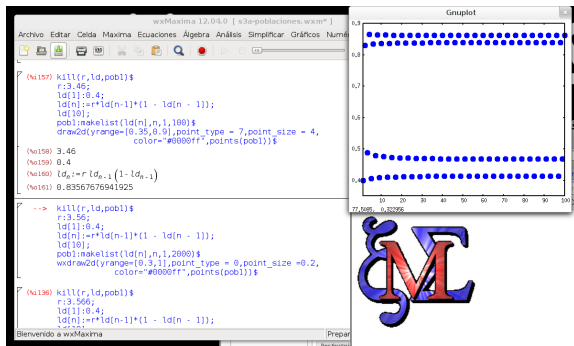


CÁLCULO DIFERENCIAL EN \mathbb{R}^n con MAXIMA

Grado en Matemáticas

Renato Álvarez-Nodarse

<https://renato.ryn-fismat.es/clases.html>



MAXIMA: programa simbólico/numérico con con licencia GNU/GPL accesibles por internet en

- <http://maxima.sourceforge.net>

Como intérprete de MAXIMA usaremos wxMAXIMA

Buscar el icono  para comenzar

MAXIMA es un programa que funciona como una calculadora científica. Las operaciones aritméticas elementales son las habituales: + suma, - resta, * multiplicación, / división, ^ potencias:

```
(%i1) 2+2; 3-3; 2*3; 5/10; 3^3;
```

```
(%o1) 4
```

```
(%o2) 0
```

```
(%o3) 6
```

```
(%o4) 1/2
```

```
(%o5) 27
```

MAXIMA es un programa que funciona como una calculadora científica. Las operaciones aritméticas elementales son las habituales: + suma, - resta, * multiplicación, / división, ^ potencias:

```
(%i1) 2+2; 3-3; 2*3; 5/10; 3^3;
```

```
(%o1) 4
```

```
(%o2) 0
```

```
(%o3) 6
```

```
(%o4) 1/2
```

```
(%o5) 27
```

Dado que MAXIMA es un programa de cálculo *simbólico*, trabaja con variables definidas por letras:

```
(%i6) e;
```

```
(%o6) e
```

Las funciones (comandos) tienen el argumento (o los argumentos) que van entre paréntesis, como por ejemplo el comando `float(x)` que nos da como resultado el valor numérico de la variable x .

```
(%i7) float(e);  
(%o7) e  
(%i8) pi;  
(%o8) pi  
(%i9) float(pi);  
(%o9) pi
```

por lo que su respuesta es la propia variable.

Para los valores numéricos de las constantes e o π MAXIMA usa

```
(%i10) %e;  
(%o10) %e  
(%i11) float(%e);  
(%o11) 2.718281828459045
```

El orden de realización de las operaciones es el habitual. Así en la expresión

```
(%i18) (2+3^2)^3*(5+2^2);
```

```
(%o18) 11979
```

primero calcula las potencias dentro de cada paréntesis, luego las sumas, luego las potencias externas y finalmente la multiplicación.

El orden de realización de las operaciones es el habitual. Así en la expresión

```
(%i18) (2+3^2)^3*(5+2^2);
```

```
(%o18) 11979
```

primero calcula las potencias dentro de cada paréntesis, luego las sumas, luego las potencias externas y finalmente la multiplicación.

Para definir los valores de las variables se usan los dos puntos

```
(%i19) x:123; y:321; x*y; x/y; x-y;
```

```
(%i26) z=2;
```

```
(%i27) z;
```

```
(%i28) x;
```

```
(%i29) y;
```

```
(%i30) x*y;
```

```
(%i31) x+z;
```


También es posible definir funciones. Hay múltiples formas en función de lo queramos hacer.

```
(%i32) f(x) := x^2 - x + 1;
```

```
(%i33) f(%pi);
```

Nótese que a no ser que pidamos a `MAXIMA` que trabaje numéricamente, sigue usando cálculo simbólico

```
(%i35) float(f(%pi));
```

También es posible definir funciones. Hay múltiples formas en función de lo queramos hacer.

```
(%i32) f(x) := x^2 - x + 1;
```

```
(%i33) f(%pi);
```

Nótese que a no ser que pidamos a MAXIMA que trabaje numéricamente, sigue usando cálculo simbólico

```
(%i35) float(f(%pi));
```

Otro detalle interesante a tener en cuenta es que MAXIMA contiene una ayuda completa que puede ser invocada desde la línea de comandos. Para ello escribimos ?? delante del comando *desconocido*

```
(%i36) ??float;
```

