1º PARCIAL DFVV (GRUPO **B**). 3 de diciembre de 2013

Apellidos, Nombre: ____

Teoría. (3 Puntos) Elige y demuestra uno de los siguientes teoremas:

☐ **Condición suficiente de diferenciabilidad**: Si la función $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ tiene derivadas parciales con respecto a cada una de las variables y estas son continuas en $a \in A$, entonces f es diferenciable en a.

☐ **Teorema del valor medio**: Sea $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, diferenciable en A abierto y conexo. Sean $a, b \in A$ y sea s el segmento que los une. Entonces, para cada vector $v \in \mathbb{R}^m$ existe un punto z en el interior del segmento s tal que $\langle h, f(b) - f(a)\rangle = \langle h, Df(z)(b-a)\rangle$.

Problema 1. ***(3 ptos.)*** *Sea la función* $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{\frac{k\pi}{2}\}_{k\in\mathbb{Z}} \mapsto \mathbb{R}$, $f(x,y) = |y|^\alpha \tan x$, $\alpha > 0$.

1. *Calcula* $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.
2. *¿Para qué valores de* α f *es continua en* $\mathbb{R}^2 \setminus \{\frac{k\pi}{2}\}_{k\in\mathbb{Z}}$*?*
3. *Calcula sus derivadas parciales de* f.
4. *¿Para que valores de* α f *es diferenciable en* $(0,0)$*? Justifica la respuesta y calcula la derivada total de* f *en* $(0,0)$ *si existe.*
5. *Calcula la derivada total de* f *en* $(1,\pi)$.

Problema 2. ***(4 ptos.)****Sea la función* $g : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, $g(x,y,z) = x^2 + ye^{xz}$.

1. *Decide si* g *es diferenciable en* $\mathbb{R}^2$*. Justifica la respuesta.*
2. *Calcula las derivadas parciales* $\frac{\partial g}{\partial x}$, $\frac{\partial g}{\partial y}$ *y* $\frac{\partial g}{\partial z}$.
3. *¿Cuánto vale la derivada* g *en el punto* $(1,2,0)$ *según la dirección del vector* $(3/4, \sqrt{3}/2, 1/2)$.
4. *¿En que dirección es máxima la variación de* g *en dicho punto* $(1,2,0)$*? ¿Y mínima?*
5. *Escribe la expresión para el plano tangente a la superficie definida por* $w = g(x,y,z)$ *en el punto* $(1,2,0)$.
6. *Escribe el polinomio de Taylor de orden 2 en el punto* $(1,2,0)$.

2º PARCIAL DFVV (GRUPO **B**). 10 de enero de 2014

Apellidos, Nombre: ____

Teoría. (3 Puntos) Enuncia y demuestra la condición necesaria y suficiente de extremo libre de una función de varias variables.

Problema 1. ***(2 ptos.)***

Sea la ecuación $z^3 + 2(x+y)^2 z + e^{z-1} - 4 = 0$.

1. Prueba que la ecuación anterior define una función $z = f(x,y)$ en el entorno U del punto $(0,-1,1)$ y que dicha función es una función $C^{(\infty)}(U)$ en dicho U.
2. Calcula las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ en dicho punto.
3. Escribe el polinomio de Taylor de orden 1 de f en $(0,-1,1)$.

Problema 2. ***(5 ptos.)***

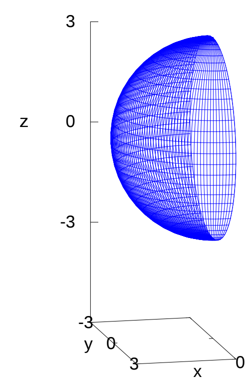
Sea la función

$$f : A \subset \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}, \quad f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 3,$$

donde A es la región definida por

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, |x^2 + y^2 + z^2 \leq 9, \ x \geq 0\}.$$

1. Calcula todos los puntos críticos de dicha función.
2. ¿Alcanza f su máximo y mínimo globales en A? Justifica tu respuesta.
3. Calcula, si existen, dichos máximo y mínimo globales de f.



EXAMEN FINAL DFVV (GRUPO **B**). 7 de febrero de 2014 RECUPERACIÓN 1º o 2º PRUEBA o SUBIR NOTA DFVV[1]

Apellidos, Nombre: ____

Teoría Examen Final. (2 puntos) Demuestra uno de los siguientes teoremas:

☐ **de Heffter-Young**. ☐ **Teorema de la función implícita**.

Problema 1 (3.5 puntos) Se considera la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|x|^\alpha \arctan y}{\sqrt{x^2+y^2}}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a). Demuestra que para $\alpha > 0$, la función f es continua en $(0,0)$.

(b). Para $\alpha > 0$, escribe el valor de $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

(c). Demuestra que f es diferenciable en $(0,0)$ cuando $\alpha > 1$.

(d). ¿Es f diferenciable en $(0,0)$, cuando $\alpha = 1$?. Razona la respuesta.

Problema 2 (1 punto) Estudia el siguiente límite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y(x - \sin x)}{x^4 + y^2}$$

y calcúlalo caso de que exista.

Problema 3 (3.5 puntos)
Sea $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = \log\left(x^2 + y^2\right)$.

(a) Encuentra todos los extremos relativos de f en la región

$$A = \{(x,y) : x \geq 1, (x-1)^2 + y^2 \leq 4\}.$$

(b) Prueba que f tiene extremos absolutos en dicha región A. Calcúlalos razonadamente.

(c) Prueba que f no tiene ni extremos relativos y ni absolutos en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

[1]Examen final: problemas 1, 2 y 3. Recuperación 1º parcial: problemas 1 y 4. Recuperación 2º parcial: Problemas 3 y 5. Subir nota: problemas 1c,d, 3 y 6.

EXAMEN FINAL DFVV (GRUPO **B**). 7 de febrero de 2014 RECUPERACIÓN 1º o 2º PRUEBA o SUBIR NOTA DFVV[2]

Teoría exámenes de recuperación. (3 puntos). Demuestra uno de los siguientes teoremas:

1º prueba: ☐ de Heffter-Young o ☐ Teorema de Taylor con resto.
2º prueba: Teorema de la función implícita.

Problema 4 (3.5 puntos)
Sea la función $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ $f(x, y, z) = (x \cos(y^2 + 1) + y \sin(ze^x))e^z$.

1. Decide si f es diferenciable en $\mathbb{R}^3$. Justifica la respuesta.
2. Calcula las derivadas parciales $\frac{\partial g}{\partial x}$, $\frac{\partial g}{\partial y}$ y $\frac{\partial g}{\partial z}$.
3. En caso de ser diferenciable escribe la derivada total de f en un punto (x, y, z).
4. ¿Cuánto vale la derivada f en el punto $(0, 1, -1)$ según la dirección del vector $(-1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2})$.
5. Escribe la expresión para el plano tangente a la superficie definida por $w = f(x, y, z)$ en el punto $(0, 1, -1)$.
6. Escribe el polinomio de Taylor de orden 2 en el punto $(0, 1, -1)$.

Problema 5 (3.5 puntos) Sea la ecuación $z^3 - xyz + y^2 = 16$.

a) Prueba que dicha ecuación define una función $z = f(x, y)$ en cierto entorno U de $(1, 4, 2)$ y que dicha función f es $C^{(p)}(U)$ para todo $p \in \mathbb{N}$.
b) Calcula la expresión formal de $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ en un punto (x, y) de U.
c) Calcula los valores numéricos de las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}(1, 4)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 4)$. ¿Cuánto vale la derivada direccional de f en la dirección $(1, -2)$ en dicho punto $(1, 4)$?
d) Calcula el valor de $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y)$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1, 4)$

Problema 6 Calcula razonadamente el siguiente límite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{1 - e^{|xy|^{3/2}}}{\arctan^2(x) + \arctan^2(y)}.$$

[2]Examen final: problemas 1, 2 y 3. Recuperación 1º parcial: problemas 1 y 4. Recuperación 2º parcial: Problemas 3 y 5. Subir nota: problemas 1c,d, 3 y 6.

1º PARCIAL DFVV (GRUPO **B**). 25 de noviembre de 2014

Apellidos, Nombre: ____

Teoría. (3 Puntos) Elige y demuestra uno de los siguientes teoremas:

☐ Acotación de las aplicaciones lineales ☐ Teorema del valor medio

---

Problema 1 (3.5 puntos) Se considera la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|x|^\alpha \sin xy}{\sqrt{2x^2+y^2}}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a). Demuestra que para $\alpha > -1$, la función f es continua en $(0,0)$.

(b). Para $\alpha > -1$, escribe el valor de $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

(c). Demuestra que f es diferenciable en $(0,0)$ cuando $\alpha > 0$.

(d). ¿Para $\alpha = 0$ es f diferenciable en $(0,0)$? Razona la respuesta.

Problema 2 (3.5 puntos) Sea la función $g : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$,

$$g(x,y,z) = xye^z + xz\sin(y) + x^4yz.$$

1. Decide si g es diferenciable en $\mathbb{R}^3$. Justifica la respuesta.
2. Calcula las derivadas parciales $\frac{\partial g}{\partial x}$, $\frac{\partial g}{\partial y}$ y $\frac{\partial g}{\partial z}$.
3. En caso de ser diferenciable escribe la derivada total de g en un punto (x,y,z).
4. ¿Cuánto vale el gradiente de g en $(1,\pi,0)$?
5. Calcula la derivada de g en el punto $(1,\pi,0)$ según la dirección del vector $(1,-1,1)$.
6. Escribe la expresión para el plano tangente a la superficie definida por $w = g(x,y,z)$ en el punto $(1,\pi,0)$.
7. Escribe el polinomio de Taylor de orden 2 en el punto $(1,\pi,0)$.

2º PARCIAL DFVV (GRUPO **B**). 15 de enero de 2015

Apellidos, Nombre: ____

Teoría. (3 Puntos) Enuncia y demuestra la condición necesaria y suficiente de extremo libre de una función de varias variables.

Problema 1. ***(2 ptos.)***

Sea la ecuación $F(x, y, z) := x^2y^2z^2 + \exp(x + y + 2z) + 5y^3 - 4y - 2 = 0$.

1. Prueba que la ecuación anterior define una función $z = f(x, y)$ en el entorno U del punto $(-1, 1, 0)$ y que dicha función es una función $C^{(\infty)}(U)$ en dicho U.
2. Calcula las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ en dicho punto.
3. Calcula la derivada direccional de f en el punto $(-1, 1)$ según la dirección $(1, 1)$. ¿En que dirección dicha derivada direccional es mínima?

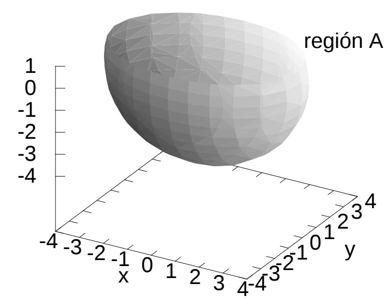
Problema 2. ***(5 ptos.)***

Sea la función

$$f : A \subset \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}, \quad f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 4z - 4x,$$

donde A es la región definida por

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, |x^2 + 2y^2 + z^2 \leq 16, z \leq 1\}.$$



1. Calcula todos los posibles extremos locales de dicha función. Decide, cuando sea posible, si lo son.
2. ¿Alcanza f su máximo y mínimo globales en A? Justifica tu respuesta.
3. Calcula, si existen, dichos máximo y mínimo globales de f.

EXAMEN FINAL DFVV (GRUPO **B**). 22 de enero de 2015

Apellidos, Nombre: ______________________________

Teoría. (2 puntos) Elige y demuestra uno de los siguientes teoremas:

☐ de Heffter-Young. ☐ Teorema de la función implícita.

Problema 1: 3.5 puntos Sea la función $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 \cos y}{x^2+y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0)\ . \end{cases}$$

1. Prueba que f es continua en todo su dominio.
2. Encuentra las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ en $\mathbb{R}^2$.
3. Prueba que la derivada direccional $D_{\hat{u}} f(0,0) = u_1^3$ cualquiera sea el vector unitario $\vec{u} = (u_1, u_2)$.
4. Decide si f es diferenciable $(0,0)$. ¿Y en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$?
5. En caso que f sea diferenciable en $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$, calcula el vector gradiente $\nabla f\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$.
6. Usando el apartado anterior si es neceario escribe la ecuación del plano tangente a la función $f(x,y)$ en el punto $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$.

Problema 2: 1 punto Estudiar el límite $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x|y|}{|x|+|y|}$.

Problema 3: 3.5 puntos

Sea el conjunto $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^4 \leq 1\,\}$ y sea $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x,y) = 4x^2 + 2y^4 - y$.

(a) Encuentra todos los extremos relativos de f en D.

(b) Prueba que f tiene extremos absolutos en D. Calcúlalos razonadamente.

(c) ¿Tiene f extremos absolutos (globales) en $D \cup \{(x,y) | x \geq 0\}$? Justifica tu respuesta y calcúlalos si procede.

Recuperación parcial 1 DFVV (GRUPO **B**). 22 de enero de 2015

Apellidos, Nombre: ______________________________

Teoría. (2 puntos) Elige y demuestra uno de los siguientes teoremas:

PARCIAL 1 ☐ **de Heffter-Young**. ☐ **Teorema de Taylor**.

Problema 1: 3.5 puntos Se considera la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|x|^\alpha \tan(xy)}{\sqrt{x^2+4y^2}}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a). Decide si para $\alpha > -1$, la función f es continua en $(0,0)$.

(b). Para $\alpha > 0$, escribe el valor de $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

(c). Demuestra que f es diferenciable en $(0,0)$ cuando $\alpha > 0$.

(d). ¿Es f diferenciable en $(0,0)$, cuando $\alpha = 0$?. Razona la respuesta.

Problema 2: 3.5 puntos Sea la función $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 \cos y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \, . \end{cases}$$

1. Prueba que f es continua en todo su dominio.
2. Encuentra las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ en $\mathbb{R}^2$.
3. Prueba que la derivada direccional $D_{\hat{u}} f(0,0) = u_1^3$ cualquiera sea el vector unitario $\vec{u} = (u_1, u_2)$.
4. Decide si f es diferenciable $(0,0)$. ¿Y en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$?
5. En caso que f sea diferenciable en $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$, calcula el vector gradiente $\nabla f\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$.
6. Usando el apartado anterior si es neceario escribe la ecuación del plano tangente a la función $f(x,y)$ en el punto $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$.

Problema 3: 1 punto Estudiar el límite $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x|y|}{|x|+|y|}$.

Recuperación $2^{\underline{o}}$ parcial DFVV (GRUPO **B**). 22 de enero de 2015

Apellidos, Nombre: ____

Teoría. (2 puntos) Demuestra el **Teorema de la función implícita**.

Problema 1: 4 puntos Sea el conjunto $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x^2 + y^4 \leq 1\,\}$ y sea $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x,y) = 4x^2 + 2y^4 - y$.

(a) Encuentra todos los extremos relativos de f en D.

(b) Prueba que f tiene extremos absolutos en D. Calcúlalos razonadamente.

(c) ¿Tiene f extremos absolutos (globales) en $D \cup \{(x,y)|x \geq 0\}$? Justifica tu respuesta y calcúlalos si procede.

Problema 2: 4 puntos

Si x_1, x_2, x_3 son las raices del polinomio $p(x) = x^3 + y_1 x^2 + y_2 x + y_3$, existe la siguiente relación con los coeficientes:

$$\begin{aligned} y_1 &= -(x_1 + x_2 + x_3), \\ y_2 &= x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3, \qquad \text{(Ecuaciones de Cardano-Vieta)} \\ y_3 &= -x_1x_2x_3. \end{aligned}$$

Demostrar que en un entorno de una terna de raices reales (a,b,c) distintas dos a dos está definida una función de clase C^1 que expresa las raices en término de los coeficientes. Calcula una de las derivadas parciales de una de las componentes de dicha función.

