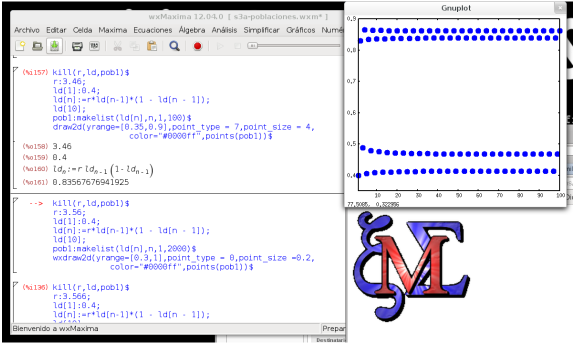
CÁLCULO DIFERENCIAL EN $\mathbb{R}^n$ con MAXIMA

Grado en Matemáticas

Renato Álvarez-Nodarse
Universidad de Sevilla

https://renato.ryn-fismat.es/clases.html

El software: MAXIMA



MAXIMA: programa simbólico/numérico con con licencia GNU/GPL accesibles por internet en

- `http://maxima.sourceforge.net`

Como intértprete de MAXIMA usaremos wxMAXIMA

Buscar el icono para comenzar

MAXIMA es un programa que funciona como una calculadora científica. Las operaciones aritméticas elementales son las habituales: $+$ suma, $-$ resta, $*$ multiplicación, $/$ división, ^ potencias:

```
(%i1) 2+2; 3-3; 2*3; 5/10; 3^3;
(%o1) 4
(%o2) 0
(%o3) 6
(%o4) 1/2
(%o5) 27
```

MAXIMA es un programa que funciona como una calculadora científica. Las operaciones aritméticas elementales son las habituales: $+$ suma, $-$ resta, $*$ multiplicación, $/$ división, ^ potencias:

```
(%i1) 2+2; 3-3; 2*3; 5/10; 3^3;
(%o1) 4
(%o2) 0
(%o3) 6
(%o4) 1/2
(%o5) 27
```

Dado que MAXIMA es un programa de cálculo *simbólico*, trabaja con variables definidas por letras:

```
(%i6) e;
(%o6) e
```

Las funciones (comandos) tienen el argumento (o los argumentos) que van entre paréntesis, como por ejemplo el comando `float(x)` que nos da como resultado el valor numérico de la variable x.

```
(%i7) float(e);
(%o7) e
(%i8) pi;
(%o8) pi
(%i9) float(pi);
(%o9) pi
```

por lo que su respuesta es la propia variable.
Para los valores numéricos de las constantes e o π MAXIMA usa

```
(%i10) %e;
(%o10) %e
(%i11) float(%e);
(%o11) 2.718281828459045
```

El orden de realización de las operaciones es el habitual. Así en la expresión

```
(%i18) (2+3^2)^3*(5+2^2);
(%o18) 11979
```

primero calcula las potencias dentro de cada paréntesis, luego las sumas, luego las potencias externas y finalmente la multiplicación.

El orden de realización de las operaciones es el habitual. Así en la expresión

```
(%i18) (2+3^2)^3*(5+2^2);
(%o18) 11979
```

primero calcula las potencias dentro de cada paréntesis, luego las sumas, luego las potencias externas y finalmente la multiplicación.

Para definir los valores de las variables se usan los dos puntos

```
(%i19) x:123; y:321; x*y; x/y; x-y;
```

```
(%i26) z=2;
(%i27) z;
(%i28) x;
(%i29) y;
(%i30) x*y;
(%i31) x+z;
```

También es posible definir funciones. Hay múltiples formas en función de lo queramos hacer.

```
(%i32) f(x):= x^2 -x + 1;
(%i33) f(%pi);
```

Nótese que a no ser que pidamos a MAXIMA que trabaje numéricamente, sigue usando cálculo simbólico

```
(%i35) float(f(%pi));
```

También es posible definir funciones. Hay múltiples formas en función de lo queramos hacer.

```
(%i32) f(x):= x^2 -x + 1;
(%i33) f(%pi);
```

