Calculemos el $\lim\limits_{y\to 0}\frac{y}{\log_a(1+y)}$, empleando el resultado del p. a):

$$\lim_{y\to 0}\frac{y}{\log_a(1+y)}=\lim_{y\to 0}\frac{y\ln a}{\ln(1+y)}=\ln a\,\frac{1}{\lim\limits_{y\to 0}\frac{\ln(1+y)}{y}}=\frac{\ln a}{1}=\ln a.$$

Examinemos ahora la función $f(y)$ que es continua en el punto $y=0$:

$$f(y)=\begin{cases}\frac{y}{\log_a(1+y)} & \text{cuando } y\neq 0,\\ \ln a & \text{cuando } y=0.\end{cases}$$

Según el teorema 8, la función compuesta

$$f(\varphi(x))=\begin{cases}\frac{a^x-1}{x} & \text{cuando } x\neq 0,\\ \ln a & \text{cuando } x=0\end{cases}$$

es continua en el punto $x=0$. Por eso $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$. ▲

IV. Problemas y ejercicios para el trabajo independiente

15. Investíguese la continuidad de la función $f(x)$ e indíquese el tipo de sus puntos de discontinuidad (véanse los ejer. 1—4):

a) $f(x)=x\operatorname{sen}(1/x)$; b) $f(x)=\operatorname{sen}(1/x)$; c) $f(x)=\{x\}$;

d) $f(x)=\begin{cases}x^2, & \text{si } x \text{ es un número irracional;}\\ 1, & \text{si } x \text{ es un número racional;}\end{cases}$

e) $f(x)=\frac{x^2+2}{x^3+1}$; f) $f(x)=\operatorname{arctg}(1/x)$; g) $f(x)=\frac{1}{1-e^{x/(1-x)}}$;

h) $f(x)=\ln\frac{x^2}{(x+1)(x-3)}$; i) $f(x)=\begin{cases}x^2, & \text{para } 0\leqslant x<1,\\ 2-x, & \text{para } 1<x\leqslant 2;\end{cases}$

k) $f(x)=\begin{cases}x \text{ cuando } |x|\leqslant 1,\\ 1 \text{ cuando } |x|>1;\end{cases}$ l) $f(x)=\begin{cases}\cos(\pi x/2) \text{ cuando } |x|\leqslant 1,\\ |x-1| \text{ cuando } |x|>1.\end{cases}$

16. Demuéstrese que:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$; b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^a-1}{x}=a$;

c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sh}x}{x}=1$; d) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{th}x}{x}=1$; e) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\operatorname{ch}x}{x^2}=-\frac{1}{2}$.

§ 3. Comparación de las funciones infinitésimas. Símbolo "o pequeña" y sus propiedades

I. Conceptos y teoremas fundamentales

1. Comparación de las funciones infinitésimas. La función $\alpha(x)$ se llama *infinitamente pequeña (infinitésima) cuando $x\to a$ (en el punto a)*, si $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$. Sean $\alpha(x)$ y $\beta(x)$ dos funciones infinitésimas cuando $x\to a$. Las funciones $\alpha(x)$ y $\beta(x)$ reciben el nombre de:

a) *infinitésimas del mismo orden cuando $x\to a$ (en el punto a)*, si

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=c\neq 0,$$

b) *infinitésimas equivalentes cuando $x\to a$ (en el punto a)*, si

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1 \text{ (la notación es: } \alpha\sim\beta \text{ cuando } x\to a).$$

Si $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$, se dice que $\alpha(x)$ es *una infinitésima de orden superior cuando $x\to a$ (en el punto a), respecto a $\beta(x)$*, y se escribe $\alpha=o(\beta)$ cuando $x\to a$ (α es igual a «o pequeña» de β cuando $x\to a$).

Por ejemplo $x^2=o(x)$ cuando $x\to 0$.

Definiciones análogas tienen lugar para los casos de $x\to a+0$, $x\to a-0$, $x\to\infty$.

Es necesario tomar en consideración que las igualdades, que contienen el símbolo «o pequeña», son convencionales. Por ejemplo, la igualdad $x^2=o(x)$ cuando $x\to 0$ es cierta, pero $o(x)=x^2$ no es cierta, puesto que el símbolo $o(x)$ designa no una función concreta, sino que toda función que cuando $x\to 0$ es infinitésima de orden superior que x. Existe una cantidad infinitamente grande de semejantes funciones: en particular, cualquier función x^p (donde $p>1$), es $o(x)$ cuando $x\to 0$. Así, pues, la igualdad $x^2=o(x)$ cuando $x\to 0$ significa que la función x^2 pertenece al conjunto de funciones infinitésimas de orden superior cuando $x\to 0$ que x. Por eso «en sentido contrario» esta igualdad ($o(x)=x^2$) no es cierta: todo el conjunto de funciones $o(x)$ no se reduce a una sola función x^2.