EXAMEN FINAL DFVV (GRUPO **B**). 10 de septiembre de 2015

Teoría. (2 puntos) Elige y demuestra uno de los siguientes teoremas:

☐ **Teorema de Taylor**. ☐ **Teorema de a función implícita**.

Problema 1 Se considera la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^{2\alpha}\log(1+x^2)}{\sqrt{x^4+y^4}}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ \beta, & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

(a) Decide para que valores de α y β, la función f es continua en todo $\mathbb{R}^2$.

(b) Para dichos valores de α, β, escribe el valor de $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

(c) ¿Es diferenciable f en $(0,0)$ para todos los valores de α encontrados en el apartado anterior? En caso de que no, encuentra para que valores de α f es diferenciable en $(0,0)$. Razona la respuesta.

Problema 2: Sea la función $f(x,y) : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \frac{\sin(x^2)e^{-y^2}}{1+x^2+y^2}.$$

(a) ¿Decide si es diferenciable en $\mathbb{R}^2$? Si no lo es, describe la región donde lo sea. En dicha región escribe la derivada de f.
(b) Encuentra, si es posible, las derivadas parciales de f en el punto $A = (\sqrt{\pi}, 0)$.
(c) Encuentra el gradiente de f en el punto A anterior. ¿En que dirección decrece más rápidamente f en A?
(d) Encuentra la ecuación del plano tangente a la superficie $z = f(x,y)$ en el punto A anterior.
(d) ¿Que ángulo forman los planos tangente a f en $A = (\sqrt{\pi}, 0)$ y $B = (0,0)$?

Problema 3: Sea el conjunto $D := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \, : \, x^2+y^2+z^2 \leq 9 \;\; z \leq 1\}$ y sea $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x,y) = (x+y)^2 + (z+1)^2 + 4$.

(a) Encuentra todos los puntos singulares f en D.

(b) Cuales de dichos puntos singulares son extremos (máximos y mínimos) relativos de f en D.

(c) Prueba que f tiene extremos absolutos en D. Calcúlalos razonadamente.

1º PARCIAL DFVV (GRUPO **B**). 23 de noviembre de 2015

Apellidos, Nombre: ____

Teoría. (3 Puntos) Elige y demuestra uno de los siguientes teoremas:

☐ **Teorema de Schwarz** ☐ **Teorema del valor medio**

Problema 1. ***(3 ptos.)*** *Sea* $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \mapsto \mathbb{R}$, $f(x,y) = \dfrac{|x|^\alpha \arcsin y}{\sqrt{x^2+2y^2}}$, $\alpha > 0$.

1. *Calcula, si es posible, los límites* $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ *y* $\lim_{(x,y)\to(1,1)} f(x,y)$.
2. *¿Para qué valores de* α *se puede definir* f *en* $(0,0)$ *de forma que* f *sea continua en* $\mathbb{R}^2$*? Justifica la respuesta.*
3. *Calcula, si es posible, las derivadas parciales de* f *en* $(0,0)$.
4. *¿Para que valores de* α f *es diferenciable en* $(0,0)$*? Justifica la respuesta y calcula la derivada total (diferencial) de* f *en* $(0,0)$ *si existe.*

Problema 2. ***(4 ptos.)****Sea* $g : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, $g(x,y,z) = -y\sin(z+x) + z^3 e^{x^2+y^2} + xyz$.

1. *Decide si* g *es diferenciable en* $\mathbb{R}^2$*. Justifica la respuesta.*
2. *Calcula las derivadas parciales* $\frac{\partial g}{\partial x}$, $\frac{\partial g}{\partial y}$ *y* $\frac{\partial g}{\partial z}$.
3. *¿Cuánto vale la derivada* g *en el punto* $(\pi/2,1,0)$ *según la dirección del vector* $(-3,0,4)$.
4. *¿En que dirección es máxima la variación de* g *en dicho punto* $(\pi/2,1,0)$*? ¿Y mínima?*
5. *Escribe la expresión para el plano tangente a la superficie definida por* $w = g(x,y,z)$ *en el punto* $(\pi/2,1,0)$*?*
6. *Escribe el polinomio de Taylor de orden 2 en el punto* $(\pi/2,1,0)$.

Apellidos, Nombre: ____

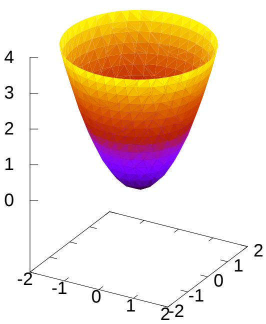
Teoría. (3 puntos) Demuestra el **Teorema de la función implícita**.

Problema 1. 4 puntos: Sea la función $f : A \subset \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$,

$$f(x, y, z) = z^2 - 2z + 2y^2 + 4x^2 - 3,$$

donde A es la región definida por (paraboloide elíptico)

$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ x^2 + y^2 \leq z \leq 4\}$.



1. Calcula todos los puntos críticos de dicha función.
2. ¿Alcanza f su máximo y mínimo globales en A? Justifica tu respuesta.
3. Calcula, si existen, dichos máximo y mínimo globales de f.

Problema 2. 3 puntos: Sea la ecuación $e^{z^2-1} + (xe^{y^2} + e^{x^2}y)z - 1 = 0$.

1. Para que valores de $a \in \mathbb{R}$ la ecuación anterior define una función $z = f(x, y)$ en el entorno U del punto $(0, 0, a)$. ¿Para alguno de dichos puntos la función $z = f(x, y)$ es diferenciable? ¿Cuántas veces? Justifica la respuesta.
2. Calcula, si es posible, las derivadas parciales $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$ en el entorno de los puntos obtenidos en el apartado 1.
3. Escribe, si es posible, la ecuación del plano tangente a la curva $z = f(x, y)$ en los puntos obtenidos en el apartado 1.

EXAMEN FINAL DFVV (GRUPO **B**). 20 de enero de 2016

Apellidos, Nombre: ______________________________

Teoría. (2 puntos) Elige y demuestra uno de los siguientes teoremas:

☐ **de Heffter-Young**. ☐ **Teorema de la función implícita**.

Problema 1: 3 puntos Sea la función $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|x|^\alpha \arctan(y)}{x^4 + 2y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0)\ . \end{cases}$$

1. Prueba que f es continua en todo su dominio para $\alpha > 2$.
2. Encuentra, si existen, las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ en $\mathbb{R}^2$.
3. Decide para que valores de α f es diferenciable $(0,0)$. ¿Y en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$?

Problema 2: 1 punto

Estudiar el límite $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x|y|^{3/2})}{|x|^2 + |y|}$.

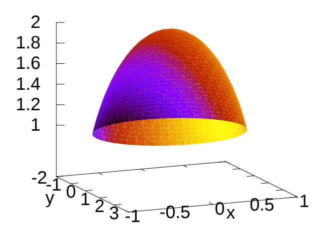
Problema 3: 4 puntos

Sea la función $f : A \subset \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$,

$$f(x,y,z) = z^2 - 2z + y^2 - 2y + 2x^2 - 3.$$

donde A es la región definida por

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ 4x^2 + y^2 + z^2 \leq 4,\ z \geq 1\}.$$



1. Calcula todos los puntos críticos de dicha función.
2. ¿Alcanza f su máximo y mínimo globales en A? Justifica tu respuesta.
3. Calcula, si existen, dichos máximo y mínimo globales de f.

Recuperación parcial 1 DFVV (GRUPO **B**). 20 de enero de 2016

Apellidos, Nombre: ____

Teoría. (2 puntos) Elige y demuestra uno de los siguientes teoremas:

☐ **de Heffter-Young**. ☐ **Teorema de Taylor**.

Problema 1. 3.5 puntos: Sea la función $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|x|^\alpha \arctan(y)}{x^4 + 2y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0)\ . \end{cases}$$

1. Prueba que f es continua en todo su dominio para $\alpha > 2$.
2. Encuentra, si existen, las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ en $\mathbb{R}^2$.
3. Decide para que valores de α f es diferenciable $(0,0)$. ¿Y en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$?

Problema 2. 1 punto:

Estudiar el límite $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x|y|^{3/2})}{|x|^2 + |y|}$.

Problema 2. 3.5 puntos: Sea la función

$$g : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R},\ g(x,y,z) = x^2 + ye^{x\,z}.$$

1. Decide si g es diferenciable en $\mathbb{R}^2$. Justifica la respuesta.
2. Calcula las derivadas parciales $\frac{\partial g}{\partial x}$, $\frac{\partial g}{\partial y}$ y $\frac{\partial g}{\partial z}$.
3. ¿Cuánto vale la derivada g en el punto $(1,2,0)$ según la dirección del vector $(3,0,-4)$.
4. ¿En que dirección es máxima la variación de g en dicho punto $(1,2,0)$? ¿Y mínima?
5. Escribe la expresión para el plano tangente a la superficie definida por $w = g(x,y,z)$ en el punto $(1,2,0)$.
6. Escribe el polinomio de Taylor de orden 2 en el punto $(1,2,0)$

Recuperación 2º parcial DFVV (GRUPO **B**). 20 de enero de 2016

Apellidos, Nombre: ____

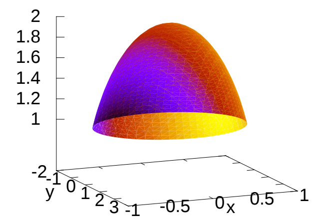
Teoría. (2 puntos) Demuestra el **Teorema de la función implícita**.

Problema 1. 4 puntos: Sea la función $f : A \subset \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$,

$$f(x, y, z) = z^2 - 2z + y^2 - 2y + 2x^2 - 3.$$

donde A es la región definida por

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3,\ 4x^2 + y^2 + z^2 \leq 4,\ z \geq 1\}.$$



1. Calcula todos los posibles puntos críticos de dicha función.
2. ¿Alcanza f su máximo y mínimo globales en A? Justifica tu respuesta.
3. Calcula, si existen, dichos máximo y mínimo globales de f.

Problema 2. 4 puntos: Sea la ecuación $x^2z - z^2x + x\cos(xz^2) - 1 = 0$

1. Para que valores de $a, b \in \mathbb{R}$ la ecuación anterior define una función $z = f(x, y)$ en el entorno U del punto $(a, b, 0)$. ¿Es para alguno de dichos puntos la función $z = f(x, y)$ diferenciable? ¿Cuántas veces? Justifica la respuesta.
2. Calcula las derivadas parciales $\frac{\partial z}{\partial x}$ y $\frac{\partial z}{\partial y}$ en los puntos anteriores donde sea posible.
3. En que dirección es máxima la variación de $z = f(x, y)$ en el punto $(1, 1, 0)$.

SUBIR NOTA DFVV (GRUPO **B**). 20 de enero de 2016

Apellidos, Nombre: ____

Problema 1. 2 puntos: Sea la función $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|x|^\alpha \arctan(y)}{x^4 + 2y^2} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0)\ . \end{cases}$$

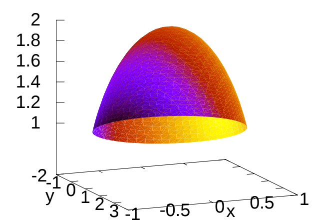
1. Prueba que f es continua en todo su dominio para $\alpha > 2$.
2. Decide para que valores de α f es diferenciable $(0,0)$. ¿Y en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$?

Problema 2. 4 puntos: Sea la función $f : A \subset \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$,

$$f(x,y,z) = z^2 - 2z + y^2 - 2y + 2x^2 - 3.$$

donde A es la región definida por

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3,\ 4x^2 + y^2 + z^2 \leq 4,\ z \geq 1\}.$$



1. Calcula todos los posibles extremos locales de dicha función.
2. Calcula, si existen, dichos máximo y mínimo globales de f. Justifica tu respuesta.

Problema 3. 1 punto: Estudiar el límite $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin(x|y|^{3/2})}{|x|^2 + |y|}$.

EXAMEN FINAL DFVV (GRUPO **B**). 1 de septiembre de 2016

Apellidos, Nombre: ____

Teoría. (2 puntos) Elige y demuestra uno de los siguientes teoremas:

☐ **de Schwarz**. ☐ **Condición suficiente de extremo)**.

Problema 1: 3 puntos Sea la función $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|y|^{\alpha} \arcsin(2x)}{4x^2 + y^4} & \text{si} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si} \quad (x,y) = (0,0) \ . \end{cases}$$

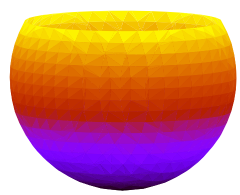
1. ¿Para qué valores de α f es continua en todo su dominio?.
2. Encuentra, si existen, las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ en $\mathbb{R}^2$.
3. Decide para que valores de α f es diferenciable $(0,0)$. ¿Y en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$? Justifica tu respuesta.

Problema 2: 1 punto

Estudiar el límite $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \frac{y(x - \sin(x))}{x^4 + 3y^2}$.

Problema 3: 4 puntos Sea la función $f : A \subset \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$,

región A



$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 1,$$

donde A es la región definida por

$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \ x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, \ z \leq \sqrt{3}\}$.

1. Calcula todos los posibles extremos locales de dicha función.
2. ¿Alcanza f su máximo y mínimo globales en A? Justifica tu respuesta.
3. Calcula, si existen, dichos máximo y mínimo globales de f.

$1^{\underline{o}}$ PARCIAL DFVV (GRUPO **B**). 30 de noviembre de 2017

Apellidos, Nombre: ____

Teoría. (3 Puntos) Elige y demuestra uno de los siguientes teoremas:

☐ De la equivalencia de las normas en $\mathbb{R}^n$ ☐ Del valor medio

Problema 1. ***(3 ptos.)*** *Sea* $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \mapsto \mathbb{R}$, $f(x,y) = \dfrac{|x|^\alpha \cos(x) \arcsin(xy)}{\sqrt{3x^2+y^2}}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. *Demuestra que para* $\alpha > -1$ *existe el límite* $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.
2. *¿Qué valor ha de tomar* f *en* $(0,0)$ *para que sea continua en* $\mathbb{R}^2$*? Justifica la respuesta*
3. *Calcula, si es posible, las derivadas parciales de* f *en* $(0,0)$.
4. *¿Para que valores de* α f *es diferenciable en* $(0,0)$*? Justifica la respuesta y calcula la derivada (diferencial) de* f *en* $(0,0)$ *si existe.*
5. *¿Es diferenciable para* $\alpha = 0$*? Justifica la respuesta.*

Problema 2. ***(4 ptos.)****Sea* $g : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, $g(x,y) = \dfrac{x^2\cos(y) + y^2\cos(x)}{2}$.

1. *Decide si* g *es diferenciable en* $\mathbb{R}^2$*. Justifica la respuesta.*
2. *Calcula las derivadas parciales* $\frac{\partial g}{\partial x}$ *y* $\frac{\partial g}{\partial y}$.
3. *¿Cuánto vale la derivada de* g *en el punto* $(0, \pi/4)$ *según la dirección del vector* $(1,-1)$.
4. *¿En que dirección es máxima la variación de* g *en dicho punto* $(0,\pi/4)$*? ¿Y mínima?*
5. *Escribe la expresión para el plano tangente a la superficie definida por* $z = g(x,y)$ *en el punto* $(0,\pi/4)$*?*
6. *Escribe el polinomio de Taylor de orden 2 en el punto* $(0,\pi/4)$.