Si no existe ningún comando con ese nombre la respuesta es false

```
(%i37) ??renato;
```

Otra de las opciones de MAXIMA es su potencia gráfica. Para hacer las gráficas MAXIMA usa GNUPLOT, un potente paquete gráfico GNU. El comando más sencillo de usar es `plot2d`.

```
(%i39) wxplot2d([f(x)], [x,-5,5]);
```

Es conveniente asegurarse que variable x no tiene asignado ningún valor **!o da un error!**

Otra de las opciones de MAXIMA es su potencia gráfica. Para hacer las gráficas MAXIMA usa GNUPLOT, un potente paquete gráfico GNU. El comando más sencillo de usar es `plot2d`.

```
(%i39) wxplot2d([f(x)], [x,-5,5]);
```

Es conveniente asegurarse que variable x no tiene asignado ningún valor **!oda un error!** Podemos representar varias funciones

```
(%i41) plot2d([f(xx),2*sin(xx),atan(xx)], [xx,-2,2])$
```

MAXIMA también dispone de una gran cantidad de funciones *elementales*, **exponencial**, **logaritmo**, **trigonométricas**, etc. Además las trata de forma simbólica.

```
(%i42) log(10);
```

```
(%i43) float(%);
```

```
(%i44) log(%e);
```

```
(%i45) 15!; factor(%);
```

Otra de las opciones de MAXIMA es su potencia gráfica. Para hacer las gráficas MAXIMA usa GNUPLOT, un potente paquete gráfico GNU. El comando más sencillo de usar es `plot2d`.

```
(%i39) wxplot2d([f(x)], [x,-5,5]);
```

Es conveniente asegurarse que variable x no tiene asignado ningún valor **!o da un error!** Podemos representar varias funciones

```
(%i41) plot2d([f(xx), 2*sin(xx), atan(xx)], [xx,-2,2])$
```

MAXIMA también dispone de una gran cantidad de funciones *elementales*, **exponencial**, **logaritmo**, **trigonométricas**, etc. Además las trata de forma simbólica.