2. Propiedades del símbolo "o pequeña"

Teorema 10. *Supongamos que $\alpha_1(x)$ y $\alpha_2(x)$ son dos funciones infinitésimas cuando $x\to a$ tales que $\alpha_1(x)=o(\beta)$ y $\alpha_2(x)=o(\beta)$. Entonces $\alpha_1(x)+\alpha_2(x)=o(\beta)$ cuando $x\to a$.*

Este teorema puede escribirse en forma abreviada de la siguiente manera: $o(\beta)+o(\beta)=o(\beta)$.

A la par con la propiedad indicada, enunciemos otras propiedades del símbolo «o pequeña» (en todos los casos se considera que $\alpha\to 0$ y $\beta\to 0$ cuando $x\to a$).

1ª. $o(\beta)+o(\beta)=o(\beta)$.

2ª. $o(\beta)-o(\beta)=o(\beta)$.

3ª. $o(c\beta)=o(\beta)$ $\forall$ número $c\neq 0$.

4ª. $co(\beta)=o(\beta)$ $\forall$ número $c\neq 0$.

5ª. $o(\beta^n)=o(\beta^k)$, $n\geqslant 2$ ($n\in\mathbf{N}$), $k=1, 2, \ldots, n-1$.

6ª. $(o(\beta))^n=o(\beta^n)$ $\forall n\in\mathbf{N}$.

7ª. $\beta^n o(\beta)=o(\beta^{n+1})$ $\forall n\in\mathbf{N}$.

8ª. $\frac{o(\beta^n)}{\beta}=o(\beta^{n-1})$, $n\geqslant 2$ ($n\in\mathbf{N}$).

Scanned by CamScanner

Designemos una función infinitésima cualquiera cuando $x \to a$ con el símbolo $o(1)$. Entonces la 8ª propiedad será válida también para $n = 1$: $\frac{o(\beta)}{\beta} = o(1)$.

9ª. $o\left(\sum_{k=1}^{n} c_k \beta^k\right) = o(\beta)$, donde c_k son números.

10ª. $o(o(\beta)) = o(\beta)$.

11ª. $o(\beta + o(\beta)) = o(\beta)$.

12ª. $\alpha\beta = o(\alpha)$ y $\alpha\beta = o(\beta)$.

13ª. Si $\alpha \sim \beta$, entonces $\alpha - \beta = o(\alpha)$ y $\alpha - \beta = o(\beta)$.

II. Preguntas y tareas de control

1. Dése la definición de la función infinitésima: a) cuando $x \to a$: b) cuando $x \to \infty$. Adúzcanse ejemplos de semejantes funciones.
2. Enúnciese la definición y cítense ejemplos de la función infinitésima $\alpha(x)$:
   a) de un mismo orden que la función $\beta(x)$ en el punto a;
   b) equivalente a la función $\beta(x)$ en el punto a;
   c) de orden superior cuando $x \to a$ que $\beta(x)$.
   ¿Qué significa la notación simbólica $\alpha = o(\beta)$ cuando $x \to a$?
3. Pónganse ejemplos de funciones $\alpha(x)$, para las cuales son válidas las igualdades: a) $\alpha(x) = o(x)$ cuando $x \to 0$; b) $\alpha(x) = o(\sqrt{1-x})$ cuando $x \to 1-0$; c) $\alpha(x) = o(1/x^2)$ cuando $x \to \infty$.
4. Demuéstrese que $x^3 = o(x^2)$ cuando $x \to 0$. ¿Es cierta la igualdad $x^3 = o(\beta)$ cuando $x \to 0$, si: a) $\beta(x) = x$; b) $\beta(x) = x^2\sqrt{|x|}$; c) $\beta(x) = x^3\sqrt{|x|}$; d) $\beta(x) = x^2 \operatorname{sen} x$?
5. Demuéstrese que $(x-1)^2 = o(x-1)$ cuando $x \to 1$. ¿Es cierta la igualdad $(x-1)^2 = o(\beta)$ cuando $x \to 1$, si: a) $\beta(x) = (x-1)^3$; b) $\beta(x) = \operatorname{sen}(x-1)^2$; c) $\beta(x) = \frac{(x-1)^2}{\ln x}$?
6. Demuéstrese que $1/x^4 = o(1/x^3)$ cuando $x \to \infty$. ¿Es cierta la igualdad $1/x^4 = o(\beta)$ cuando $x \to \infty$, si:
   a) $\beta(x) = \frac{1}{x^k}$ $(k = 1, 2)$; b) $\beta(x) = \frac{1}{x^5}$; c) $\beta(x) = \frac{1}{(x+1)^4}$;
   d) $\beta(x) = \frac{1}{x^3 \operatorname{sen} x}$; e) $\beta(x) = \frac{1}{(x-1)^4 \operatorname{arctg}(1/x)}$?
7. ¿Son las funciones $\operatorname{sen} x$ y x infinitésimas equivalentes cuando $x \to 0$? Demuéstrese que $\operatorname{sen} x - x = o(x)$ cuando $x \to 0$.
8. Valiéndose de las propiedades del símbolo «o pequeña», escríbase para la función $\alpha(x)$ una igualdad de la forma $\alpha(x) = o(x^k)$ cuando $x \to 0$, si:
   $\alpha(x) = o(x^2) + o(x^2)$; $\alpha(x) = o(x) - o(x)$; $\alpha(x) = 5o(x)$;
   $\alpha(x) = o(3x^2)$; $\alpha(x) = (o(x))^3$; $\alpha(x) = xo(x)$; $\alpha(x) = \frac{o(x^5)}{x^2}$;
   $\alpha(x) = o(-x + 2x^2 + x^4)$; $\alpha(x) = o(o(x^2))$; $\alpha(x) = o(x + o(x))$.