2º Parcial DFVV (GRUPO **B**). 11 de enero de 2017

Apellidos, Nombre: ____

Teoría. (2 puntos) Demuestra el **Teorema de la función implícita**.

Problema 1. ***(5 ptos.)***

1. *Dada la elipse de ecuación* $x^2 - xy + y^2 = 1$, *encuentra los puntos más cercanos y alejados del punto* $(2, 2)$.

   Puntos más cercanos: ______________ , ______________ ...

   Puntos más alejados: ______________ , ______________ ...

2. *Sea* $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 + 4y - 4$.

   a) *Decide si* f *tiene extremos relativos en* $\mathbb{R}^2$. *En caso de que los tenga calcúlalos.*

   ¿Tiene extremos? _____.

   ¿Dónde? ______________, ______________ ...

   b) *Decide si* f *tiene extremos absolutos sobre la circunferencia* $x^2 + y^2 = 9$ *y en caso de tenerlos encuentra dónde se encuentran y cuáles son sus valores.*

   ¿Tiene extremos? _____.

   Máximos locales ______________, ______________, ______________, ...

   Mínimos locales ______________, ______________ , ______________ ...

Problema 2. ***(3 ptos.)*** *Sea la ecuación*

$$F(x,y,z) = x^2\, e^{-z+y^2+a} + x^2\, y^2\, z^2 - x^3\, y, \qquad a \in \mathbb{R}.$$

1. *¿Para qué valores de a la ecuación anterior define una función $z = f(x,y)$ en el entorno U del punto $(1,1,0)$? Justifica la respuesta.*

   Valor de a ______.

2. *¿Cuántas veces podemos derivar la función resultante $z = f(x,y)$ en el entorno U del punto $(1,1,0)$? Justifica la respuesta.*

   No. de veces: ______.

3. *Calcula las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ en dicho punto.*

   $$\frac{\partial f}{\partial x} =$$

   $$\frac{\partial f}{\partial y} =$$

4. *Calcula la derivada direccional de f en el punto $(1,1)$ según la dirección $u = (2,-1)$.*

   $D_u(f(1,1) =$

5. *Escribe, si es posible, el plano tangente a la superficie definida por la ecuación $F(x,y,z) = 0$ en el punto $(1,1,0)$.*

Exámenes Parciales 1 y 2 de problemas DFVV (GRUPO **A**).2017/2018

Problema 1. ***(2.5 ptos.)***

Sea $f : [-1,1] \times [-1,1] \setminus \{(0,0)\} \mapsto \mathbb{R}$, $f(x,y) = \dfrac{|y|^{\alpha}\cos(x)\sin(x)}{\sin(x^2)+\sin(y^2)}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. *Demuestra que para* $\alpha > 1$ *existe el límite* $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.
2. *¿Qué valor ha de tomar* f *en* $(0,0)$ *para que sea continua en* $\mathbb{R}^2$*? Justifica la respuesta*
3. *Calcula, si es posible, las derivadas parciales de* f *en* $(0,0)$.
4. *Demuestra que para* $\alpha > 2$ f *es diferenciable en* $(0,0)$*? Justifica la respuesta.*
5. *¿Es diferenciable para* $\alpha = 2$*? Justifica la respuesta.*

Problema 2. ***(2.5 ptos.)****Sea* $g : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, $g(x,y) = xe^y + ye^x + 2xy$.

1. *Decide si* g *es diferenciable en* $\mathbb{R}^2$*. Justifica la respuesta.*
2. *Calcula, si es posible, las derivadas parciales* $\frac{\partial g}{\partial x}$ *y* $\frac{\partial g}{\partial y}$*, así como todas las derivadas parciales de orden 2.*
3. *¿Cuánto vale la derivada* g *en el punto* $(0,0)$ *según la dirección del vector* $(2,1)$.
4. *Escribe el polinomio de Taylor de orden 2 en el punto* $(0,0)$.

Problema 3. ***(2.5 ptos.)*** *Sea* $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2 + 4y - 4$.

1. *Decide si* f *tiene extremos relativos en* $\mathbb{R}^2$*. En caso de que los tenga calcúlalos.*
2. *Sea la elipse de ecuación* $2x^2 + 4y^2 = 1$*. Decide si* f *tiene extremos absolutos sobre dicha elipse y en caso de tenerlos encuentra dónde se encuentran y cuál es su valor.*

Problema 4. ***(2.5 ptos.)*** *Sea la ecuación* $F(x,y,z) = -3xe^{z^2+y^2-1} + x^2z^2 + 3y^2z - a = 0$, *con* $a \in \mathbb{R}$.

1. *¿Para qué valores de* a *la ecuación anterior define una función* $z = f(x,y)$ *en el entorno* U *del punto* $(0,1,1)$*? Justifica la respuesta.*
2. *¿Cuántas veces podemos derivar la función resultante* $z = f(x,y)$ *en el entorno* U *del punto* $(0,1,1)$*? Justifica la respuesta.*
3. *Calcula las derivadas parciales* $\frac{\partial f}{\partial x}$ *y* $\frac{\partial f}{\partial y}$ *en dicho punto.*
4. *Calcula la derivada direccional de* f *en el punto* $(0,1)$ *según la dirección* $(1,1)$.
5. *Escribe, si es posible, el plano tangente a la superficie definida por la ecuación* $F(x,y,z) = 0$ *en el punto* $(0,1,1)$.

Examen final de DFVV (GRUPO **A**).2017/2018

Problema 1. *(3 ptos) Sea* $f:\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\mapsto\mathbb{R}$, $f(x,y)=\dfrac{|y|^\alpha e^{2x}\sin(x)}{\sqrt{x^2+2y^2}}$, $\alpha\in\mathbb{R}$.

1. *Demuestra que para* $\alpha>0$ *existe el límite* $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ *y calcúlalo.*
2. *¿Qué valor ha de tomar* f *en* $(0,0)$ *para que sea continua en* $\mathbb{R}^2$*? Justifica la respuesta*
   $f(0,0)=$
3. *Calcula cuando sea posible las derivadas parciales de* f *en* $(0,0)$.
   $f_x(0,0)=$
   $f_y(0,0)=$
4. *¿Para que valores de* α f *es diferenciable en* $(0,0)$*? Justifica la respuesta y calcula la derivada (diferencial) de* f *en* $(0,0)$ *si existe.* $Df(0,0)=$____________________
5. *¿Es diferenciable para* $\alpha=1$*?* _____ *Justifica la respuesta.*

Problema 2. *(4 ptos) Sea la superficie* S *de* $\mathbb{R}^3$ *definida por la fórmula* $x^2+2y^2+4z^2=9$.

1. *Sea la función* $f:S\mapsto\mathbb{R}$, $f(x,y,z)=x-y+\sqrt{3}\,z$ *definida sobre* S. *Encuentra todos los puntos críticos de* f *en* S *y decide si son extremos locales o puntos de silla.*

   Puntos ____________________, ____________________, ____________________, ...

   Puntos ____________________, ____________________, ____________________, ...

2. *¿Tiene* f *extremos absolutos sobre* S. *Justifica la respuesta y en caso de tenerlos encuéntralos. ¿Tiene extremos absolutos?* _____.

   Máximo _______________ *Mínimo* _______________

3. *Encuentra, si existen, los puntos de la superficie* S *más próximos y más alejados del punto* $(0,0,3)$.
   Puntos más cercanos: _______________ , _______________ ...

   Puntos más alejados: _______________ , _______________ ...

Problema 3. *(3 ptos)*
Sea la ecuación $F(x,y,z)=x^2\,y^2\,e^{z^2+y^2+x^2-a}+4\,x\,y\,z-x^4-3=0$, *con* $a\in\mathbb{R}$.

1. *¿Para qué valores de* a *la ecuación anterior define una función* $z=f(x,y)$ *en el entorno* U *del punto* $(1,2,0)$*? Justifica la respuesta.*

2. *¿Cuántas veces podemos derivar la función resultante* $z=f(x,y)$ *en el entorno* U *del punto* $(1,2,0)$*? Justifica la respuesta.*

3. *Calcula las derivadas parciales* $\frac{\partial f}{\partial x}$ *y* $\frac{\partial f}{\partial y}$ *en dicho punto.*

$$\frac{\partial f}{\partial x} =$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} =$$

4. *Calcula la derivada direccional de* f *en el punto* $(1, 2)$ *según la dirección* $(-1, 2)$.

5. *Escribe, si es posible, el plano tangente a la superficie definida por la ecuación* $F(x, y, z) = 0$ *en el punto* $(1, 2, 0)$.

6. *Escribe la expresión del polinomio de Taylor de orden 1 de* $f(x, y)$ *alrededor del punto* $(1, 2)$.

Apellidos ____________________________________ Nombre: _______________________
Instrucciones: Lee atentamente las instrucciones y marca con una cruz el examen elegido. En caso contrario el profesor elegirá.

☐ Recuperación 1º parcial ☐ Recuperación 2º parcial ☐ Examen final
☐ Examen para subir nota

El examen debe estar escrito con bolígrafo y debe ser legible y sin tachaduras. Cada uno de los exámenes consta de las siguientes partes:

Teoría. Demuestra uno de los siguientes teoremas:

1º prueba (3 puntos): ☐ **Schwarz** o ☐ **Teorema de Taylor con resto**.
2º prueba (2 puntos): **Condiciones necesarias y suficiente de extremos**.
Final (3 puntos): ☐ **Schwarz** o ☐ **Condición suficiente de extremos**.

Problemas
Recuperación 1º parcial: Problemas 1 (3 puntos) y 2 (4 puntos)
Recuperación 2º parcial: Problemas 3 (3 puntos) y 4 (5 puntos)
Examen final: Problemas 1 (3 puntos) y 4 (4 puntos).
Examen para subir nota: Problemas 4 (4 puntos), 5 (4 puntos) y 6 (2 puntos).

Problema 1. *Sea* $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \mapsto \mathbb{R}$, $f(x,y) = \dfrac{|x|^\alpha e^{3x^2} \arcsin(2x)}{\sqrt{2x^2+y^2}}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. *Demuestra si* $\alpha > 0$ *existe el límite* $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ *y calcúlalo.*
2. *¿Qué valor ha de tomar* f *en* $(0,0)$ *para que sea continua en* $\mathbb{R}^2$*? Justifica la respuesta*

   $f(0,0) =$

3. *Calcula cuando sea posible las derivadas parciales de* f *en* $(0,0)$.

   $f_x(0,0) =$

   $f_y(0,0) =$

4. *¿Para que valores de* α f *es diferenciable en* $(0,0)$*? Justifica la respuesta y calcula la derivada (diferencial) de* f *en* $(0,0)$ *si existe.*

   $Df(0,0) =$____________________

5. *¿Es diferenciable para* $\alpha = 1$*?* _____ *Justifica la respuesta.*

Problema 2. *Sea* $g : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$, $g(x,y,z) = (y^2+x^2)\, e^{z^2-1} - 2\, e^{x^2-1}\, (z^2+y^2)$.

1. *Decide si* g *es diferenciable en* $\mathbb{R}^2$. *Justifica la respuesta.*
2. *Calcula las derivadas parciales* $\frac{\partial g}{\partial x}$, $\frac{\partial g}{\partial y}$ *y* $\frac{\partial g}{\partial z}$.
3. *¿Cuánto vale la derivada* g *en el punto* $(1,0,1)$ *según la dirección del vector* $(3,4,0)$.

4. *¿En que dirección es máxima la variación de g en dicho punto $(1,0,1)$? ¿Y mínima?*

5. *Escribe la expresión para el plano tangente a la superficie definida por $w = g(x,y,z)$ en el punto $(1,0,1)$?*

6. *Escribe el polinomio de Taylor de orden 2 de g en el punto $(0,0,0)$.*

Problema 3. *Sea $F(x,y,z) = x^2y^2e^{z^2+y^2+x^2-a} + 4xyz - x^4 - 3 = 0$, $a \in \mathbb{R}$.*

1. *¿Para qué valores de a la ecuación anterior define una función $z = f(x,y)$ en el entorno U del punto $(1,2,0)$? Justifica la respuesta.*

2. *¿Cuántas veces podemos derivar la función resultante $z = f(x,y)$ en el entorno U del punto $(1,2,0)$? Justifica la respuesta.*

3. *Calcula las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ en dicho punto.*

   $$\frac{\partial f}{\partial x} =$$
   $$\frac{\partial f}{\partial y} =$$

4. *Calcula la derivada direccional de f en el punto $(1,2)$ según la dirección $(-1,2)$.*

5. *Escribe, si es posible, el plano tangente a la superficie definida por la ecuación $F(x,y,z) = 0$ en el punto $(1,2,0)$.*

6. *Escribe la expresión del polinomio de Taylor de orden 1 de $f(x,y)$ alrededor del punto $(1,2)$.*

Problema 4. *Sea la superficie S de $\mathbb{R}^3$ definida por $x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 9$.*

1. *Sea la función $f : S \mapsto \mathbb{R}$, $f(x,y,z) = x - y + \sqrt{3}\,z$ definida sobre S. Encuentra todos los puntos críticos de f en S y decide si son extremos locales o puntos de silla.*

   Puntos ________________, ________________, ________________, . . .

   Puntos ________________, ________________, ________________, . . .

2. *¿Tiene f extremos absolutos sobre S. Justifica la respuesta y en caso de tenerlos encuéntralos. ¿Tiene extremos absolutos?* _____.

   Máximo absoluto ____________ *Mínimo absoluto* ____________

3. *Encuentra, si existen, los puntos de la superficie S más próximos y más alejados del punto $(0,0,3)$.*

   Puntos más cercanos: ____________ , ____________ . . .

   Puntos más alejados: ____________ , ____________ . . .

Problema 5. *Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ y sea* $f(x,y) = \dfrac{|x|^\alpha \cos(2x)\arctan(x)}{\sin(x^2) + \sin(y^2)}$.

1. *Encuentra la mayor región de $\mathbb{R}^2$ donde se pueda definir f.*

2. *En los puntos donde no esté definida decide si para algún valor de α se puede redefinir de forma que sea continua. Justifica la respuesta*
3. *Calcula, si es posible, las derivadas parciales de f en $(0,0)$.*
4. *Demuestra que para $\alpha > 2$ f es diferenciable en $(0,0)$? Justifica la respuesta.*
5. *¿Es diferenciable para $\alpha = 2$? Justifica la respuesta.*

Problema 6. *Calcula, si es posible, el siguiente límite*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+3y^2+6xy-5xy^2}{\sqrt{x^2+2y^2}} =$$

Problema 1. *(3 puntos):*
Sea $F(x,y,z) = x^2y^2\cos x^2 + y^2 + 2z^2 - a + 4xyz - x^3 - 3 = 0$, $a \in \mathbb{R}$.

1. *¿Para qué valores de a la ecuación anterior define una función* $z = f(x,y)$ *en el entorno* U *del punto* $(1,-2,0)$*? Justifica la respuesta.*
2. *¿Cuántas veces podemos derivar la función resultante* $z = f(x,y)$ *en el entorno* U *del punto* $(1,-2,0)$*? Justifica la respuesta.*
3. *Calcula las derivadas parciales* $\frac{\partial f}{\partial x}$ *y* $\frac{\partial f}{\partial y}$ *en dicho punto* $(1,-2,0)$.