Nótese que a no ser que pidamos a MAXIMA que trabaje numéricamente, sigue usando cálculo simbólico

```
(%i35) float(f(%pi));
```

Otro detalle interesante a tener en cuenta es que MAXIMA contiene una ayuda completa que puede ser invocada desde la línea de comandos. Para ello escribimos `??` delante del comando *desconocido*

```
(%i36) ??float;
```

Si no existe ningún comando con ese nombre la respuesta es `false`

```
(%i37) ??renato;
```

Otra de las opciones de MAXIMA es su potencia gráfica. Para hacer las gráficas MAXIMA usa GNUPLOT, un potente paquete gráfico GNU. El comando más sencillo de usar es `plot2d`.

```
(%i39) wxplot2d([f(x)], [x,-5,5]);
```

En conveniente asegurarse que variable `x` no tiene asignado ningún valor **!o da un error!**

Otra de las opciones de MAXIMA es su potencia gráfica. Para hacer las gráficas MAXIMA usa GNUPLOT, un potente paquete gráfico GNU. El comando más sencillo de usar es `plot2d`.

```
(%i39) wxplot2d([f(x)], [x,-5,5]);
```

En conveniente asegurarse que variable `x` no tiene asignado ningún valor **!o da un error!** Podemos representar varias funciones

```
(%i41) plot2d([f(xx),2*sin(xx),atan(xx)], [xx,-2,2])$
```

MAXIMA también dispone de una gran cantidad de funciones *elementales*, **exponencial**, **logaritmo**, **trigonométricas**, etc. Además las trata de forma simbólica.

```
(%i42) log(10);
(%i43) float(%);
(%i44) log(%e);
(%i45) 15!;  factor(%);
```

Otra de las opciones de MAXIMA es su potencia gráfica. Para hacer las gráficas MAXIMA usa GNUPLOT, un potente paquete gráfico GNU. El comando más sencillo de usar es plot2d.

```
(%i39) wxplot2d([f(x)], [x,-5,5]);
```

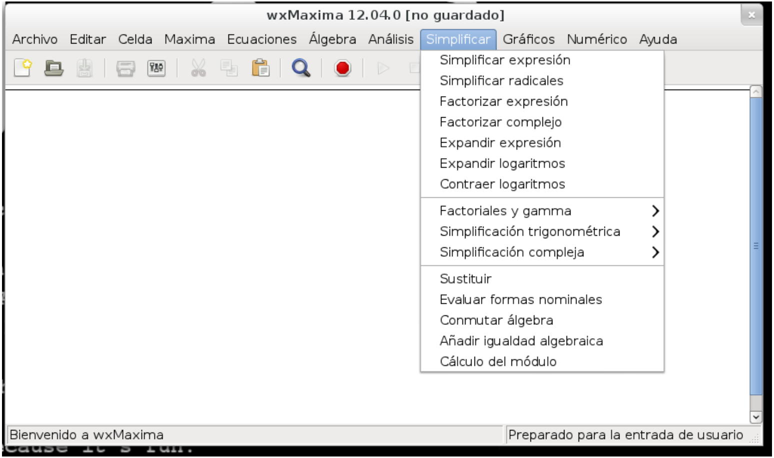
En conveniente asegurarse que variable x no tiene asignado ningún valor **!o da un error!** Podemos representar varias funciones

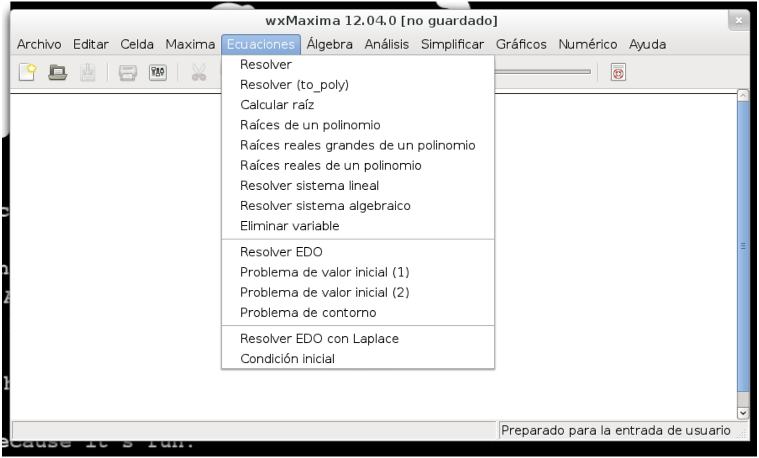
```
(%i41) plot2d([f(xx),2*sin(xx),atan(xx)], [xx,-2,2])$
```