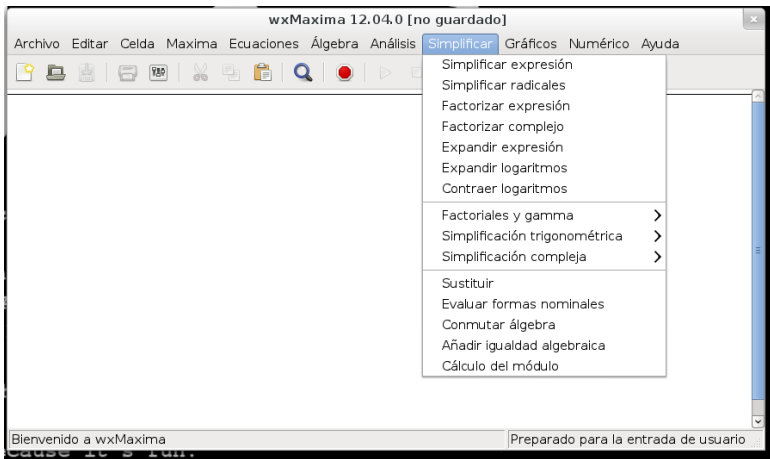
```
(%i42) log(10);
```

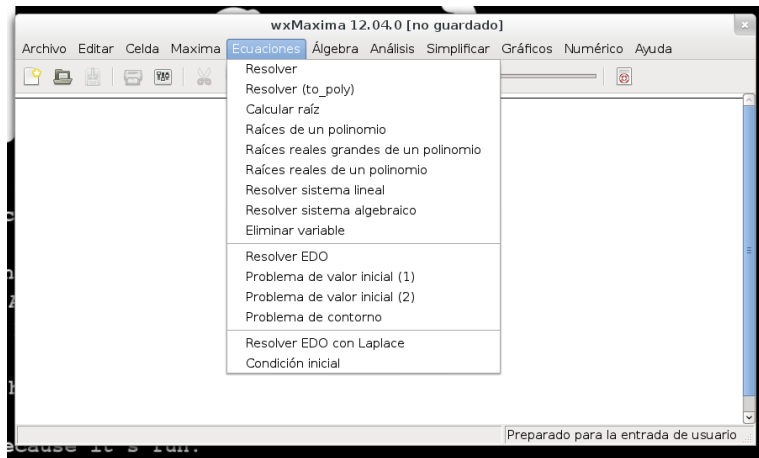
```
(%i43) float(%);
```

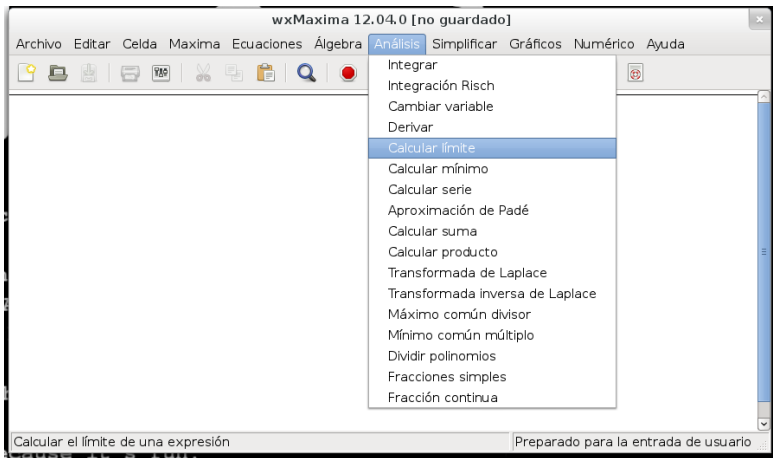
```
(%i44) log(%e);
```

```
(%i45) 15!; factor(%);
```

¿Qué más podemos hacer?







¡Y un sinfín de cosas más!

En la web de la asignatura buscar el apartado: Software Libre de Matemáticas

<https://renato.ryn-fismat.es/clases.html#maxima>

Cálculo diferencial con Maxima

Resolviendo ecuaciones:

(%i47) solve($x^2 - a^2 - 4$, x);

También se puede resolver respecto a la variable a (hazlo como ejercicio).

Resolviendo ecuaciones:

```
(%i47) solve(x^2-a^2-4,x);
```

También se puede resolver respecto a la variable a (hazlo como ejercicio).

```
(%i48) solve(x^2=-1);
```

```
(%i49) solve(x^5=1,x);
```

```
(%i50) rectform(%);
```

Ejercicio: Resuelve la ecuación $x^n = 1$ para $n \in \mathbb{N}$ cualquiera.

Resolviendo ecuaciones:

```
(%i47) solve(x^2-a^2-4,x);
```

También se puede resolver respecto a la variable a (hazlo como ejercicio).

```
(%i48) solve(x^2=-1);
```

```
(%i49) solve(x^5=1,x);
```

```
(%i50) rectform(%);
```

Ejercicio: Resuelve la ecuación $x^n = 1$ para $n \in \mathbb{N}$ cualquiera.

```
(%i51) solve(x^n=1,x);
```

```
"Is "n" an "integer"?" y;
```

```
(%o51) [x=1]
```

Pero ¿y las demás soluciones?

Resolviendo ecuaciones:

```
(%i47) solve(x^2-a^2-4,x);
```

También se puede resolver respecto a la variable a (hazlo como ejercicio).

```
(%i48) solve(x^2=-1);
```

```
(%i49) solve(x^5=1,x);
```

```
(%i50) rectform(%);
```

Ejercicio: Resuelve la ecuación $x^n = 1$ para $n \in \mathbb{N}$ cualquiera.

```
(%i51) solve(x^n=1,x);
```

```
"Is "n" an "integer"?" y;
```

```
(%o51) [x=1]
```

Pero ¿y las demás soluciones? Intenta “adivinarlas” a partir de los casos $n = 2, 3, 4, 5, 6, 7$.

Calculando límites:

```
(%i52) limit(sin(a*x)/x,x,0);
```

Cuidado con los infinitos:

```
(%i53) limit(exp(1/(1-x)),x,1);
```

```
(%o53) und
```

```
(%i54) limit(exp(1/(1-x)),x,1,plus);
```

```
(%o54) 0
```

```
(%i55) limit(exp(1/(1-x)),x,1,minus);
```

```
(%o55) inf
```

Prueba con $\lim_{x \rightarrow 0} \log(x)$.

Calculando límites:

```
(%i52) limit(sin(a*x)/x,x,0);
```

Cuidado con los infinitos:

```
(%i53) limit(exp(1/(1-x)),x,1);
```

```
(%o53) und
```

```
(%i54) limit(exp(1/(1-x)),x,1,plus);
```

```
(%o54) 0
```

```
(%i55) limit(exp(1/(1-x)),x,1,minus);
```

```
(%o55) inf
```

Prueba con $\lim_{x \rightarrow 0} \log(x)$.