   $\dfrac{\partial f}{\partial x} =$

   $\dfrac{\partial f}{\partial y} =$
4. *Calcula la derivada direccional de* f *en el punto* $(1,-2)$ *según la dirección* $(2,1)$.
5. *Escribe, si es posible, el plano tangente a la superficie definida por la ecuación* $F(x,y,z) = 0$ *en el punto* $(1,-2,0)$.
6. *Escribe la expresión del polinomio de Taylor de orden 1 de* $f(x,y)$ *alrededor del punto* $(1,-2)$.

Problema 2. *(3 puntos): Sea* $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \mapsto \mathbb{R}$, $f(x,y) = \dfrac{\sin(|xy|)|y|^\alpha \cos x^2}{\sqrt{x^2+5y^2}}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

1. *Demuestra que si* $\alpha > 0$ *existe el límite* $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ *y calcúlalo.*
2. *¿Qué valor ha de tomar* f *en* $(0,0)$ *para que sea continua en* $\mathbb{R}^2$*? Justifica la respuesta*

   $f(0,0) =$
3. *Calcula cuando sea posible las derivadas parciales de* f *en* $(0,0)$.

   $f_x(0,0) =$

   $f_y(0,0) =$
4. *¿Para que valores de* α f *es diferenciable en* $(0,0)$*? Justifica la respuesta y calcula la derivada (diferencial) de* f *en* $(0,0)$ *si existe.*

   $Df(0,0) =$ ....
5. *¿Es diferenciable para* $\alpha = 1$*?* ______ *Justifica la respuesta.*

Problema 3. *(4 puntos): Sea la región* S *de* $\mathbb{R}^3$ *definida por* $4x^2 + 2y^2 + 4z^2 \le 9$.

1. *Sea la función* $f : S \mapsto \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = x + y + z$ *definida sobre* S. *Encuentra todos los puntos críticos de* f *en* S *y decide si son extremos locales o puntos de silla.*

   Puntos ________________, ________________, ________________, ...

   Puntos ________________, ________________, ________________, ...

2. *¿Tiene* f *extremos absolutos en* S. *Justifica la respuesta y en caso de tenerlos encuéntralos. ¿Tiene extremos absolutos?* ____.

   Máximo absoluto ____________ *Mínimo absoluto* ____________

3. *Encuentra, si existen, los puntos de la superficie de* S *más próximos y más alejados del punto* $(3, 0, 0)$.

   Puntos más cercanos: ____________ , ____________ ...

   Puntos más alejados: ____________ , ____________ ...

Apellidos, Nombre: ____

Teoría. (3 Puntos) Elige y demuestra uno de los siguientes teoremas:

☐ **Regla de la cadena** ☐ **Teorema del valor medio**

Nota importante: Todas las respuestas deben estar escritas en la hoja del examen

Problema 1. ***(3 ptos.)*** *Sea* $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \mapsto \mathbb{R}$, $f(x,y) = \dfrac{|y|^\alpha e^{1-x^2} \sin(2x)}{\sqrt{2x^2+y^2}}$, $\alpha \geq 0$.

1. *Calcula, si es posible, los límites*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \qquad \lim_{(x,y)\to(1,1)} f(x,y) = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

2. *¿Para qué valores de* α *se puede definir* f *en* $(0,0)$ *de forma que* f *sea continua en* $\mathbb{R}^2$*? Justifica la respuesta.*

3. *Calcula, si es posible, las derivadas parciales de* f *en* $(0,0)$.

   $f_x(0,0) =$

   $f_y(0,0) =$

4. *¿Para que valores de* α f *es diferenciable en* $(0,0)$*? Justifica la respuesta y calcula, si existe, la derivada total (diferencial) de* f *en* $(0,0)$.

Problema 2. ***(4 ptos.)****Sea* $g : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, $g(x, y, z) = \left(e^x \sin(\pi y) + \cos(\pi x)\, e^{y-1}\right) z$

1. *Decide si* g *es diferenciable en* $\mathbb{R}^2$. *Justifica la respuesta.*

2. *Calcula las derivadas parciales* $\frac{\partial g}{\partial x}$, $\frac{\partial g}{\partial y}$ *y* $\frac{\partial g}{\partial z}$.

   $g_x(x, y, z) =$

   $g_y(x, y, z) =$

   $g_z(x, y, z) =$

3. *¿Cuánto vale la derivada de* g *en el punto* $(0, 1, 1)$ *según la dirección del vector* $(-3, 0, 4)$.

4. *Encuentra la dirección de máxima la variación de* g *en dicho punto* $(0, 1, 1)$. *Encuentra la dirección donde dicha variación es mínima. Justifica la respuesta.*

5. *Escribe la expresión para el plano tangente a la superficie definida por* $w = g(x, y, z)$ *en el punto* $(0, 1, 1)$*?*

6. *Escribe el polinomio de Taylor de orden 2 en el punto* $(0, 1, 1)$.

Apellidos, Nombre: ____

Teoría. (3 Puntos) Elige y demuestra uno de los siguientes teoremas:

☐ **Teorema del valor medio** ☐ **de Taylor con resto de Lagrange**

Problema 1. ***(3 ptos.)*** *Sea* $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \mapsto \mathbb{R}$, $f(x,y) = \dfrac{|2x|^\alpha \cos(x^2)\log(1+y^2)}{|x|+2y^2}$, $\alpha \geq 0$.

1. *Calcula, si es posible, los límites*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \underline{\hspace{3cm}} \qquad \lim_{(x,y)\to(1,1)} f(x,y) = \underline{\hspace{3cm}}$$

2. *¿Para qué valores de* α *se puede definir* f *en* $(0,0)$ *de forma que* f *sea continua en* $\mathbb{R}^2$*? Justifica la respuesta.*

3. *Calcula, si es posible, las derivadas parciales de* f *en* $(0,0)$.

   $f_x(0,0) =$

   $f_y(0,0) =$

4. *¿Para que valores de* α f *es diferenciable en* $(0,0)$*? Justifica la respuesta y calcula, si existe, la derivada total (diferencial) de* f *en* $(0,0)$.

Problema 2. ***(4 ptos.)****Sea* $g : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, $g(x, y, z) = \frac{\left(e^{2x}\cos y + e^{y}\sin(2x)\right)z}{2}$

1. *Decide si* g *es diferenciable en* $\mathbb{R}^2$. *Justifica la respuesta.*

2. *Calcula las derivadas parciales* $\frac{\partial g}{\partial x}$, $\frac{\partial g}{\partial y}$ *y* $\frac{\partial g}{\partial z}$.

   $g_x(x, y, z) =$

   $g_y(x, y, z) =$

   $g_z(x, y, z) =$

3. *¿Cuánto vale la derivada de* g *en el punto* $(0, 0, 2)$ *según la dirección del vector* $(1, 1, 2)$.

4. *¿En que dirección es máxima la variación de* g *en dicho punto* $(0, 0, 2)$*? ¿Y mínima? Justifica la respuesta*

5. *Escribe la expresión para el plano tangente a la superficie definida por* $w = g(x, y, z)$ *en el punto* $(0, 0, 2)$*?*

6. *Escribe el polinomio de Taylor de orden 2 en el punto* $(0, 0, 2)$.

2^{o} Parcial DFVV (GRUPO **A**). 17 de enero de 2019

Apellidos, Nombre: ____

Teoría. (2 puntos) Demuestra la **Condición suficiente de extremo**.

Problema 1. ***(5 ptos.)***

1. *Dado la esfera hueca de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 3$, encuentra los puntos más cercanos y alejados del punto $(2, 2, 2)$.*

   Puntos más cercanos: ____________ , ____________ ...

   Puntos más alejados: ____________ , ____________ ...

2. *Sea $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, $f(x, y) = 5x + 5y^2$.*

   a) *Decide si f tiene extremos relativos en $\mathbb{R}^2$. En caso de que los tenga calcúlalos.*

   ¿Tiene extremos? ____.

   ¿Dónde? ____________, ____________ ...

   b) *Encuentra todos los puntos críticos de f sobre la la circunferencia $T : x^2 + y^2 - 3x = 4$ y decide si son extremos o puntos silla.*

   Máximos locales: ____________, ____________, ____________, ...

   Mínimos locales: ____________, ____________, ____________ ...

   Puntos silla: ____________, ____________, ____________ ...

   ¿Tiene f extremos globales sobre T? ____. *Justifica la respuesta y en caso de tenerlos encuéntralos razonadamente.*

   Máximo absoluto: ________________, *valor de la función* ____________

   Mínimo absoluto: ________________, *valor de la función* ____________

Problema 2. ***(3 ptos.)*** *Sea la ecuación*

$$F(x,y,z) = xy^2 \sin(2z+a) + x^2 y \cos(2z+a) \quad a \in \mathbb{R}.$$

1. *¿Para qué valores de a la ecuación anterior define una función $z = f(x,y)$ en el entorno U del punto $A = (1,-1,0)$? Justifica la respuesta.*

   Valor de a _____.

2. *¿Cuántas veces podemos derivar la función resultante $z = f(x,y)$ en el entorno U del punto A? Justifica la respuesta.*

   No. de veces: _____.

3. *Calcula las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ en dicho punto A.*

   $$\frac{\partial f}{\partial x} =$$

   $$\frac{\partial f}{\partial y} =$$

4. *Calcula la derivada direccional de $z = f(x,y)$ en el punto $a = (1,-1)$ según la dirección $u = (-4,3)$.*

   $D_u(f(a))$

5. *Escribe, si es posible, el plano tangente a la superficie definida por la ecuación $F(x,y,z) = 0$ en el punto A.*

2º Parcial DFVV (GRUPO **B**). 18 de enero de 2019

Apellidos, Nombre: ____

Teoría. (2 puntos) Demuestra el **Teorema de la función implícita**.

Problema 1. *(5 ptos.)*

1. *Dado el elipsoide de ecuación* $x^2 + 2y^2 + z^2 = 4$*, encuentra los puntos más cercanos y alejados del punto* $(0, 0, 4)$*.*

   Puntos más cercanos: ____________ , ____________ ...

   Puntos más alejados: ____________ , ____________ ...

2. *Sea* $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$*,* $f(x, y) = x^2 + y$*.*

   a) *Decide si* f *tiene extremos relativos en* $\mathbb{R}^2$*. En caso de que los tenga calcúlalos.*

      ¿Tiene extremos? _____.

      ¿Dónde? ____________, ____________ ...

   b) *Encuentra todos los puntos críticos de* f *sobre la la circunferencia* $T : y^2 - 3y + x^2 = 4$ *y decide si son extremos o puntos silla.*

      Máximos locales: ____________, ____________, ____________, ...

      Mínimos locales: ____________, ____________, ____________ ...

      Puntos silla: ____________, ____________, ____________ ...

      ¿Tiene f *extremos globales sobre* T*?* _____. *Justifica la respuesta y en caso de tenerlos encuéntralos razonadamente.*

      Máximo absoluto: ________________, *valor de la función* ____________

      Mínimo absoluto: ________________, *valor de la función* ____________

Problema 2. ***(3 ptos.)*** *Sea la ecuación*

$$F(x, y, z) = x^2 z e^{2z+a} + xy^2 e^{2z} - 1 \quad a \in \mathbb{R}.$$

1. *¿Para qué valores de a la ecuación anterior define una función $z = f(x, y)$ en el entorno U del punto $A = (1, 0, 1)$? Justifica la respuesta.*

   Valor de a _____.

2. *¿Cuántas veces podemos derivar la función resultante $z = f(x, y)$ en el entorno U del punto A? Justifica la respuesta.*

   No. de veces: _____.

3. *Calcula las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ en dicho punto A.*

   $$\frac{\partial f}{\partial x} =$$

   $$\frac{\partial f}{\partial y} =$$

4. *Calcula la derivada direccional de $z = f(x, y)$ en el punto $a = (1, 0)$ según la dirección $u = (-1, 1)$.*

   $D_u(f(a))$

5. *Escribe, si es posible, el plano tangente a la superficie definida por la ecuación $F(x, y, z) = 0$ en el punto A.*

Apellidos, Nombre: ____

Teoría. (2 Puntos) Elige y **demuestra uno** de los siguientes teoremas:

☐ **Acotación de las aplicaciones lineales** ☐ **Heffter-Young**

Nota importante: Todas las respuestas deben estar escritas en la hoja del examen

Problema 1. ***(2 ptos.)*** *Sea $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ definida por*

$$f(x,y) = \frac{|y|^\alpha \cos(2xy)\log(1+2|xy|)}{\sqrt{x^2+3y^2}},\ (x,y) \neq (0,0),\ f(0,0) = \beta.$$

1. *Para que valores de α y β existen los límites siguientes y en su caso calcúlalos razonadamente:*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \qquad \lim_{(x,y)\to(0,1)} f(x,y) = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

2. *¿Se puede definir f en $(0,0)$ de forma que f sea continua en $\mathbb{R}^2$? En caso afirmativo, en que condiciones. Justifica la respuesta.*

3. *Calcula, si es posible, las derivadas parciales de f en $(0,0)$.*

$f_x(0,0) =$

$f_y(0,0) =$

4. *¿Para que valores de α y β f es diferenciable en $(0,0)$? Justifica la respuesta y calcula, si existe, la derivada total (diferencial) de f en $(0,0)$.*

Problema 2. ***(2.5 ptos.)*** *Sea la ecuación*

$$F(x,y,z) = 4x^2 \exp(z+y) - a \quad a \in \mathbb{R}.$$

1. *¿Para qué valores de a la ecuación anterior define una función $z = f(x,y)$ en el entorno U del punto $A = (1,-1,1)$?* ***Justifica*** *la respuesta. Valor de a _____.*

2. *¿Cuántas veces podemos derivar la función resultante $z = f(x,y)$ en el entorno U del punto A?* ***Justifica*** *la respuesta. No. de veces: _____.*

3. *Calcula las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ en un entorno de dicho punto A así como los valores en A.*
   $$\frac{\partial f}{\partial x} =$$
   $$\frac{\partial f}{\partial y} =$$

4. *Calcula la derivada direccional de $z = f(x,y)$ en $\boldsymbol{a} = (1,-1)$ según la dirección $u = (-2,1)$.*

   $D_u(f(\boldsymbol{a}))$

5. *Escribe, si es posible, el plano tangente a la superficie definida por la ecuación $F(x,y,z) = 0$ en el punto A.*

6. *Encuentra, si es posible, el polinomio de orden 2 de $z = f(x,y)$ en el punto $\boldsymbol{a} = (1,-1)$.*

Problema 3. ***(3.5 ptos.)***

1. *Dado el elipsoide de ecuación* $4z^2 + 2y^2 + (x-1)^2 = 9$, *usa el método de Lagrange para encontrar, si los tiene, los puntos más cercanos y alejados del punto* $(1, 0, 3)$.

   Puntos más cercanos: ______________ , ______________ ...

   Puntos más alejados: ______________ , ______________ ...

2. *Sea* $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, $f(x, y) = 4(x-1)^2 - 4y$.

   a) *Decide si* f *tiene extremos relativos en* $\mathbb{R}^2$. *En caso de que los tenga calcúlalos.*

   ¿Tiene extremos? _____.

   ¿Dónde? ______________, ______________ ...

   b) *Encuentra todos los puntos críticos de* f *sobre la la circunferencia* $T : y^2 - 3y + (x-1)^2 = 4$ *y decide si son extremos o puntos silla.*

   Máximos locales: ______________, ______________, ______________, ...

   Mínimos locales: ______________, ______________, ______________ ...

   Puntos silla: ______________, ______________, ______________ ...

