's TFM en la Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова (Universidad Estatal de Moscú "*Lomonosov*", Rusia)

Lie G. & Ec. Dif.=***irresistible*** ♡ mezcla de **Álgebra**, **Geometría** y **Análisis** ☻

Para terminar nuestro curso: J. von Neumann, *The Mathematician 1947*

Creo que es una aproximación relativamente buena a la verdad, que es demasiado complicada para permitir algo más que aproximaciones, ***que las ideas matemáticas se originan de la experiencia****, aunque la genealogía a veces es larga y oscura.*

Para terminar nuestro curso: J. von Neumann, *The Mathematician 1947*

Creo que es una aproximación relativamente buena a la verdad, que es demasiado complicada para permitir algo más que aproximaciones, ***que las ideas matemáticas se originan de la experiencia****, aunque la genealogía a veces es larga y oscura. Pero una vez concebidas, estas comienzan a vivir una* ***peculiar vida propia****, gobernadas por motivaciones casi totalmente estéticas, y es mejor compararlas a lo creativo que con cualquier otra cosa y, en particular, con una ciencia empírica.*

Para terminar nuestro curso: J. von Neumann, *The Mathematician 1947*

Creo que es una aproximación relativamente buena a la verdad, que es demasiado complicada para permitir algo más que aproximaciones, ***que las ideas matemáticas se originan de la experiencia****, aunque la genealogía a veces es larga y oscura. Pero una vez concebidas, estas comienzan a vivir una* ***peculiar vida propia****, gobernadas por motivaciones casi totalmente estéticas, y es mejor compararlas a lo creativo que con cualquier otra cosa y, en particular, con una ciencia empírica.*

Cuando una disciplina está durante una segunda y tercera generación inspirada sólo indirectamente por las ideas que proceden de la realidad, está ***amenazada por graves peligros****. Se convierte cada vez más en el "arte por el arte". Esto* ***no es necesariamente malo*** *si la disciplina está bajo la influencia de* ***hombres con un criterio extraordinariamente bien desarrollado****.*

Para terminar nuestro curso: J. von Neumann, *The Mathematician 1947*

Creo que es una aproximación relativamente buena a la verdad, que es demasiado complicada para permitir algo más que aproximaciones, ***que las ideas matemáticas se originan de la experiencia****, aunque la genealogía a veces es larga y oscura. Pero una vez concebidas, estas comienzan a vivir una* ***peculiar vida propia****, gobernadas por motivaciones casi totalmente estéticas, y es mejor compararlas a lo creativo que con cualquier otra cosa y, en particular, con una ciencia empírica.*

Cuando una disciplina está durante una segunda y tercera generación inspirada sólo indirectamente por las ideas que proceden de la realidad, está ***amenazada por graves peligros****. Se convierte cada vez más en el "arte por el arte". Esto* ***no es necesariamente malo*** *si la disciplina está bajo la influencia de* ***hombres con un criterio extraordinariamente bien desarrollado****.*

Siempre que se alcance este punto, **me parece que el único remedio es el retorno rejuvenecedor a la fuente***, la reinyección de ideas más o menos directamente empíricas.*