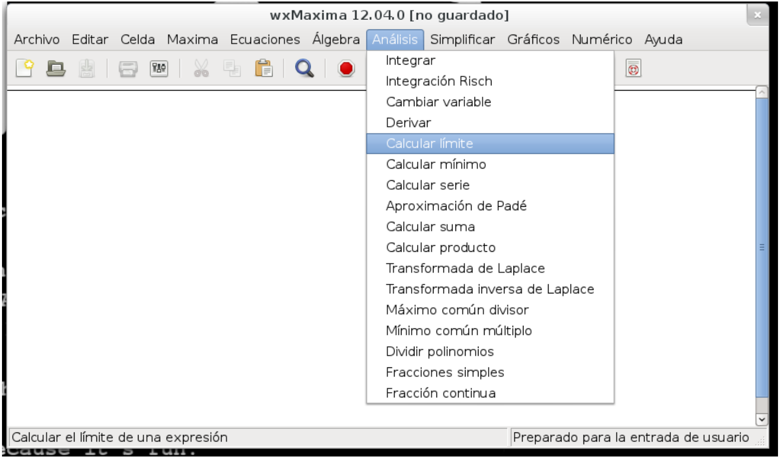
MAXIMA también dispone de una gran cantidad de funciones *elementales*, **exponencial**, **logaritmo**, **trigonométricas**, etc. Además las trata de forma simbólica.

```
(%i42) log(10);
(%i43) float(%);
(%i44) log(%e);
(%i45) 15!;  factor(%);
```

¿Qué más podemos hacer?


wxMaxima 12.04.0 [no guardado]
Archivo Editar Celda Maxima Ecuaciones Álgebra Análisis Simplificar Gráficos Numérico Ayuda
Simplificar expresión
Simplificar radicales
Factorizar expresión
Factorizar complejo
Expandir expresión
Expandir logaritmos
Contraer logaritmos
Factoriales y gamma
Simplificación trigonométrica
Simplificación compleja
Sustituir
Evaluar formas nominales
Conmutar álgebra
Añadir igualdad algebraica
Cálculo del módulo
Bienvenido a wxMaxima
Preparado para la entrada de usuario


wxMaxima 12.04.0 [no guardado]
Archivo Editar Celda Maxima Ecuaciones Álgebra Análisis Simplificar Gráficos Numérico Ayuda
Resolver
Resolver (to_poly)
Calcular raíz
Raíces de un polinomio
Raíces reales grandes de un polinomio
Raíces reales de un polinomio
Resolver sistema lineal
Resolver sistema algebraico
Eliminar variable
Resolver EDO
Problema de valor inicial (1)
Problema de valor inicial (2)
Problema de contorno
Resolver EDO con Laplace
Condición inicial
Preparado para la entrada de usuario


wxMaxima 12.04.0 [no guardado]
Archivo Editar Celda Maxima Ecuaciones Álgebra Análisis Simplificar Gráficos Numérico Ayuda
Integrar
Integración Risch
Cambiar variable
Derivar
Calcular límite
Calcular mínimo
Calcular serie
Aproximación de Padé
Calcular suma
Calcular producto
Transformada de Laplace
Transformada inversa de Laplace
Máximo común divisor
Mínimo común múltiplo
Dividir polinomios
Fracciones simples
Fracción continua
Calcular el límite de una expresión
Preparado para la entrada de usuario

¡Y un sinfín de cosas más!