   ¿Tiene f *extremos globales sobre* T*?* _____. *Justifica la respuesta y en caso de tenerlos encuéntralos razonadamente.*

   Máximo absoluto: __________________, *valor de la función* ______________

   Mínimo absoluto: __________________, *valor de la función* ______________

Apellidos, Nombre: ____

Teoría. (3 Puntos) Elige y **demuestra uno** de los siguientes teoremas:

☐ **Acotación de las aplicaciones lineales** ☐ **Heffter-Young**

Importante: Todas las respuestas deben estar escritas en la hoja del examen. **Duración** 2h15min

Problema 1. ***(3 ptos.)*** *Sea $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ definida por*

$$f(x,y) = \frac{|y|^\alpha \cos(2xy) \log(1 + 2|xy|)}{\sqrt{x^2 + 3y^2}}, \; (x,y) \neq (0,0), \; f(0,0) = \beta.$$

1. *Para que valores de α y β existen los límites siguientes y en su caso calcúlalos razonadamente:*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \underline{\hspace{3cm}} \qquad \lim_{(x,y)\to(0,1)} f(x,y) = \underline{\hspace{3cm}}$$

2. *¿Se puede definir f en $(0,0)$ de forma que f sea continua en $\mathbb{R}^2$? En caso afirmativo, en que condiciones. Justifica la respuesta.*

3. *Calcula, si es posible, las derivadas parciales de f en $(0,0)$.*

   $f_x(0,0) =$

   $f_y(0,0) =$

4. *¿Para que valores de α y β f es diferenciable en $(0,0)$? Justifica la respuesta y calcula, si existe, la derivada total (diferencial) de f en $(0,0)$.*

Problema 2. ***(4 ptos.)****Sea* $g : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$*,* $g(x, y, z) = xy\ \left(\sin x\, e^{z/2} + e^{2x}\ \cos(2y)\right)$

1. *Decide si* g *es diferenciable en* $\mathbb{R}^2$*. Justifica la respuesta.*

2. *Calcula las derivadas parciales* $\frac{\partial g}{\partial x}$*,* $\frac{\partial g}{\partial y}$ *y* $\frac{\partial g}{\partial z}$*.*

   $g_x(x, y, z) =$

   $g_y(x, y, z) =$

   $g_z(x, y, z) =$

3. *¿Cuánto vale la derivada de* g *en el punto* $A = (0, \pi, 0)$ *según la dirección del vector* $(1, 2, 2)$*.*

4. *¿En que dirección es máxima la variación de* g *en dicho punto* A*? ¿Y mínima? Justifica la respuesta*

5. *Escribe la expresión para el plano tangente a la superficie definida por* $w = g(x, y, z)$ *en el punto* A *anterior?*

6. *Escribe el polinomio de Taylor de orden 2 en el punto* A*.*

Apellidos, Nombre: ____

Teoría. (2 ptos) Demuestra la Condición necesaria y la suficiente de extremo. **Importante: Todas** las respuestas deben estar escritas en la hoja del examen. **Duración** 2h15min

Problema 1. ***(3 ptos.)*** *Sea la ecuación*

$$F(x, y, z) = 4x^2 \exp(z + y) - a \quad a \in \mathbb{R}.$$

1. *¿Para qué valores de a la ecuación anterior define una función $z = f(x, y)$ en el entorno U del punto $A = (1, -1, 1)$?* ***Justifica*** *la respuesta. Valor de a _____.*

2. *¿Cuántas veces podemos derivar la función resultante $z = f(x, y)$ en el entorno U del punto A?* ***Justifica*** *la respuesta. No. de veces: _____.*

3. *Calcula las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ en un entorno de dicho punto A así como los valores en A.*

   $$\frac{\partial f}{\partial x} =$$

   $$\frac{\partial f}{\partial y} =$$

4. *Calcula la derivada direccional de $z = f(x, y)$ en $\boldsymbol{a} = (1, -1)$ según la dirección $u = (-2, 1)$.*

   $D_u(f(\boldsymbol{a}))$

5. *Escribe, si es posible, el plano tangente a la superficie definida por la ecuación $F(x, y, z) = 0$ en el punto A.*

Problema 2. ***(5 ptos.)***

1. *Dado el elipsoide de ecuación $4z^2 + 2y^2 + (x-1)^2 = 9$, usa el método de Lagrange para encontrar, si los tiene, los puntos más cercanos y alejados del punto $(1, 0, 3)$.*

   Puntos más cercanos: ________________ , ________________ ...

   Puntos más alejados: ________________ , ________________ ...

2. *Sea $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, $f(x, y) = 4(x-1)^2 - 4y$.*

   a) *Decide si f tiene extremos relativos en $\mathbb{R}^2$. En caso de que los tenga calcúlalos.*

   ¿Tiene extremos? _____.

   ¿Dónde? ________________, ________________ ...

   b) *Encuentra todos los puntos críticos de f sobre la la circunferencia $T : y^2 - 3y + (x-1)^2 = 4$ y decide si son extremos o puntos silla.*

   Máximos locales: ________________, ________________, ________________, ...

   Mínimos locales: ________________, ________________, ________________ ...

   Puntos silla: ________________, ________________, ________________ ...

   ¿Tiene f extremos globales sobre T? _____. *Justifica la respuesta y en caso de tenerlos encuéntralos razonadamente.*

   Máximo absoluto: _____________________, *valor de la función* ________________

   Mínimo absoluto: _____________________, *valor de la función* ________________

Apellidos, Nombre: ____

Todas las respuestas (debidamente justificadas) deben estar escritas en las hojas del examen. **Duración** 1h45min

Teoría. (3 Puntos) Elige y demuestra uno de los siguientes teoremas:

☐ **Teorema de la equivalencia de las normas** ☐ **Teorema de Taylor**

Problema 1. ***(3 ptos.)*** *Sea* $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \mapsto \mathbb{R}$, $f(x,y) = \dfrac{|y|^\alpha \arctan(xy)}{\sqrt{x^2+2y^2}}$, $\alpha \geq 0$.

1. *Decide, razonadamente, para que valores de* α *existen los límite* $\lim\limits_{(x,y)\to(-1,1)} f(x,y)$ *y* $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ *y calcúlalos en caso de que existan.*

2. *¿Es posible definir* f *en* $(0,0)$ *de forma que sea continua en* $\mathbb{R}^2$*? Justifica la respuesta*

3. *Calcula, si es posible, las derivadas parciales de* f *en* $(0,0)$.

   $f_x(0,0) =$

   $f_y(0,0) =$

4. *¿Para que valores de* α f *es diferenciable en* $(0,0)$*? Justifica la respuesta y calcula la derivada (diferencial) de* f *en* $(0,0)$ *si existe.*

Problema 2. ***(4 ptos.)****Sea* $g : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, $g(x, y, z) = e^{x^2+2y^2+z^2-6}$.

1. *Decide si* g *es diferenciable en* $\mathbb{R}^2$. *Justifica la respuesta.*

2. *Calcula las derivadas parciales:*

   $$\frac{\partial g}{\partial x} =$$

   $$\frac{\partial g}{\partial y} =$$

   $$\frac{\partial g}{\partial z} =$$

3. *¿Cuánto vale la derivada de* g *en* $a = (0, 1, 2)$ *según la dirección del vector* $u = (1, 0, 1)$.

   $D_u g(a) =$

4. *¿En que dirección es máxima la variación de* g *en dicho punto* a*? ¿Y mínima?*

5. *Escribe la expresión para el plano tangente a la superficie definida por la función* $g(x, y, z)$ *en el punto* a *anterior?*

6. *Encuentra, razonadamente, el polinomio de Taylor de orden 2 de* g *en el punto* $b = (0, 0, 0)$.
   - ***Opcional:*** *Escribe el polinomio de Taylor de orden 2 en el punto* a.

Apellidos, Nombre: ____

Todas las respuestas (debidamente justificadas) deben estar escritas en las hojas del examen. **Duración** 1h45min

Teoría. (3 Puntos) Elige y demuestra uno de los siguientes teoremas:

☐ **Acotación de las aplicaciones lineales** ☐ **Teorema de Taylor**

Problema 1. ***(3 ptos.)*** *Sea* $f:\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\mapsto\mathbb{R}$, $f(x,y)=\dfrac{|y|^\alpha e^{x+y}\sin(2x)}{\sqrt{4x^2+y^2}}$, $\alpha\geq 0$.

1. *Decide, razonadamente, para que valores de* α *existen los límite* $\lim\limits_{(x,y)\to(-1/2,1)} f(x,y)$ *y* $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$ *y calcúlalos en caso de que existan.*

2. *¿Es posible definir* f *en* $(0,0)$ *de forma que sea continua en* $\mathbb{R}^2$*? Justifica la respuesta*

3. *Calcula, si es posible, las derivadas parciales de* f *en* $(0,0)$.

   $f_x(0,0)=$

   $f_y(0,0)=$

4. *¿Para que valores de* α f *es diferenciable en* $(0,0)$*? Justifica la respuesta y calcula la derivada (diferencial) de* f *en* $(0,0)$ *si existe.*

Problema 2. ***(4 ptos.)*** *Sea* $g : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$, $g(x,y,z) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} \sin\left(4x^2 + y^2 + z^2\right)$.

1. *Decide si* g *es diferenciable en* $\mathbb{R}^2$*. Justifica la respuesta.*

2. *Calcula las derivadas parciales:*

   $\dfrac{\partial g}{\partial x} =$

   $\dfrac{\partial g}{\partial y} =$

   $\dfrac{\partial g}{\partial z} =$

3. *¿Cuánto vale la derivada de* g *en* $a = (\sqrt{\pi}, -\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi})$ *según la dirección del vector* $u = (-1, 1, 0)$.

   $D_u g(a) =$

4. *¿En que dirección es máxima la variación de* g *en dicho punto* a*? ¿Y mínima?*

5. *Escribe la expresión para el plano tangente a la superficie definida por la función* $g(x,y,z)$ *en el punto* a *anterior?*

6. *Encuentra, razonadamente, el polinomio de Taylor de orden 2 de* g *en* $(0,0,0)$.
   - ***Opcional:*** *Escribe el polinomio de Taylor de orden 2 en el punto* a.

Apellidos, Nombre: ____________________

Todas las respuestas (debidamente justificadas) deben estar escritas en las hojas del examen. **Duración** 1h45min

Teoría. (2 puntos) Demuestra la **Condición suficiente de extremo**.

Problema 1. ***(3 ptos.)*** *Sea la ecuación*

$$F(x, y, z) = x^4y - y^2z^2 + x^2z^5 + a \quad a \in \mathbb{R}.$$

1. *¿Para qué valores de a la ecuación anterior define una función $z = f(x, y)$ en el entorno U del punto $A = (1, 1, -1)$? Justifica la respuesta.*

   Valor de a _____.

2. *¿Cuántas veces podemos derivar la función resultante $z = f(x, y)$ en el entorno U del punto A? Justifica la respuesta. Nº de veces:* _____.

3. *Calcula las derivadas parciales $z_x = \frac{\partial f}{\partial x}$ y $z_y = \frac{\partial f}{\partial y}$ en un entorno de dicho punto A y en el propio punto A.*

   $$\frac{\partial f}{\partial x} =$$

   $$\frac{\partial f}{\partial y} =$$

4. *Calcula la derivada direccional de $z = f(x, y)$ en el punto $a = (1, 1)$ según la dirección $u = (4, 3)$.*

   $D_u(f(a)) =$

5. *Escribe, si es posible, la ecuación del plano tangente a la superficie definida por la ecuación $F(x, y, z) = 0$ en el punto A.*

Problema 2. ***(5 ptos.)*** *Usar el método de los coeficientes indeterminados de Lagrange.*

1. *Dado el elipsoide de ecuación* $x^2 + y^2 + 4(z-1)^2 = 1$*, encuentra, si existen, los puntos más cercanos y alejados del punto* $(0, 2, 1)$*.*

   Puntos más cercanos: ____________ , ____________ ...

   Puntos más alejados: ____________ , ____________ ...

2. *Sea* $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 + 2y^2$.

   a) *Decide si* f *tiene puntos críticos en* $\mathbb{R}^2$ *y en caso de que los tenga clasifícalos.*

   Máximos: ____________, ____________, ____________, ...

   Mínimos: ____________, ____________, ____________, ...

   Puntos silla: ____________, ____________, ____________, ...

   b) *Encuentra (usando el método de Lagrange) todos los puntos críticos de* f *sobre la la circunferencia* $T : x^2 + y^2 + 3x - 4 = 0$ *y decide si son extremos o puntos silla.*

   Máximos locales: ____________, ____________, ____________, ...

   Mínimos locales: ____________, ____________, ____________ ...

   Puntos silla: ____________, ____________, ____________ ...

   ¿Tiene f *extremos globales sobre* T*?* _____. *Justifica la respuesta y en caso de tenerlos encuéntralos razonadamente.*

   Máximo absoluto en: ________________, *valor de la función* ____________

   Mínimo absoluto en: ________________, *valor de la función* ____________

Apellidos, Nombre: ____

Todas las respuestas (debidamente justificadas) deben estar escritas en las hojas del examen. **Duración** 1h45min

Teoría. (2 puntos) Demuestra la **Condición suficiente de extremo**.

Problema 1. ***(3 ptos.)*** *Sea la ecuación*

$$F(x,y,z) = 3xy^2 + 2zy^3 - 2x^2z^4 + a \quad a \in \mathbb{R}.$$

1. *¿Para qué valores de a la ecuación anterior define una función $z = f(x,y)$ en el entorno U del punto $A = (-1,2,1)$? Justifica la respuesta.*

   Valor de a _____.

2. *¿Cuántas veces podemos derivar la función resultante $z = f(x,y)$ en el entorno U del punto A? Justifica la respuesta. Nº de veces: _____.*

3. *Calcula las derivadas parciales $z_x = \frac{\partial f}{\partial x}$ y $z_y = \frac{\partial f}{\partial y}$ en un entorno de dicho punto A y en el propio punto A.*

   $$\frac{\partial f}{\partial x} =$$

   $$\frac{\partial f}{\partial y} =$$

4. *Calcula la derivada direccional de $z = f(x,y)$ en el punto $a = (-1,2)$ según la dirección $u = (4,3)$.*

   $D_u(f(a)) =$

5. *Escribe, si es posible, la ecuación del plano tangente a la superficie definida por la ecuación $F(x,y,z) = 0$ en el punto A.*

Problema 2. ***(5 ptos.)*** *Usar el método de los coeficientes indeterminados de Lagrange.*

1. *Dado el elipsoide de ecuación* $4(x-1)^2 + y^2 + z^2 = 1$, *encuentra, si existen, los puntos más cercanos y alejados del punto* $(1, 2, 0)$.

   Puntos más cercanos: ____________ , ____________ ...

   Puntos más alejados: ____________ , ____________ ...

2. *Sea* $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, $f(x, y) = 2x^2 + y^2$.

   a) *Decide si* f *tiene puntos críticos en* $\mathbb{R}^2$ *y en caso de que los tenga clasifícalos.*

   Máximos: ____________, ____________, ____________, ...

   Mínimos: ____________, ____________, ____________, ...

   Puntos silla: ____________, ____________, ____________, ...

   b) *Encuentra (usando el método de Lagrange) todos los puntos críticos de* f *sobre la la circunferencia* $T : x^2 + y^2 - 3y - 4 = 0$ *y decide si son extremos o puntos silla.*

   Máximos locales: ____________, ____________, ____________, ...

   Mínimos locales: ____________, ____________, ____________ ...

   Puntos silla: ____________, ____________, ____________ ...