MAXIMA **no sabe calcular límites en dos variables:**

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2} = ??? \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2y}{x^2 + y^2} = ???$$

Calculando límites:

```
(%i52) limit(sin(a*x)/x,x,0);
```

Cuidado con los infinitos:

```
(%i53) limit(exp(1/(1-x)),x,1);
```

```
(%o53) und
```

```
(%i54) limit(exp(1/(1-x)),x,1,plus);
```

```
(%o54) 0
```

```
(%i55) limit(exp(1/(1-x)),x,1,minus);
```

```
(%o55) inf
```

Prueba con $\lim_{x \rightarrow 0} \log(x)$.

MAXIMA **no sabe calcular límites en dos variables:**

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2} = ??? \quad \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2y}{x^2 + y^2} = ??? \quad \text{¿qué hacer?}$$

Calculando derivadas. El comando para calcular derivadas es `diff(f(x), x, k)`, donde $f(x)$ es la función a la que le vamos a calcular la derivada k -ésima respecto a la variable x :

```
(%i56) diff(sin(x^2+2), x);
```

```
(%o56) 2*x*cos(x^2+2)
```

```
(%i57) diff(x^x, x, 3);
```

```
(%o57) x^(x-1)*(log(x)+(x-1)/x)+x^x*(log(x)+1)^3  
      +2*x^(x-1)*(log(x)+1)
```

Calculando derivadas. El comando para calcular derivadas es `diff(f(x), x, k)`, donde $f(x)$ es la función a la que le vamos a calcular la derivada k -ésima respecto a la variable x :

```
(%i56) diff(sin(x^2+2), x);  
(%o56) 2*x*cos(x^2+2)  
(%i57) diff(x^x, x, 3);  
(%o57) x^(x-1)*(log(x)+(x-1)/x)+x^x*(log(x)+1)^3  
      +2*x^(x-1)*(log(x)+1)
```

Veamos que podemos hacer en \mathbb{R}^n .

```
(%i58) f(x,y):=(x^2*y)/(x^2+y^2);  
(%i59) diff(f(x,y), x);  
(%i60) factor(%);  
(%i61) diff(f(x,y), y);  
(%i62) diff(f(x,y));
```

MAXIMA también dibuja gráficas 3D con el comando `plot3d` cuya sintaxis es

```
plot3d([fun1,fun2,...],[var1,ini,fin],[var2,ini,fin],...)
```

```
(%i62) kill(f,x,y)$  
      f(x,y):= sin(x) + cos(y);  
      wxplot3d(f(x,y), [x,-5,5], [y,-5,5])$
```

MAXIMA también dibuja gráficas 3D con el comando `plot3d` cuya sintaxis es

```
plot3d([fun1,fun2,...],[var1,ini,fin],[var2,ini,fin],...)
```

```
(%i62) kill(f,x,y)$  
      f(x,y):= sin(x) + cos(y);  
      wxplot3d(f(x,y), [x,-5,5], [y,-5,5])$
```

Para que MAXIMA reconozca el directorio local de trabajo (lo que es conveniente para importar y exportar ficheros) es conveniente definir la variable `file_search_maxima`.

La forma más sencilla de definirlo es mediante la opción “Añadir a ruta” en la pestaña “Maxima” del menú del programa.

Cálculo diferencial de funciones de varias variables

► Estudiar la función $f(x, y) = \frac{xy}{y^2 + x^2}$

```
(%i63) f(x,y):=if x^2+y^2=0 then 0 else x*y/(y^2+x^2);  
(%i64) f(0,0); f(2,1);  
(%i66) draw3d(enhanced3d=false, xu_grid=50, color=gray50,  
explicit(f(x,y), x,-.1,.1,y,-.1,.1),  
point_type=filled_circle, point_size=1, color=black,  
points([[0,0,0]]))$
```

► Estudiar la función $f(x, y) = \frac{xy}{y^2 + x^2}$

```
(%i63) f(x,y):=if x^2+y^2=0 then 0 else x*y/(y^2+x^2);
(%i64) f(0,0); f(2,1);
(%i66) draw3d(enhanced3d=false, xu_grid=50, color=gray50,
explicit(f(x,y), x,-.1,.1,y,-.1,.1),
point_type=filled_circle, point_size=1, color=black,
points([[0,0,0]]))$
```

► Estudiar $f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{y^2 + x^2}$ y $g(x, y) = \frac{y^4}{x^2 + y^2}$.