En la web de la asignatura buscar el apartado: Software Libre de Matemáticas

https://renato.ryn-fismat.es/clases.html#maxima

Cálculo diferencial con Maxima

Resolviendo ecuaciones:

```
(%i47) solve(x^2-a^2-4,x);
```

También se puede resolver respecto a la variable *a* (hazlo como ejercicio).

Resolviendo ecuaciones:

```
(%i47) solve(x^2-a^2-4,x);
```

También se puede resolver respecto a la variable a (hazlo como ejercicio).

```
(%i48) solve(x^2=-1);
(%i49) solve(x^5=1,x);
```

```
(%i50) rectform(%);
```

Ejercicio: Resuelve la ecuación $x^n = 1$ para $n \in \mathbb{N}$ cualquiera.

Resolviendo ecuaciones:

```
(%i47) solve(x^2-a^2-4,x);
```

También se puede resolver respecto a la variable a (hazlo como ejercicio).

```
(%i48) solve(x^2=-1);
(%i49) solve(x^5=1,x);
```

```
(%i50) rectform(%);
```

Ejercicio: Resuelve la ecuación $x^n = 1$ para $n \in \mathbb{N}$ cualquiera.

```
(%i51) solve(x^n=1,x);
"Is "n" an "integer"?"  y;
(%o51) [x=1]
```

Pero ¿y las demás soluciones?

Resolviendo ecuaciones:

```
(%i47) solve(x^2-a^2-4,x);
```

También se puede resolver respecto a la variable a (hazlo como ejercicio).

```
(%i48) solve(x^2=-1);
(%i49) solve(x^5=1,x);
```

```
(%i50) rectform(%);
```

Ejercicio: Resuelve la ecuación $x^n = 1$ para $n \in \mathbb{N}$ cualquiera.

```
(%i51) solve(x^n=1,x);
"Is "n" an "integer"?"  y;
(%o51) [x=1]
```

Pero ¿y las demás soluciones? Intenta "adivinarlas" a partir de los casos $n = 2, 3, 4, 5, 6, 7$.

Calculando límites:

```
(%i52) limit(sin(a*x)/x,x,0);
```

Cuidado con los infinitos:

```
(%i53) limit(exp(1/(1-x)),x,1);
(%o53) und
(%i54) limit(exp(1/(1-x)),x,1,plus);
(%o54) 0
(%i55) limit(exp(1/(1-x)),x,1,minus);
(%o55) inf
```

Prueba con $\lim_{x\to 0}\log(x)$.

Calculando límites:

```
(%i52) limit(sin(a*x)/x,x,0);
```

Cuidado con los infinitos:

```
(%i53) limit(exp(1/(1-x)),x,1);
(%o53) und
(%i54) limit(exp(1/(1-x)),x,1,plus);
(%o54) 0
(%i55) limit(exp(1/(1-x)),x,1,minus);
(%o55) inf
```

Prueba con $\lim_{x\to 0} \log(x)$.

MAXIMA **no sabe calcular límites en dos variables**:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = ??? \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} = ???$$

Calculando límites:

```
(%i52) limit(sin(a*x)/x,x,0);
```

Cuidado con los infinitos:

```
(%i53) limit(exp(1/(1-x)),x,1);
(%o53) und
(%i54) limit(exp(1/(1-x)),x,1,plus);
(%o54) 0
(%i55) limit(exp(1/(1-x)),x,1,minus);
(%o55) inf
```

Prueba con $\lim_{x\to 0} \log(x)$.

MAXIMA **no sabe calcular límites en dos variables**:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = ??? \qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} = ???$$

¿qué hacer?