   ¿Tiene f *extremos globales sobre* T*?* _____. *Justifica la respuesta y en caso de tenerlos encuéntralos razonadamente.*

   Máximo absoluto en: ________________, *valor de la función* ____________

   Mínimo absoluto en: ________________, *valor de la función* ____________

Apellidos, Nombre: ____

Todas las respuestas (debidamente justificadas) deben estar escritas en las hojas del examen. **Duración** 2h30min

Teoría. (2 Puntos) Elige y **demuestra uno** de los siguientes teoremas:

☐ **Regla de la cadena** ☐ **Schwarz**

Problema 1. ***(2 ptos.)*** *Sea $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ definida por*

$$f(x,y) = \frac{|x|^{\alpha} e^{-x^2} \arctan(2xy)}{\sqrt{4x^2+y^2}},\ (x,y) \neq (0,0),\ f(0,0) = \beta.$$

1. *Para que valores de α y β existen los límites siguientes y en su caso calcúlalos razonadamente:*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \underline{\qquad\qquad\qquad} \qquad \lim_{(x,y)\to(-1,0)} f(x,y) = \underline{\qquad\qquad\qquad}$$

2. *¿Se puede definir f en $(0,0)$ de forma que f sea continua en $\mathbb{R}^2$? En caso afirmativo, en que condiciones. Justifica la respuesta.*

3. *Calcula, si es posible, las derivadas parciales de f en $(0,0)$.*

   $f_x(0,0) =$

   $f_y(0,0) =$

4. *¿Para que valores de α y β f es diferenciable en $(0,0)$? Justifica la respuesta y calcula, si existe, la derivada total (diferencial) de f en $(0,0)$.*

Problema 2. ***(2.5 ptos.)*** *Sea la ecuación*

$$F(x,y,z) = \exp(x^3 + y^2 + az) + xyz, \quad a \in \mathbb{R}.$$

1. *¿Para qué valores de a la ecuación anterior define una función* $z = f(x,y)$ *en el entorno* U *del punto* $A = (1,-1,1)$*?* ***Justifica*** *la respuesta. Valor de a* _____.

2. *¿Cuántas veces podemos derivar la función resultante* $z = f(x,y)$ *en el entorno* U *del punto* A*?* ***Justifica*** *la respuesta. No. de veces:* _____.

3. *Calcula las derivadas parciales* $\frac{\partial f}{\partial x}$ *y* $\frac{\partial f}{\partial y}$ *en un entorno de dicho punto* A *así como los valores en* A.

   $$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \qquad\qquad \frac{\partial f(A)}{\partial x} =$$

   $$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \qquad\qquad \frac{\partial f(A)}{\partial y} =$$

4. *Calcula la derivada direccional de* $z = f(x,y)$ *en* $\boldsymbol{a} = (1,-1)$ *en la dirección* $u = (-2,1)$.

   $$D_u(f(\boldsymbol{a})) =$$

5. *Escribe, si es posible, el plano tangente a la superficie definida por la ecuación* $F(x, y, z) = 0$ *en el punto* A.

6. *Encuentra, si es posible, el polinomio de orden 1 de* $z = f(x, y)$ *en el punto* $\boldsymbol{a} = (1, -1)$.

7. *(opcional) Calcula, si es posible, el valor de* z_{xy} *en el punto* $\boldsymbol{a} = (1, -1)$.

Problema 3. *(3.5 ptos.)*

1. *Sea el elipsoide de ecuación* $4x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 1$*, encuentra usando el método de los coeficientes indeterminados de Lagrange los puntos más cercanos y alejados del punto* $(-1, 0, 2)$.

   Puntos más cercanos: ________________ , ________________ ...

   Puntos más alejados: ________________ , ________________ ...

2. *Sea* $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 - 2y^2$.

   a) *Decide si* f *tiene puntos críticos en* $\mathbb{R}^2$ *y en caso de que los tenga clasifícalos.*

   Máximos: ________________, ________________, ________________, ...

   Mínimos: ________________, ________________, ________________, ...

   Puntos silla: ________________, ________________, ________________, ...

   b) *Encuentra (usando el método de Lagrange) todos los puntos críticos de* f *sobre la la circunferencia* $T : x^2 + y^2 - 3x - 4 = 0$ *y decide si son extremos o puntos silla.*

   Máximos locales: ________________, ________________, ________________, ...

   Mínimos locales: ________________, ________________, ________________ ...

   Puntos silla: ________________, ________________, ________________ ...

   ¿Tiene f *extremos globales sobre* T*?* _____. *Justifica la respuesta y en caso de tenerlos encuéntralos razonadamente.*

   Máximo absoluto en: ____________________, *valor de la función* ________________

   Mínimo absoluto en: ____________________, *valor de la función* ________________

Apellidos, Nombre: ____

Todas las respuestas (debidamente justificadas) deben estar escritas en las hojas del examen. **Duración** 1h45min

Teoría. (3 Puntos) Elige y **demuestra uno** de los siguientes teoremas:

☐ **Regla de la cadena** ☐ **Schwarz**

Problema 1. ***(3 ptos.)*** *Sea $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ definida por*

$$f(x,y) = \frac{|x|^\alpha e^{-x^2} \arctan(2xy)}{\sqrt{4x^2+y^2}},\ (x,y) \neq (0,0),\ f(0,0) = \beta.$$

1. *Para que valores de α y β existen los límites siguientes y en su caso calcúlalos razonadamente:*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ \qquad \lim_{(x,y)\to(-1,0)} f(x,y) = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

2. *¿Se puede definir f en $(0,0)$ de forma que f sea continua en $\mathbb{R}^2$? En caso afirmativo, en que condiciones. Justifica la respuesta.*

3. *Calcula, si es posible, las derivadas parciales de f en $(0,0)$.*

$f_x(0,0) =$

$f_y(0,0) =$

4. *¿Para que valores de α y β f es diferenciable en $(0,0)$? Justifica la respuesta y calcula, si existe, la derivada total (diferencial) de f en $(0,0)$.*

Problema 2. ***(4 ptos.)*** *Sea* $g : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$, $g(x, y, z) = \exp(x^2 - 2y^2 + z^2) - 2xy$.

1. *Decide si* g *es diferenciable en* $\mathbb{R}^2$. *Justifica la respuesta.*

2. *Calcula las derivadas parciales:*

   $$\frac{\partial g}{\partial x} =$$

   $$\frac{\partial g}{\partial y} =$$

   $$\frac{\partial g}{\partial z} =$$

3. *¿Cuánto vale la derivada de* g *en* $a = (1, 1, -1)$ *según la dirección del vector* $u = (1, -1, 1)$.

   $D_u g(a) =$

4. *¿En que dirección es máxima la variación de* g *en dicho punto* a*? ¿Y mínima?*

5. *Escribe la expresión para el plano tangente a la superficie definida por la función* $g(x, y, z)$ *en el punto* a *anterior?*

6. *Encuentra, razonadamente, el polinomio de Taylor de orden 2 de* g *en* $(0, 0, 0)$.
   - ***Opcional:*** *Escribe el polinomio de Taylor de orden 2 en el punto* a.

Apellidos, Nombre: ____

Todas las respuestas (debidamente justificadas) deben estar escritas en las hojas del examen. **Duración** 1h45min

Teoría (2 ptos.) Demuestra la **Condición suficiente de extremo**.

Problema 1. ***(2.5 ptos.)*** *Sea la ecuación*

$$F(x, y, z) = \exp(x^3 + y^2 + az) + xyz, \quad a \in \mathbb{R}.$$

1. *¿Para qué valores de a la ecuación anterior define una función $z = f(x, y)$ en el entorno U del punto $A = (1, -1, 1)$? **Justifica** la respuesta. Valor de a _____.*

2. *¿Cuántas veces podemos derivar la función resultante $z = f(x, y)$ en el entorno U del punto A? **Justifica** la respuesta. No. de veces: _____.*

3. *Calcula las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ en un entorno de dicho punto A así como los valores en A.*

   $$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \qquad\qquad \frac{\partial f(A)}{\partial x} =$$

   $$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \qquad\qquad \frac{\partial f(A)}{\partial y} =$$

4. *Calcula la derivada direccional de $z = f(x, y)$ en $\boldsymbol{a} = (1, -1)$ en la dirección $u = (-2, 1)$.*

   $D_u(f(\boldsymbol{a})) =$

5. *Escribe, si es posible, el plano tangente a la superficie definida por la ecuación* $F(x, y, z) = 0$ *en el punto* A.

6. *Encuentra, si es posible, el polinomio de orden 1 de* $z = f(x, y)$ *en el punto* $\boldsymbol{a} = (1, -1)$.

7. *(opcional) Calcula, si es posible, el valor de* z_{xy} *en el punto* $\boldsymbol{a} = (1, -1)$.

Problema 2. ***(3.5 ptos.)***

1. *Sea el elipsoide de ecuación* $4x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 1$, *encuentra usando el método de los coeficientes indeterminados de Lagrange los puntos más cercanos y alejados del punto* $(-1, 0, 2)$.

   Puntos más cercanos: ______________ , ______________ ...

   Puntos más alejados: ______________ , ______________ ...

2. *Sea* $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 - 2y^2$.

   a) *Decide si* f *tiene puntos críticos en* $\mathbb{R}^2$ *y en caso de que los tenga clasifícalos.*

   Máximos: ____________, ____________, ____________, ...

   Mínimos: ____________, ____________, ____________, ...

   Puntos silla: ____________, ____________, ____________, ...

   b) *Encuentra (usando el método de Lagrange) todos los puntos críticos de* f *sobre la la circunferencia* $T : x^2 + y^2 - 3x - 4 = 0$ *y decide si son extremos o puntos silla.*

   Máximos locales: ____________, ____________, ____________, ...

   Mínimos locales: ____________, ____________, ____________ ...

   Puntos silla: ____________, ____________, ____________ ...

   ¿Tiene f *extremos globales sobre* T*?* _____. *Justifica la respuesta y en caso de tenerlos encuéntralos razonadamente.*

   Máximo absoluto en: ________________, *valor de la función* ____________

   Mínimo absoluto en: ________________, *valor de la función* ____________

Apellidos, Nombre: ____

Todas las respuestas (debidamente justificadas) deben estar escritas en las hojas del examen. **Duración** 2h30min

Teoría. (2 Puntos) Elige y **demuestra uno** de los siguientes teoremas:

☐ **Condición suficiente de diferenciabilidad** ☐ **Heffter-Young**

Problema 1. ***(2 ptos.)*** *Sea $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ definida por*

$$f(x,y) = \frac{|y|^\alpha \log(x^2+2)\sin(xy)}{\sqrt{x^2+3y^2}},\ (x,y) \neq (0,0),\ f(0,0) = \beta.$$

1. *Para que valores de α y β existen los siguientes límites calculándolos razonadamente en caso que existan:*

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \underline{\hspace{4cm}} \qquad \lim_{(x,y)\to(-1,0)} f(x,y) = \underline{\hspace{4cm}}$$

2. *¿Se puede definir f en $(0,0)$ de forma que f sea continua en $\mathbb{R}^2$? En caso afirmativo, en que condiciones. Justifica la respuesta.*

3. *Calcula, si es posible, las derivadas parciales de f en $(0,0)$.*

   $f_x(0,0) =$

   $f_y(0,0) =$

4. *¿Para que valores de α y β f es diferenciable en $(0,0)$? Justifica la respuesta y calcula, si existe, la derivada* total *(diferencial) de f en $(0,0)$.*

Problema 2. ***(2.5 ptos.)*** *Sea la ecuación*

$$F(x,y,z) = z(x^2+y^2) + ayz^2, \quad a \in \mathbb{R}.$$

1. *¿Para qué valores de a la ecuación anterior define una función $z = f(x,y)$ en el entorno U del punto $A = (2,1,-1)$?* ***Justifica*** *la respuesta. Valor de a _____.*

2. *¿Cuántas veces podemos derivar la función resultante $z = f(x,y)$ en el entorno U del punto A?* ***Justifica*** *la respuesta. No. de veces: _____.*

3. *Calcula las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ en un entorno de dicho punto A así como los valores en A.*

   $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} =$ $\qquad\qquad$ $\dfrac{\partial f(A)}{\partial x} =$

   $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} =$ $\qquad\qquad$ $\dfrac{\partial f(A)}{\partial y} =$

4. *Calcula la derivada direccional de $z = f(x,y)$ en $\boldsymbol{a} = (2,1)$ en la dirección $u = (-1,2)$.*

   $D_u(f(\boldsymbol{a})) =$

5. *Escribe, si es posible, el plano tangente a la superficie definida por la ecuación* $F(x, y, z) = 0$ *en el punto* A.

6. *Encuentra, si es posible, el polinomio de Taylor de orden 1 de* $z = f(x, y)$ *en el punto* $\boldsymbol{a} = (2, 1)$.

7. *(opcional) Calcula, si es posible, el valor de* z_{yy} *en el punto* $\boldsymbol{a} = (2, 1)$.

Problema 3. ***(3.5 ptos.)***

1. *Sea el elipsoide de ecuación* $(x-1)^2 + 4y^2 + (z+1)^2 = 1$, *encuentra* ***usando el método de los coeficientes indeterminados de Lagrange*** *los puntos más cercanos y alejados del punto* $(1, 2, -1)$.

   Puntos más cercanos: ________________ , ________________ ...

   Puntos más alejados: ________________ , ________________ ...

2. *Sea* $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, $f(x, y) = y^2 - 2y + 3x^2 + 1$.

   a) *Decide si f tiene puntos críticos en $\mathbb{R}^2$ y en caso de que los tenga clasifícalos.*

   b) *Encuentra* ***usando el método de Lagrange*** *todos los puntos críticos de f sobre la elipse $T : 6x^2 + y^2 - 9 = 0$ y decide si son extremos o puntos silla.*

   Máximos locales: ____________, ____________, ____________, ...

   Mínimos locales: ____________, ____________, ____________ ...

   Puntos silla: ____________, ____________, ____________ ...

   ¿Tiene f extremos globales sobre T? _____. *Justifica la respuesta y en caso de tenerlos encuéntralos razonadamente.*

   Máximo absoluto en: ________________, *valor de la función* ____________

   Mínimo absoluto en: ________________, *valor de la función* ____________

Apellidos, Nombre: ____________________

Teoría. (3 Puntos) Elige y demuestra uno de los siguientes teoremas:

☐ **Regla de la cadena** ☐ **Acotación de las aplicaciones lineales**

Todas las respuestas (debidamente justificadas) deben estar escritas en las hojas del examen.

Problema 1. ***(3 ptos.)*** *Sea* $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \mapsto \mathbb{R}$, $f(x,y) = \dfrac{|y|^\alpha \arcsin(1-2x^2)\sin(2x)}{\sqrt{x^2+3y^2}}$.

1. *Para que valores de* α *existen los siguientes límites y calcúlalos cuando sea posible*

   • $\alpha \in$ _____ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) =$ __________ • $\alpha \in$ _____ $\lim\limits_{(x,y)\to(-1,1)} f(x,y) =$ __________

2. *¿Para algún valor de* α *se puede definir* $f(0,0)$ *de forma que* f *sea continua en* $\mathbb{R}^2$*? Justifica la respuesta.*

3. *Calcula, si es posible, las derivadas parciales de* f *en* $(0,0)$.

   $f_x(0,0) =$

   $f_y(0,0) =$

4. *¿Para que valores de* α f *es diferenciable en* $(0,0)$*? Justifica la respuesta y calcula, si existe, la derivada total (diferencial) de* f *en* $(0,0)$. • $\alpha \in$ _____, $Df(0,0) =$ __________

Problema 2. ***(4 ptos.)*** *Sea* $g : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, $g(x, y) = (x - 1)(y - 1)\exp(x^2 + y^2)$

1. *Decide si* g *es diferenciable en* $\mathbb{R}^2$*. Justifica la respuesta.*

2. *Calcula las derivadas parciales* $\frac{\partial g}{\partial x}$ *y* $\frac{\partial g}{\partial y}$.