- ▶ Estudiar la función $f(x, y) = \frac{xy}{y^2 + x^2}$

```
(%i63) f(x,y):=if x^2+y^2=0 then 0 else x*y/(y^2+x^2);
(%i64) f(0,0); f(2,1);
(%i66) draw3d(enhanced3d=false, xu_grid=50, color=gray50,
explicit(f(x,y), x,-.1,.1,y,-.1,.1),
point_type=filled_circle, point_size=1, color=black,
points([[0,0,0]]))$
```

- ▶ Estudiar $f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{y^2 + x^2}$ y $g(x, y) = \frac{y^4}{x^2 + y^2}$.

- ▶ Estudia la función $f(x, y) = \arctan\left(\frac{y^4 + x^4}{y^2 + x^2}\right)$.

► Estudiar la función $f(x, y) = \frac{xy}{y^2 + x^2}$

```
(%i63) f(x,y):=if x^2+y^2=0 then 0 else x*y/(y^2+x^2);
(%i64) f(0,0); f(2,1);
(%i66) draw3d(enhanced3d=false, xu_grid=50, color=gray50,
explicit(f(x,y), x,-.1,.1,y,-.1,.1),
point_type=filled_circle, point_size=1, color=black,
points([[0,0,0]]))$
```

► Estudiar $f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{y^2 + x^2}$ y $g(x, y) = \frac{y^4}{x^2 + y^2}$.

► Estudia la función $f(x, y) = \arctan\left(\frac{y^4 + x^4}{y^2 + x^2}\right)$.

En todos los casos calcula las derivadas parciales.

Problema: Sea la función $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$, $y \neq 0$ y $x \cdot y \neq 1$

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} f_1(x, y) \\ f_2(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \arctan\left(\frac{y+x}{1-xy}\right) \\ \tan\left(\frac{x^2}{y}\right) \end{pmatrix}$$

Calcula la matriz diferencial y evalúala en $(x, y) = (\sqrt{\pi}, 1)$.

Problema: Sea la función $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$, $y \neq 0$ y $x \cdot y \neq 1$

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} f_1(x, y) \\ f_2(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \arctan\left(\frac{y+x}{1-xy}\right) \\ \tan\left(\frac{x^2}{y}\right) \end{pmatrix}$$

Calcula la matriz diferencial y evalúala en $(x, y) = (\sqrt{\pi}, 1)$.

Problema: Sea la función $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^2$

$$g(x, y) = \begin{pmatrix} g_1(x, y) \\ g_2(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \log(1 + x^2 + y^2 + 2z^4) \\ \tanh(x^2 - yz); \end{pmatrix}$$

Calcula la matriz jacobiana (diferencial)

Problema: Sea la función $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2y^3$. Representarla gráficamente. Calcular sus derivadas parciales y la matriz jacobiana. Calcular la derivada direccional en el punto $a = (1, 3)$ según el vector $v = (2, -1)$.

Problema: Sea la función $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2y^3$. Representarla gráficamente. Calcular sus derivadas parciales y la matriz jacobiana. Calcular la derivada direccional en el punto $a = (1, 3)$ según el vector $v = (2, -1)$.

► Primero definimos las normas en \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3

```
(%i1) define(norm2(vv), sqrt(sum(vv[k]^2, k, 1, 2)));  
       define(norm3(vv), sqrt(sum(vv[k]^2, k, 1, 3)));
```

Luego definimos la función

```
(%i3) kill(f, a, b, c, v1, v2)$  
(%i4) define(f(x, y), x^2*y^3);
```

Calculamos las derivadas parciales

```
(%i5) diff(f(x, y), x); diff(f(x, y), y);
```

Calculamos la matriz jacobiana

```
(%i7) gra:jacobian([f(x, y)], [x, y]);
```

Definimos el vector normalizado $u = v/\|v\|$

```
(%i8) v1:2$ v2:-1$ v:[v1,v2]$  
      vec:v/norm2(v);
```

Calculamos la derivada direccional de f según u en el punto a ; $D_u f(a) = \langle \nabla f(a), u \rangle$

```
(%i16) a:1$ b:2$ c:f(a,b)$  
      Du:gra.vec; /* Multiplicación de matrices */  
      ev(Du,x=a,y=b);
```