Calculando derivadas. El comando para calcular derivadas es `diff(f(x),x,k)` donde `f(x)` es la función a la que le vamos a calcular la derivada `k`-ésima respecto a la variable `x`:

```
(%i56) diff(sin(x^2+2),x);
(%o56) 2*x*cos(x^2+2)
(%i57) diff(x^x, x,3);
(%o57) x^(x-1)*(log(x)+(x-1)/x)+x^x*(log(x)+1)^3
           +2*x^(x-1)*(log(x)+1)
```

Calculando derivadas. El comando para calcular derivadas es `diff(f(x),x,k)` donde `f(x)` es la función a la que le vamos a calcular la derivada `k`-ésima respecto a la variable `x`:

```
(%i56) diff(sin(x^2+2),x);
(%o56) 2*x*cos(x^2+2)
(%i57) diff(x^x, x,3);
(%o57) x^(x-1)*(log(x)+(x-1)/x)+x^x*(log(x)+1)^3
            +2*x^(x-1)*(log(x)+1)
```

Veamos que podemos hacer en $\mathbb{R}^n$.

```
(%i58)  f(x,y):=(x^2*y)/(x^2+y^2);
(%i59) diff(f(x,y), x);
(%i60) factor(%);
(%i61) diff(f(x,y), y);
(%i62) diff(f(x,y));
```

MAXIMA también dibuja gráficas 3D con el comando `plot3d` cuya sintaxis es

```
plot3d([fun1,fun2,...],[var1,ini,fin],[var2,ini,fin],...)
```

```
(%i62) kill(f,x,y)$
       f(x,y):= sin(x) + cos(y);
       wxplot3d(f(x,y), [x,-5,5], [y,-5,5])$
```

MAXIMA también dibuja gráficas 3D con el comando `plot3d` cuya sintaxis es

```
plot3d([fun1,fun2,...],[var1,ini,fin],[var2,ini,fin],...)
```

```
(%i62) kill(f,x,y)$
       f(x,y):= sin(x) + cos(y);
       wxplot3d(f(x,y), [x,-5,5], [y,-5,5])$
```

Para que MAXIMA reconozca el directorio local de trabajo (lo que es conveniente para importar y exportar ficheros) es conveniente definir la variable `file_search_maxima`.

La forma más sencilla de definirlo es mediante la opción "Añadir a ruta" en la pestaña "Maxima" del menú del programa.

Cálculo diferencial de funciones de varias variables

Continuidad y diferenciabilidad de funciones $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$

- Estudiar la función $f(x, y) = \dfrac{xy}{y^2 + x^2}$

```
(%i63) f(x,y):=if x^2+y^2=0 then 0 else x*y/(y^2+x^2);
(%i64) f(0,0); f(2,1);
(%i66) draw3d(enhanced3d=false, xu_grid=50, color=gray50,
explicit(f(x,y), x,-.1,.1,y,-.1,.1),
point_type=filled_circle, point_size=1, color=black,
points([[0,0,0]]))$
```

Continuidad y diferenciabilidad de funciones $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$

- Estudiar la función $f(x,y) = \dfrac{xy}{y^2 + x^2}$

```
(%i63) f(x,y):=if x^2+y^2=0 then 0 else x*y/(y^2+x^2);
(%i64) f(0,0); f(2,1);
(%i66) draw3d(enhanced3d=false, xu_grid=50, color=gray50,
explicit(f(x,y), x,-.1,.1,y,-.1,.1),
point_type=filled_circle, point_size=1, color=black,
points([[0,0,0]]))$
```

- Estudiar $f(x,y) = \dfrac{x^2 y^2}{y^2 + x^2}$ y $g(x,y) = \dfrac{y^4}{x^2 + y^2}$.

Continuidad y diferenciabilidad de funciones $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$

- Estudiar la función $f(x,y) = \dfrac{xy}{y^2+x^2}$

```
(%i63) f(x,y):=if x^2+y^2=0 then 0 else x*y/(y^2+x^2);
(%i64) f(0,0); f(2,1);
(%i66) draw3d(enhanced3d=false, xu_grid=50, color=gray50,
explicit(f(x,y), x,-.1,.1,y,-.1,.1),
point_type=filled_circle, point_size=1, color=black,
points([[0,0,0]]))$
```

- Estudiar $f(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{y^2+x^2}$ y $g(x,y) = \dfrac{y^4}{x^2+y^2}$.

- Estudia la función $f(x,y) = \arctan\left(\dfrac{y^4+x^4}{y^2+x^2}\right)$.