   $g_x(x, y) =$

   $g_y(x, y) =$

3. *¿Cuánto vale la derivada de* g *en el punto* $A(0, 0)$ *según la dirección del vector* $(1, -1)$.

4. *Encuentra la dirección de máxima la variación de* g *en dicho punto* A*. Encuentra la dirección donde dicha variación es mínima.* ***Justifica*** *la respuesta.*

5. *Escribe la expresión para el plano tangente a la superficie definida por* $w = g(x, y)$ *en el punto* A*?*

6. *Escribe el polinomio de Taylor de orden 2 en el punto* A*.*

Apellidos, Nombre: ____

Teoría. (3 Puntos) Elige y demuestra uno de los siguientes teoremas:

☐ **Teorema del valor medio** ☐ **Condición suficiente de diferenciabilidad**

Todas las respuestas (debidamente justificadas) deben estar escritas en las hojas del examen.

Problema 1. ***(3 ptos.)*** *Sea* $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \mapsto \mathbb{R}$, $f(x,y) = \dfrac{|x|^\alpha (1+x^2)\arctan(4y)}{3x^2+y^2}$.

1. *Para que valores de* α *existen los siguientes límites y calcúlalos cuando sea posible*

   • $\alpha \in$ _____ $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) =$ __________ • $\alpha \in$ _____ $\lim_{(x,y)\to(-1,1)} f(x,y) =$ __________

2. *¿Para algún valor de* α *se puede definir* $f(0,0)$ *de forma que* f *sea continua en* $\mathbb{R}^2$*? Justifica la respuesta.*

3. *Calcula, si es posible, las derivadas parciales de* f *en* $(0,0)$.

   $f_x(0,0) =$

   $f_y(0,0) =$

4. *¿Para que valores de* α f *es diferenciable en* $(0,0)$*? Justifica la respuesta y calcula, si existe, la derivada total (diferencial) de* f *en* $(0,0)$. • $\alpha \in$ _____, $Df(0,0) =$ __________

Problema 2. ***(4 ptos.)*** *Sea* $g : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, $g(x,y) = xy\exp((x-1)^2 + (y-1)^2)$

1. *Decide si* g *es diferenciable en* $\mathbb{R}^2$*. Justifica la respuesta.*

2. *Calcula las derivadas parciales* $\frac{\partial g}{\partial x}$ *y* $\frac{\partial g}{\partial y}$.

   $g_x(x,y) =$

   $g_y(x,y) =$

3. *¿Cuánto vale la derivada de* g *en el punto* $A(1,1)$ *según la dirección del vector* $(3,4)$.

4. *Encuentra la dirección de máxima la variación de* g *en dicho punto* A*. Encuentra la dirección donde dicha variación es mínima.* ***Justifica*** *la respuesta.*

5. *Escribe la expresión para el plano tangente a la superficie definida por* $w = g(x,y)$ *en el punto* A*?*

6. *Escribe el polinomio de Taylor de orden 2 en el punto* A.

Apellidos, Nombre: ____ Nº_____

Teoría. (2 Puntos) Demuestra la Condición suficiente de extremo:

Todas las respuestas (debidamente justificadas) deben estar escritas en las hojas del examen.

Problema 1. ***(3 ptos.)*** *Sea la ecuación*

$$F(x,y,z) = y\,z^3 + 2\,x\,y\,z + x^2\,y^2 + a, \quad a \in \mathbb{R}.$$

1. *¿Para qué valores de a la ecuación anterior define una función $z = f(x,y)$ en el entorno U del punto $A = (0,1,2)$? Justifica la respuesta.*

   Valor de a ______.

2. *¿Cuántas veces podemos derivar la función resultante $z = f(x,y)$ en el entorno U del punto A? Justifica la respuesta. Nº de veces:* ______.

3. *Calcula las derivadas parciales $z_x = \frac{\partial f}{\partial x}$ y $z_y = \frac{\partial f}{\partial y}$ en un entorno de dicho punto A y en el propio punto A.*

   $$\frac{\partial f}{\partial x} =$$

   $$\frac{\partial f}{\partial y} =$$

4. *Calcula la derivada direccional de $z = f(x,y)$ en el punto $a = (0,1)$ según la dirección $u = (-1,3)$.*

   $D_u(f(a)) =$

5. *Escribe, si es posible, la ecuación del plano tangente a la superficie definida por la ecuación $F(x,y,z) = 0$ en el punto A.*

6. *(Opcional) Encuentra el valor de z_{xy} en el punto A.*

Problema 2. ***(5 ptos.)*** ***Usar el método de los coeficientes indeterminados de Lagrange.***

1. *Dada la esfera de ecuación* $x^2 + (y+1)^2 + z^2 = 4$*, encuentra, si existen, los puntos más cercanos y alejados del punto* $(1, -1, 0)$.

2. *Sea* $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 + 4y^2$.

   a) *Decide si* f *tiene puntos críticos en* $\mathbb{R}^2$ *y en caso de que los tenga clasifícalos.*

   b) *Encuentra (**usando el método de Lagrange**) todos los puntos críticos de* f *sobre la la circunferencia* $T : x^2 + y^2 - 3x - 4 = 0$ *y decide si son extremos o puntos silla.*

   Máximos locales: __________, __________, __________, ...

   Mínimos locales: __________, __________, __________ ...

   Puntos silla: __________, __________, __________ ...

   noindent ¿Tiene f *extremos globales sobre* T*?* _____. *Justifica la respuesta y en caso de tenerlos encuéntralos razonadamente.*

Apellidos, Nombre: ____ Nº_____

Teoría. (2 Puntos) Demuestra la Condición suficiente de extremo:

Todas las respuestas (debidamente justificadas) deben estar escritas en las hojas del examen.

Problema 1. ***(3 ptos.)*** *Sea la ecuación*

$$F(x,y,z) = x\,z^3 + x\,y^2\,z + x^3\,y^3 + a, \quad a \in \mathbb{R}.$$

1. *¿Para qué valores de a la ecuación anterior define una función $z = f(x,y)$ en el entorno U del punto $A = (-1,1,0)$? Justifica la respuesta.*

   Valor de a ______.

2. *¿Cuántas veces podemos derivar la función resultante $z = f(x,y)$ en el entorno U del punto A? Justifica la respuesta. Nº de veces:* ______.

3. *Calcula las derivadas parciales $z_x = \frac{\partial f}{\partial x}$ y $z_y = \frac{\partial f}{\partial y}$ en un entorno de dicho punto A y en el propio punto A.*

   $$\frac{\partial f}{\partial x} =$$

   $$\frac{\partial f}{\partial y} =$$

4. *Calcula la derivada direccional de $z = f(x,y)$ en el punto $a = (-1,1)$ según la dirección $u = (1,-2)$.*

   $D_u(f(a)) =$

5. *Escribe, si es posible, la ecuación del plano tangente a la superficie definida por la ecuación $F(x,y,z) = 0$ en el punto A.*

6. *(Opcional) Encuentra el valor de z_{yy} en el punto A.*

Problema 2. ***(5 ptos.)*** ***Usar el método de los coeficientes indeterminados de Lagrange.***

1. *Dada la esfera de ecuación* $x^2 + y^2 + (z+1)^2 = 16$, *encuentra, si existen, los puntos más cercanos y alejados del punto* $(0, 1, -1)$.

2. *Sea* $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, $f(x, y) = 2x^2 - 4y^2$.

   a) *Decide si* f *tiene puntos críticos en* $\mathbb{R}^2$ *y en caso de que los tenga clasifícalos.*

   b) *Encuentra (**usando el método de Lagrange**) todos los puntos críticos de* f *sobre la la circunferencia* $T : x^2 + y^2 + 3x - 4 = 0$ *y decide si son extremos o puntos silla.*

   Máximos locales: __________, __________, __________, ...

   Mínimos locales: __________, __________, __________ ...

   Puntos silla: __________, __________, __________ ...

   noindent ¿Tiene f *extremos globales sobre* T*?* _____. *Justifica la respuesta y en caso de tenerlos encuéntralos razonadamente.*

Apellidos, Nombre: ____

Teoría. (2 Puntos) Elige y demuestra uno de los siguientes teoremas:

☐ **Teorema de Heffe-Young** ☐ **Condición suficiente de extremos**

Todas las respuestas (debidamente justificadas) deben estar escritas en las hojas del examen.

Problema 1. ***(2 ptos.)*** *Sea* $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{y = 0\} \mapsto \mathbb{R}$, $f(x,y) = \dfrac{|y|^\alpha \cos(x^2+y^2)\sin(2x)}{\sqrt{3x^2+2y^2}}$.

1. *Para que valores de* $\alpha \in \mathbb{R}$ *existen los siguientes límites y calcúlalos cuando sea posible*

   $\bullet\, \alpha \in$ ____ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) =$ ________ $\bullet\, \alpha \in$ ____ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,1)} f(x,y) =$ ________

2. *¿Para algún valor de* α *se puede definir* $f(0,0)$ *de forma que* f *sea continua en* $(0,0)$*? Justifica la respuesta.*

3. *Calcula, si es posible, las derivadas parciales de* f *en* $(0,0)$.

   $f_x(0,0) =$

   $f_y(0,0) =$

4. *¿Para que valores de* α f *es diferenciable en* $(0,0)$*? Justifica la respuesta y calcula, si existe, la derivada total (diferencial) de* f *en* $(0,0)$. $\bullet\, \alpha \in$ ____, $Df(0,0) =$ ________

Problema 2. ***(2.5 ptos.)*** *Sea la ecuación*

$$F(x,y,z) = x^3 \exp(yz) + y^2 \exp(2z) + z^3 + a, \quad a \in \mathbb{R}.$$

1. *¿Para qué valores de "a" la ecuación anterior define una función $z = f(x,y)$ en el entorno U del punto $A = (1,0,1)$? Justifica la respuesta.*

   Valor de a ______.

2. *¿Cuántas veces podemos derivar la función resultante $z = f(x,y)$ en el entorno U del punto A? Justifica la respuesta. Nº de veces:* ______.

3. *Calcula las derivadas parciales $z_x = \frac{\partial f}{\partial x}$ y $z_y = \frac{\partial f}{\partial y}$ en un entorno de dicho punto A y en el propio punto A.*

   $$\frac{\partial f}{\partial x} =$$

   $$\frac{\partial f}{\partial y} =$$

4. *Calcula la derivada direccional de $z = f(x,y)$ en el punto $a = (1,0)$ según la dirección $u = (-1,1)$.*

   $D_u(f(a)) =$

5. *Escribe, si es posible, la ecuación del plano tangente a la superficie definida por la ecuación $F(x,y,z) = 0$ en el punto A.*

6. *Encuentra el valor de z_{xy} en el punto A.*

Problema 3. ***(3.5 ptos.)*** ***Usar el método de los coeficientes indeterminados de Lagrange.***

1. *Dada la esfera de ecuación* $(x-1)^2+y^2+(z+1)^2=16$, *encuentra, si existen, los puntos más cercanos y alejados del punto* $(1,2,-1)$.

2. *Sea* $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, $f(x, y) = (x-1)^2 - 4y^2$.

   a) *Decide si* f *tiene puntos críticos en* $\mathbb{R}^2$ *y en caso de que los tenga clasifícalos.*

   b) *Encuentra (**usando el método de Lagrange**) todos los puntos críticos de* f *sobre la la circunferencia* $T : x^2 + y^2 + 4x - 5 = 0$ *y decide si son extremos o puntos silla.*

   Máximos locales: _______________, _______________, _______________, ...

   Mínimos locales: _______________, _______________, _______________ ...

   Puntos silla: _______________, _______________, _______________ ...

   c) *¿Tiene* f *extremos globales sobre* T*?* _____. *Justifica la respuesta y en caso de tenerlos encuéntralos razonadamente.*

Apellidos, Nombre: ______________________________

Teoría. (3 Puntos) Elige y demuestra uno de los siguientes teoremas:

☐ **Regla de la cadena** ☐ **Heffe-Young**

Todas las respuestas (debidamente justificadas) deben estar escritas en las hojas del examen.

Problema 1. ***(2 ptos.)*** *Sea* $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{y = 0\} \mapsto \mathbb{R},\ f(x, y) = \dfrac{|y|^\alpha \cos(x^2 + y^2) \sin(2x)}{\sqrt{3x^2 + 2y^2}}$.

1. *Para que valores de* $\alpha \in \mathbb{R}$ *existen los siguientes límites y calcúlalos cuando sea posible*

   $\bullet\ \alpha \in$ ______ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) =$ __________ $\quad\bullet\ \alpha \in$ ______ $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,1)} f(x, y) =$ __________

2. *¿Para algún valor de* α *se puede definir* $f(0, 0)$ *de forma que* f *sea continua en* $(0, 0)$*? Justifica la respuesta.*

3. *Calcula, si es posible, las derivadas parciales de* f *en* $(0, 0)$.

   $f_x(0, 0) =$

   $f_y(0, 0) =$

4. *¿Para que valores de* α f *es diferenciable en* $(0, 0)$*? Justifica la respuesta y calcula, si existe, la derivada total (diferencial) de* f *en* $(0, 0)$. $\bullet\ \alpha \in$ ______, $Df(0, 0) =$ __________

Problema 2. ***(4 ptos.)*** *Sea* $g : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, $g(x, y) = \frac{1}{4}(x + y)^2 \exp(x + y - 2)$

1. *Decide si* g *es diferenciable en* $\mathbb{R}^2$*. Justifica la respuesta.*

2. *Calcula las derivadas parciales* $\frac{\partial g}{\partial x}$ *y* $\frac{\partial g}{\partial y}$.

   $g_x(x, y) =$

   $g_y(x, y) =$

3. *¿Cuánto vale la derivada de* g *en el punto* $A(2, 0)$ *según la dirección del vector* $(-4, 3)$.

4. *Encuentra la dirección de máxima la variación de* g *en dicho punto* A*. Encuentra la dirección donde dicha variación es mínima.* ***Justifica*** *la respuesta.*

5. *Escribe la expresión para el plano tangente a la superficie definida por* $w = g(x, y)$ *en el punto* A*?*

6. *Escribe el polinomio de Taylor de orden 2 en el punto* A.

Apellidos, Nombre: ____

Teoría. (2 Puntos) Demuestra la Condición suficiente de extremos.
Todas las respuestas (debidamente justificadas) deben estar escritas en las hojas del examen.

Problema 1. ***(2.5 ptos.)*** *Sea la ecuación*

$$F(x, y, z) = x^3 \exp(yz) + y^2 \exp(2z) + z^3 + a \quad a \in \mathbb{R}.$$

1. *¿Para qué valores de a la ecuación anterior define una función $z = f(x, y)$ en el entorno U del punto $A = (1, 0, 1)$? Justifica la respuesta.*

   Valor de a _____.