Finalmente representamos a $f(x, y)$

```
(%i17) draw3d( enhanced3d=false, xu_grid=50, color=green,  
              explicit(f(x,y),x,a-2,a+2,y,b-2,b+2),  
              point_type=filled_circle, point_size=2,  
              color=midnight_blue, points([[a,b,f(a,b)]]),  
              head_angle=20,head_length=0.1,  
              vector([a,b,c],[v1,v2,0]))$
```

1. Calcula la derivada de f en a según la dirección v . Dibuja la variación de f en a según el vector v y compáralo con la variación en la dirección de gradiente de f .

$$\textcircled{1} f(x, y) = \sin\left(\frac{y^2 + x^2}{1 + x^2 + y^2}\right)$$

$$\textcircled{2} f(x, y) = (x^2 + y^2)^x; a = (e, 0); v = (1, -1).$$

$$\textcircled{3} f(x, y, z) = (x/y)^z; a = (1, 1, 1); v = (2, 1, -1).$$

$$\textcircled{4} f(x, y) = xe^{xy}; a = (1, -1); v = (1, 1).$$

Dibujando los planos tangentes

```
(%i1) kill(all)$ load(draw)$
```

Escojamos un ejemplo sencillo: $f(x,y) = 1 - (x^2 + y^2)$

```
(%i2) define(f(x,y),1-(x^2+y^2));
```

```
(%i3) define(dx f(x,y),diff(f(x,y),x));  
      define(dy f(x,y),diff(f(x,y),y));
```

Escribimos la ecuación del plano y dibujamos

```
(%i5) a:-1$ b:1$ xmin:a-1$ xmax:a+1$ ymin:b-1$ ymax:b+1$  
      z=f(a,b)+dx f(a,b)*(x-a)+dy f(a,b)*(y-b);
```

```
define(plano(x,y), f(a,b)+dx f(a,b)*(x-a)+dy f(a,b)*(y-b));
```

```
(%i12) draw3d(proportional_axes='xyz, color=blue, xu_grid=25,  
explicit(f(x,y),x,xmin-1,xmax+1,y,ymin-1,ymax+1), color=cyan,  
parametric_surface(x,y,plano(x,y),x,xmin,xmax,y,ymin,ymax),  
point_type=filled_circle, point_size =1,color = black,  
points([[a,b,f(a,b)]]), head_angle = 20,head_length = 0.1,  
vector([a,b,c],vn) )$
```

Ejercicio: Encontrar los planos tangente en los puntos dados de las funciones siguientes y representarlos gráficamente:

① $f(x, y) = \arctan(x^2 + y^2)$ en $a = (0, 1)$;

② $f(x, y) = (x^2 + y^2) \sin(x^2 + y^2)$ en $(0, 0)$ y $(\sqrt{\pi}, 0)$.

③ $f(x, y) = \exp(-x^2 - y^2)$ en $(0, 0)$ y $(1/2, -1/2)$.

Ejercicio: Encontrar los planos tangente en los puntos dados de las funciones siguientes y representarlos gráficamente:

① $f(x, y) = \arctan(x^2 + y^2)$ en $a = (0, 1)$;

② $f(x, y) = (x^2 + y^2) \sin(x^2 + y^2)$ en $(0, 0)$ y $(\sqrt{\pi}, 0)$.

③ $f(x, y) = \exp(-x^2 - y^2)$ en $(0, 0)$ y $(1/2, -1/2)$.

④ $f(x, y) = \frac{x^2 y^2}{y^2 + x^2}$ en $a = (-1, 1)$;

⑤ $f(x, y) = x^2/2 - y^2$ en $a = (2, 1)$;

Ejemplo 1: Estudia la $f(x, y) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2}\right), & \text{si } (x, y) \neq (0, 0); \\ 0, & \text{si } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$

- ▶ Decide si es continua y diferenciable en \mathbb{R}^2 .
- ▶ Decide si $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$.
- ▶ Calcula $D_{12}f(0, 0)$ y $D_{21}f(0, 0)$.
- ▶ Decide si $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$.

Ejemplo 2: Sea la función definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \operatorname{sen} \frac{1}{2} \left(\frac{x - y}{x + y} \right), & \text{si } x + y \neq 0; \\ 0, & \text{si } x + y = 0 \end{cases}$$

- ▶ Estudia la continuidad y diferenciableidad de esta función.
- ▶ Calcula $D_{12}f(0, 0)$ y $D_{21}f(0, 0)$.