9. Aprovechando las propiedades del símbolo «o pequeña», escríbase para la función $\alpha(x)$ la igualdad de la forma $\alpha(x) = o(1/x^k)$, cuando $x \to \infty$, si:
   $\alpha(x) = o(1/x) - o(1/x)$, $\alpha(x) = 1000o(1/x)$,
   $\alpha(x) = o(1000/x)$, $\alpha(x) = (o(1/\sqrt{|x|}))^2$, $\alpha(x) = x^2 o(1/x^3)$,
   $\alpha(x) = o\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}\right)$; $\alpha(x) = o\left(o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)$;
   $\alpha(x) = o\left(\frac{1}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right)$.

III. Ejemplos de resolución de problemas

1. ¿Será cierta la igualdad $\alpha(x) = o(x)$ cuando $x \to 0$, si: a) $\alpha(x) = 2x^2$, b) $\alpha(x) = 3x$, c) $\alpha(x) = \sqrt{|x|}$, d) $\alpha(x) = \frac{x}{\ln|x|}$; e) $\alpha(x) = 1 - \cos x$?

△ a) $2x^2 = o(x)$, puesto que $\lim_{x \to 0} \frac{2x^2}{x} = 0$.

b) La igualdad $3x = o(x)$ no es cierta, por cuanto que $\lim_{x \to 0} \frac{3x}{x} = 3 \neq 0$. Las funciones $3x$ y x son infinitésimas de un mismo orden cuando $x \to 0$.

c) $\sqrt{|x|} \neq o(x)$, ya que $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{|x|}}{x} = \infty$.

d) $\frac{x}{\ln|x|} = o(x)$, por cuanto que $\lim_{x \to 0} \left(\frac{x}{\ln|x|} : x\right) = 0$.

e) $1 - \cos x = o(x)$, puesto que $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{2 \operatorname{sen}^2(x/2)}{x/2} = \lim_{x \to 0} \left[\frac{\operatorname{sen}(x/2)}{x/2}\right]^2 \frac{x}{2} = 1 \cdot 0 = 0$. ▲

2. ¿Será cierta la igualdad $\alpha(x) = o(x^2)$ cuando $x \to 0$, si: a) $\alpha(x) = \operatorname{sen}^2 x$; b) $\alpha(x) = x^3$; c) $\alpha(x) = 1 - \cos x$?

△ a) $\operatorname{sen}^2 x \neq o(x^2)$, debido a que $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)^2 = 1$. Las funciones $\operatorname{sen}^2 x$ y x^2 son infinitésimas equivalentes en el punto $x = 0$.

b) $x^3 = o(x^2)$, a causa de que $\lim_{x \to 0} \frac{x^3}{x^2} = 0$.

c) $1 - \cos x \neq o(x^2)$, puesto que $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$. Las funciones $1 - \cos x$ y x^2 son infintésimas de un mismo orden en el punto $x = 0$. ▲

3. Utilizando los límites:

a) $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$; b) $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$;

c) $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$; d) $\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt[n]{1+x} - 1}{x} = \frac{1}{n}$

Scanned by CamScanner

(siendo n un número natural), representar las funciones $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$, $\sqrt[n]{1+x}$ en la forma

$$\psi(x) = a_0 + a_1 x^k + o(x^k) \text{ cuando } x \to 0,$$

donde $k=1$ ó 2; a_0 y a_1 son ciertos números.

△ Al principio demostremos que si $\alpha(x)$ y $\beta(x)$ son infinitésimas de un mismo orden cuando $x \to a$, es decir, $\lim\limits_{x\to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = c \neq 0$, entonces $\alpha(x) = c\beta(x) + o(\beta)$ cuando $x \to a$.