Continuidad y diferenciabilidad de funciones $f:\mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$

- Estudiar la función $f(x,y) = \dfrac{xy}{y^2+x^2}$

```
(%i63) f(x,y):=if x^2+y^2=0 then 0 else x*y/(y^2+x^2);
(%i64) f(0,0); f(2,1);
(%i66) draw3d(enhanced3d=false, xu_grid=50, color=gray50,
explicit(f(x,y), x,-.1,.1,y,-.1,.1),
point_type=filled_circle, point_size=1, color=black,
points([[0,0,0]]))$
```

- Estudiar $f(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{y^2+x^2}$ y $g(x,y) = \dfrac{y^4}{x^2+y^2}$.

- Estudia la función $f(x,y) = \arctan\left(\dfrac{y^4+x^4}{y^2+x^2}\right)$.

En todos los casos calcula las derivadas parciales.

Problema: Sea la función $f:\mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$, $y \neq 0$ y $x \cdot y \neq 1$

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \arctan\left(\dfrac{y+x}{1-x\,y}\right) \\ \tan\left(\dfrac{x^2}{y}\right) \end{pmatrix}$$

Calcula la matriz diferencial y evalúala en $(x,y) = (\sqrt{\pi}, 1)$.

Problema: Sea la función $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$, $y \neq 0$ y $x \cdot y \neq 1$

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \arctan\left(\dfrac{y+x}{1-x\,y}\right) \\ \tan\left(\dfrac{x^2}{y}\right) \end{pmatrix}$$

Calcula la matriz diferencial y evalúala en $(x,y) = (\sqrt{\pi},1)$.

Problema: Sea la función $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^2$

$$g(x,y) = \begin{pmatrix} g_1(x,y) \\ g_2(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \log(1+x^2+y^2+2z^4) \\ \tanh(x^2-yz); \end{pmatrix}$$

Calcula la matriz jacobiana (diferencial)

Problema: Sea la función $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2y^3$. Representarla gráficamente. Calcular sus derivadas parciales y la matriz jacobiana. Calcular la derivada direccional en el punto $a = (1,3)$ según el vector $v = (2,-1)$.

Problema: Sea la función $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2y^3$. Representarla gráficamente. Calcular sus derivadas parciales y la matriz jacobiana. Calcular la derivada direccional en el punto $a = (1,3)$ según el vector $v = (2,-1)$.

- Primero definimos las normas en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$

```
(%i1)  define(norm2(vv),sqrt(sum(vv[k]^2,k,1,2)));
       define(norm3(vv),sqrt(sum(vv[k]^2,k,1,3)));
```

Luego definimos la función

```
(%i3) kill(f,a,b,c,v1,v2)$
(%i4) define(f(x,y),x^2*y^3);
```

Calculamos las derivadas parciales

```
(%i5) diff(f(x,y),x);   diff(f(x,y),y);
```

Calculamos la matriz jacobiana

```
(%i7)  gra:jacobian([f(x,y)],[x,y]);
```

Definimos el vector normalizado $u = v/\|v\|$

```
(%i8) v1:2$ v2:-1$ v:[v1,v2]$
      vec:v/norm2(v);
```

Calculamos la derivada direccional de f según u en el punto a; $D_u f(a) = \langle \nabla f(a), u \rangle$

```
(%i16) a:1$ b:2$ c:f(a,b)$
        Du:gra.vec;  /* Multiplicación de matrices */
        ev(Du,x=a,y=b);
```

Finalmente representamos a $f(x,y)$

```
(%i17) draw3d( enhanced3d=false, xu_grid=50, color=green,
        explicit(f(x,y),x,a-2,a+2,y,b-2,b+2),
        point_type=filled_circle, point_size=2,
        color=midnight_blue, points([[a,b,f(a,b)]]),
        head_angle=20,head_length=0.1,
        vector([a,b,c],[v1,v2,0]))$
```

Ejercicios

1. Calcula la derivada de f en a según la dirección v. Dibuja la variación de f en a según el vector v y compáralo con la variación en la dirección de gradiente de f.