En efecto, puesto que

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} - c\right) = 0 \quad \text{ó} \quad \lim_{x\to a} \frac{\alpha(x) - c\beta(x)}{\beta(x)} = 0,$$

según la definición del símbolo $o(\beta)$ tenemos $\alpha(x) - c\beta(x) = o(\beta)$, o bien

$$\alpha(x) = c(\beta(x) + o(\beta) \text{ cuando } x \to a. \tag{1}$$

De las igualdades a) . . . d), recurriendo a la fórmula (1), obtenemos

$$\operatorname{sen} x = x + o(x) \qquad \text{cuando } x \to 0; \tag{2}$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2) \qquad \text{cuando } x \to 0; \tag{3}$$

$$\ln(1+x) = x + o(x) \qquad \text{cuando } x \to 0; \tag{4}$$

$$\sqrt[n]{1+x} = 1 + \frac{1}{n}x + o(x) \qquad \text{cuando } x \to 0. \tag{5}$$

Las fórmulas (2) . . . (5) se llaman *fórmulas asintóticas*, o también *desarrollos asintóticos* o bien *representaciones asintóticas de las funciones* $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$, $\sqrt[n]{1+x}$ cuando $x \to 0$. El último sumando en el segundo miembro de estas fórmulas [$o(x)$ u $o(x^2)$] se llama *término residual de la fórmula asintótica.* ▲

4. Demostrar las propiedades 2ª, 3ª, 6ª, 9ª, 10ª del símbolo «o pequeña».

△ Recordemos que el símbolo $o(\beta)$, que forma parte del primer miembro de las fórmulas, designa toda función infinitésima en el punto a de orden superior que $\beta(x)$.

1. Demostremos primero las propiedades 2ª, 3ª y 6ª, es decir,

$$o(\beta) - o(\beta) = o(\beta), \tag{6}$$

$$o(c\beta) = o(\beta) \ \forall \text{ número } c \neq 0, \tag{7}$$

$$(o(\beta))^n = o(\beta^n) \ \forall n \in \mathrm{N}. \tag{8}$$

Designemos con $\alpha_1(x)$, $\alpha_2(x)$, $\alpha(x)$ unas funciones infinitésimas arbitrarias en el punto a tales que $\alpha_1(x) = o(\beta)$, $\alpha_2(x) = o(\beta)$, $\alpha(x) = o(c\beta)$ cuando $x \to a$. Según la definición del símbolo «o pequeña» estas igualdades significan que

$$\lim_{x\to a} \frac{\alpha_1(x)}{\beta(x)} = 0, \tag{9}$$

$$\lim_{x\to a} \frac{\alpha_2(x)}{\beta(x)} = 0, \tag{10}$$

$$\lim_{x\to a} \frac{\alpha(x)}{c\beta(x)} = 0 \quad (c \neq 0). \tag{11}$$

Para demostrar la validez de las igualdades (6) . . . (8) hace falta establecer que

$$\alpha_1(x) - \alpha_2(x) = o(\beta), \quad \alpha(x) = o(\beta),$$
$$(\alpha_1(x))^n = o(\beta^n),$$

es decir,

$$L_1 = \lim_{x\to a} \frac{\alpha_1(x) - \alpha_2(x)}{\beta(x)} = 0,$$

$$L_2 = \lim_{x\to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0, \quad L_3 = \lim_{x\to a} \frac{(\alpha_1(x))^n}{(\beta(x))^n} = 0.$$

Teniendo en cuenta (9) y (10), obtenemos

$$L_1 = \lim_{x\to a} \frac{\alpha_1(x)}{\beta(x)} - \lim_{x\to a} \frac{\alpha_2(x)}{\beta(x)} = 0 - 0 = 0,$$

$$L_3 = \left(\lim_{x\to a} \frac{\alpha_1(x)}{\beta(x)}\right)^n = 0^n = 0.$$

Con ayuda de la igualdad (11) encontramos

$$L_2 = c \lim_{x\to a} \frac{\alpha(x)}{c\beta(x)} = c \cdot 0 = 0.$$

Así queda demostrada la validez de las fórmulas (6) . . . (8).

2. Demostremos ahora las propiedades 9ª y 10ª, es decir,

$$o\left(\sum_{k=1}^{n} c_k \beta^k\right) = o(\beta) \ (c_k \text{ son números}), \tag{12}$$

$$o(o(\beta)) = o(\beta). \tag{13}$$

Designemos con $\psi(x)$, $\alpha(x)$ y $\varphi(x)$ unas funciones infinitésimas arbitrarias en el punto a tales que

$$\psi(x) = o\left(\sum_{k=1}^{n} c_k \beta^k\right), \ \alpha(x) = o(\beta), \ \varphi(x) = o(\alpha) = o(o(\beta)),$$

Scanned by CamScanner