1. $f(x,y) = \sin\left(\dfrac{y^2+x^2}{1+x^2+y^2}\right)$
2. $f(x,y) = (x^2+y^2)^x$; $a = (e,0)$; $v = (1,-1)$.
3. $f(x,y,z) = (x/y)^z$; $a = (1,1,1)$; $v = (2,1,-1)$.
4. $f(x,y) = xe^{xy}$; $a = (1,-1)$; $v = (1,1)$.

Dibujando los planos tangentes

```
(%i1) kill(all)$  load(draw)$
```

Escojamos un ejemplo sencillo: $f(x,y) = 1-(x^2+y^2)$

```
(%i2) define(f(x,y),1-(x^2+y^2));
(%i3) define(dxf(x,y),diff(f(x,y),x));
      define(dyf(x,y),diff(f(x,y),y));
```

Dibujando los planos tangentes

```
(%i1) kill(all)$  load(draw)$
```

Escojamos un ejemplo sencillo: $f(x,y) = 1-(x^2+y^2)$

```
(%i2) define(f(x,y),1-(x^2+y^2));
(%i3) define(dxf(x,y),diff(f(x,y),x));
      define(dyf(x,y),diff(f(x,y),y));
```

Escribimos la ecuación del plano y dibujamos

```
(%i5) a:-1$ b:1$ xmin:a-1$ xmax:a+1$ ymin:b-1$ ymax:b+1$
      z=f(a,b)+dxf(a,b)*(x-a)+dyf(a,b)*(y-b);
define(plano(x,y), f(a,b)+dxf(a,b)*(x-a)+dyf(a,b)*(y-b));
```

```
(%i12) draw3d(proportional_axes ='xyz, color=blue, xu_grid=25,
explicit(f(x,y),x,xmin-1,xmax+1,y,ymin-1,ymax+1), color=cyan,
parametric_surface(x,y,plano(x,y),x,xmin,xmax,y,ymin,ymax),
point_type=filled_circle, point_size =1,color = black,
points([[a,b,f(a,b)]]), head_angle  = 20,head_length = 0.1,
vector([a,b,c],vn)  )$
```

Dibujando los planos tangentes

Ejercicio: Encontrar los planos tangente en los puntos dados de las funciones siguientes y representarlos gráficamente:

1. $f(x,y) = \arctan(x^2+y^2)$ en $a=(0,1)$;
2. $f(x,y) = (x^2+y^2)\sin(x^2+y^2)$ en $(0,0)$ y $(\sqrt{\pi},0)$.
3. $f(x,y) = \exp(-x^2-y^2)$ en $(0,0)$ y $(1/2,-1/2)$.

Dibujando los planos tangentes

Ejercicio: Encontrar los planos tangente en los puntos dados de las funciones siguientes y representarlos gráficamente:

1. $f(x,y) = \arctan(x^2 + y^2)$ en $a = (0,1)$;
2. $f(x,y) = (x^2 + y^2)\sin(x^2 + y^2)$ en $(0,0)$ y $(\sqrt{\pi}, 0)$.
3. $f(x,y) = \exp(-x^2 - y^2)$ en $(0,0)$ y $(1/2, -1/2)$.
4. $f(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{y^2 + x^2}$ en $a = (-1,1)$;
5. $f(x,y) = x^2/2 - y^2$ en $a = (2,1)$;

Derivadas de orden superior

Ejemplo 1: Estudia la función

$$f(x,y) = \begin{cases} \arctan\left(\dfrac{x^4+y^4}{x^2+y^2}\right), & \text{si } (x,y) \neq (0,0); \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Decide si es continua y diferenciable en $\mathbb{R}^2$. Decide si $f \in \mathcal{C}^1(R^2)$. Calcula $D_{12}f(0,0)$ y $D_{21}f(0,0)$. Decide si $f \in \mathcal{C}^2(R^2)$.

Ejemplo 2: Sea la función definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} xy \operatorname{sen} \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x-y}{x+y}\right), & \text{si } x+y \neq 0; \\ 0, & \text{si } x+y = 0 \end{cases}$$

Estudia la continuidad y diferenciabilidad de esta función. Calcula $D_{12}f(0,0)$ y $D_{21}f(0,0)$.