2. *¿Cuántas veces podemos derivar la función resultante $z = f(x, y)$ en el entorno U del punto A? Justifica la respuesta. Nº de veces: _____.*

3. *Calcula las derivadas parciales $z_x = \frac{\partial f}{\partial x}$ y $z_y = \frac{\partial f}{\partial y}$ en un entorno de dicho punto A y en el propio punto A.*

   $$\frac{\partial f}{\partial x} =$$

   $$\frac{\partial f}{\partial y} =$$

4. *Calcula la derivada direccional de $z = f(x, y)$ en el punto $a = (1, 0)$ según la dirección $u = (-1, 1)$.*

   $D_u(f(a)) =$

5. *Escribe, si es posible, la ecuación del plano tangente a la superficie definida por la ecuación $F(x, y, z) = 0$ en el punto A.*

6. *(Opcional) Encuentra el valor de z_{xy} en el punto A.*

Problema 2. ***(3.5 ptos.)*** ***Usar el método de los coeficientes indeterminados de Lagrange.***

1. *Dada la esfera de ecuación* $(x-1)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 16$, *encuentra, si existen, los puntos más cercanos y alejados del punto* $(1, 2, -1)$.

2. *Sea* $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, $f(x, y) = (x - 1)^2 - 4y^2$.

   a) *Decide si* f *tiene puntos críticos en* $\mathbb{R}^2$ *y en caso de que los tenga clasifícalos.*

   b) *Encuentra (**usando el método de Lagrange**) todos los puntos críticos de* f *sobre la la circunferencia* $T : x^2 + y^2 + 4x - 5 = 0$ *y decide si son extremos o puntos silla.*

      Máximos locales: ______________, ______________, ______________, ...

      Mínimos locales: ______________, ______________, ______________ ...

      Puntos silla: ______________, ______________, ______________ ...

   c) *¿Tiene* f *extremos globales sobre* T*?* _____. *Justifica la respuesta y en caso de tenerlos encuéntralos razonadamente.*

Apellidos, Nombre: ____

Teoría. (3 Puntos) Elige y demuestra uno de los siguientes teoremas:

☐ **Regla de la cadena** ☐ **Teorema de completitud en dimensión finita**

►**Todas** las respuestas (**debidamente justificadas**) deben estar escritas en las hojas del examen.

Problema 1. ***(3 ptos.)*** *Sea* $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \mapsto \mathbb{R}$, $f(x,y) = \dfrac{|x|^\alpha \sin(1-2x^2)\arctan(3y)}{\sqrt{x^2+3y^2}}$, $\alpha \geq 0$.

1. *Para qué valores de* α *existen los siguientes límites y calcúlalos cuando sea posible*

   • $\alpha \in$ _____ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) =$ __________ • $\alpha \in$ _____ $\lim\limits_{(x,y)\to(1,-1)} f(x,y) =$ __________

2. *¿Para algún valor de* α *se puede definir* $f(0,0)$ *de forma que* f *sea continua en* $\mathbb{R}^2$*? Justifica la respuesta.*

3. *Calcula, si es posible, las derivadas parciales de* f *en* $(0,0)$.

   $f_x(0,0) =$

   $f_y(0,0) =$

4. *¿Para que valores de* α f *es diferenciable en* $(0,0)$*? Justifica la respuesta y calcula, si existe, la derivada total (diferencial) de* f *en* $(0,0)$. • $\alpha \in$ _____, $Df(0,0) =$ __________

Problema 2. ***(4 ptos.)*** *Sea* $g : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, $g(x, y) = (x-1)^2\, e^{2y} - y\, e^{x^2-1}$.

1. *Decide si* g *es diferenciable en* $\mathbb{R}^2$*. Justifica la respuesta.*

2. *Calcula las derivadas parciales* $\frac{\partial g}{\partial x}$ *y* $\frac{\partial g}{\partial y}$.

   $g_x(x, y) =$

   $g_y(x, y) =$

3. *¿Cuánto vale la derivada de* g *en el punto* $A(-1, 0)$ *según la dirección del vector* $(2, 1)$.

4. *Encuentra la dirección de máxima la variación de la función* g *en dicho punto* A*. Encuentra la dirección donde dicha variación es mínima.* ***Justifica*** *la respuesta.*

5. *Escribe la expresión del plano tangente a la superficie definida por* $w = g(x, y)$ *en* A*.*

6. *Escribe el polinomio de Taylor de orden 2 en el punto* A*.*

7. *Opcional* ***(no puntúa)****. Estima el error de la fórmula de Taylor en un entorno de* A *de radio 1.*

Apellidos, Nombre: ____

Teoría. (3 Puntos) Elige y demuestra uno de los siguientes teoremas:

☐ **Teorema del valor medio** ☐ **Acotación de las aplicaciones lineales**

Todas las respuestas (debidamente justificadas) deben estar escritas en las hojas del examen.

Problema 1. ***(3 ptos.)*** *Sea* $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \mapsto \mathbb{R}$, $f(x,y) = \dfrac{|y|^\alpha e^{x^2-1}\sin(4y)}{\sqrt{x^2+4y^2}}$, $\alpha \geq 0$.

1. *Para que valores de* α *existen los siguientes límites y calcúlalos cuando sea posible*

   • $\alpha \in$ ______ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) =$ ____________ • $\alpha \in$ ______ $\lim\limits_{(x,y)\to(1,-1)} f(x,y) =$ ____________

2. *¿Para algún valor de* α *se puede definir* $f(0,0)$ *de forma que* f *sea continua en* $\mathbb{R}^2$*? Justifica la respuesta.*

3. *Calcula, si es posible, las derivadas parciales de* f *en* $(0,0)$.

   $f_x(0,0) =$

   $f_y(0,0) =$

4. *¿Para que valores de* α f *es diferenciable en* $(0,0)$*? Justifica la respuesta y calcula, si existe, la derivada total (diferencial) de* f *en* $(0,0)$. • $\alpha \in$ ______, $Df(0,0) =$ ____________

Problema 2. ***(4 ptos.)*** *Sea* $g : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, $g(x,y) = \pi x^2 e^y + (y+1)\sin(\pi x)$.

1. *Decide si* g *es diferenciable en* $\mathbb{R}^2$*. Justifica la respuesta.*

2. *Calcula las derivadas parciales* $\frac{\partial g}{\partial x}$ *y* $\frac{\partial g}{\partial y}$.

   $g_x(x,y) =$

   $g_y(x,y) =$

3. *¿Cuánto vale la derivada de* g *en el punto* $A(1,0)$ *según la dirección del vector* $(1,-2)$.

4. *Encuentra la dirección de máxima la variación de* g *en dicho punto* A*. Encuentra la dirección donde dicha variación es mínima.* ***Justifica*** *la respuesta.*

5. *Escribe la expresión del plano tangente a la superficie definida por* $w = g(x,y)$ *en* A.

6. *Escribe el polinomio de Taylor de orden 2 en el punto* A.

7. *Opcional* ***(no puntúa)****. Estima el error de la fórmula de Taylor en un entorno de* A *de radio 1.*

Apellidos, Nombre: ____ Nº_____

Teoría. (2 Puntos) Demuestra la Condición suficiente de extremo:

Todas las respuestas (debidamente justificadas) deben estar escritas en las hojas del examen.

Problema 1. ***(3 ptos.)*** *Sea la ecuación*

$$F(x,y,z) = 6\,x\,y\,e^{z-1} + \alpha\,\left(z^2 + y^2 + x^2\right), \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

1. *¿Para qué valores de a la ecuación anterior define una función $z = f(x,y)$ en el entorno U del punto $A = (-1,1,1)$? Justifica la respuesta.* Valor de α _____.

2. *¿Cuántas veces podemos derivar la función resultante $z = f(x,y)$ en el entorno U del punto A? Justifica la respuesta. Nº de veces:* _____.

3. *Calcula las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ en un entorno de A y en el propio punto A.*

   $\dfrac{\partial f}{\partial x} =$ $\qquad\qquad$ $\dfrac{\partial f}{\partial x}(A) =$

   $\dfrac{\partial f}{\partial y} =$ $\qquad\qquad$ $\dfrac{\partial f}{\partial x}(A) =$

4. *Calcula la derivada direccional de $f(x,y)$ en $a = (-1,1)$ según la dirección $u = (2,-3)$.*

   $D_u(f(a)) =$

5. *Escribe, si es posible, la ecuación del plano tangente a la superficie definida por la ecuación $F(x,y,z) = 0$ en el punto A.*

6. *(Opcional) Encuentra el valor de z_{xx} en el punto A.*

Problema 2. ***(5 ptos.)*** ***Usar el método de los coeficientes indeterminados de Lagrange.***

1. *Dado el elipsoide de ecuación* $(x-1)^2+y^2+2(z-3)^2=4$, *encuentra, si existen, los puntos más cercanos y alejados del punto* $(1,1,3)$.

2. *Sea* $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, $f(x, y) = 3x^2 - 2y^2 - 3y + 1$.

2a. *Decide si* f *tiene puntos críticos en* $\mathbb{R}^2$ *y en caso de que los tenga clasifícalos.*

2b. *Encuentra,* ***usando el método de Lagrange****, todos los puntos críticos de* f *sobre la elipse* $T : 6x^2 + y^2 - 9 = 0$ *y decide si son extremos o puntos silla.*

Máximos locales: ________________, ________________, ________________, ...

Mínimos locales: ________________, ________________, ________________ ...

Puntos silla: ________________, ________________, ________________ ...

¿Tiene f *extremos absolutos sobre* T*?* ______. *Justifica la respuesta y en su caso encuéntralos razonadamente.*

2c. *(Opcional) Encontrar los puntos críticos de* f *en* $D : 6x^2 + y^2 - 9 \leq 0$ *y clasifícalos.*

Apellidos, Nombre: ____ Nº_____

Teoría. (2 Puntos) Demuestra la Condición suficiente de extremo:

Todas las respuestas (debidamente justificadas) deben estar escritas en las hojas del examen.

Problema 1. ***(3 ptos.)*** *Sea la ecuación*

$$F(x,y,z) = 3\ (x-1)\ (y-1)\ e^{z-1} + \left(y^2 + x^2\right)\ z + \alpha\,.$$

1. *¿Para qué valores de a la ecuación anterior define una función $z = f(x,y)$ en el entorno U del punto $A = (1,1,1)$? Justifica la respuesta.* Valor de α _____.

2. *¿Cuántas veces podemos derivar la función resultante $z = f(x,y)$ en el entorno U del punto A? Justifica la respuesta. Nº de veces:* _____.

3. *Calcula las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ en un entorno de A y en el propio punto A.*

   $\dfrac{\partial f}{\partial x} =$ $\dfrac{\partial f}{\partial x}(A) =$

   $\dfrac{\partial f}{\partial y} =$ $\dfrac{\partial f}{\partial x}(A) =$

4. *Calcula la derivada direccional de $f(x,y)$ en $a = (1,1)$ según la dirección $u = (2,-3)$.*

   $D_u(f(a)) =$

5. *Escribe, si es posible, la ecuación del plano tangente a la superficie definida por la ecuación $F(x,y,z) = 0$ en el punto A.*

6. *(Opcional) Encuentra el valor de z_{yy} en el punto A.*

Problema 2. ***(5 ptos.)*** ***Usar el método de los coeficientes indeterminados de Lagrange.***

1. *Dado el elipsoide de ecuación* $(x-1)^2+2y^2+(z-3)^2=8$, *encuentra, si existen, los puntos más cercanos y alejados del punto* $(1,3,3)$.

2. *Sea* $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, $f(x, y) = 2x^2 - 3y^2 - 8x + 4$.

2a. *Decide si f tiene puntos críticos en $\mathbb{R}^2$ y en caso de que los tenga clasifícalos.*

2b. *Encuentra, **usando el método de Lagrange**, todos los puntos críticos de f sobre la elipse $T : 2x^2 + 3y^2 - 8 = 0$ y decide si son extremos o puntos silla.*

Máximos locales: ________________, ________________, ________________, ...

Mínimos locales: ________________, ________________, ________________ ...

Puntos silla: ________________, ________________, ________________ ...

¿Tiene f extremos absolutos sobre T? _____. *Justifica la respuesta y en su caso encuéntralos razonadamente.*

2c. *(Opcional) Encontrar los puntos críticos de f en $D : 2x^2 + 3y^2 - 8 \leq 0$ y clasifícalos.*

Apellidos, Nombre: ____

Teoría. (2 Puntos) Elige y demuestra uno de los siguientes teoremas:

☐ **Teorema de Heffe-Young** ☐ **Teorema del valor medio**

Todas las respuestas (debidamente justificadas) deben estar escritas en las hojas del examen.

Problema 1. ***(2 ptos.)*** *Sea* $f(x,y) = \dfrac{|x|^\alpha \log(2+y^2)\arctan(2x)}{\sqrt{x^2+3y^2}}$ *si* $x \neq 0$ *y* β *en otro caso.*

1. *Para que valores de* $\alpha \in \mathbb{R}$ *existen los siguientes límites y calcúlalos cuando sea posible*

   • $\alpha \in$ _____ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) =$ __________ • $\alpha \in$ _____ $\lim\limits_{(x,y)\to(1/2,0)} f(x,y) =$ __________

2. *¿Para algún valores de* α *y* β *se puede definir* $f(0,0)$ *de forma que* f *sea continua en* $(0,0)$*? Justifica la respuesta. (Opcional: ¿y en* $\mathbb{R}$*?)*

3. *Calcula, si es posible, las derivadas parciales de* f *en* $(0,0)$.

   $f_x(0,0) =$

   $f_y(0,0) =$

4. *¿Para que valores de* α f *es diferenciable en* $(0,0)$*? Justifica la respuesta y calcula, si existe, la derivada total (diferencial) de* f *en* $(0,0)$. • $\alpha \in$ _____, $Df(0,0) =$ __________

Problema 2. ***(2.5 ptos.)*** *Sea la ecuación*

$$F(x,y,z) = \alpha\, e^{z-2} + \left(x^2 - y^2\right)\, z^2 + y^2\, z = 0.$$

1. *¿Para qué valores de α la ecuación anterior define una función $z = f(x,y)$ en el entorno U del punto $A = (-1,1,2)$? Justifica la respuesta.* *Valor de α _____.*

2. *¿Cuántas veces podemos derivar la función resultante $z = f(x,y)$ en el entorno U del punto A? Justifica la respuesta. Nº de veces: _____.*

3. *Calcula las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ en un entorno de A y en el propio punto A.*

   $\dfrac{\partial f}{\partial x} =$ $\dfrac{\partial f}{\partial x}(A) =$

   $\dfrac{\partial f}{\partial y} =$ $\dfrac{\partial f}{\partial x}(A) =$

4. *Calcula la derivada direccional de $f(x,y)$ en $a = (-1,1)$ según la dirección $u = (1,-3)$.*

   $D_u(f(a)) =$

5. *Escribe, si es posible, la ecuación del plano tangente a la superficie definida por la ecuación $F(x,y,z) = 0$ en el punto A.*

6. *Encuentra el valor de z_{xy} en el punto A.*

Problema 3. ***(3.5 ptos.)*** ***Usar el método de los coeficientes indeterminados de Lagrange.***

1. *Dado el elipsoide de ecuación* $(x-1)^2+4y^2+(z-2)^2=1$*, encuentra, si existen, los puntos más cercanos y alejados del punto* $(1,2,2)$.

2. *Sea* $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 + 8x - 3y^2 + 1$.

2a. *Decide si* f *tiene puntos críticos en* $\mathbb{R}^2$ *y en caso de que los tenga clasifícalos.*

2b. *Encuentra,* ***usando el método de Lagrange****, todos los puntos críticos de* f *sobre la elipse* $T : x^2 + 3y^2 - 8 = 0$ *y decide si son extremos o puntos silla.*

Máximos locales: ________________, ________________, ________________, ...

Mínimos locales: ________________, ________________, ________________ ...

Puntos silla: ________________, ________________, ________________ ...

¿Tiene f *extremos absolutos sobre* T*?* ______. *Justifica la respuesta y en su caso encuéntralos razonadamente.*

2c. *(Opcional) Encontrar los puntos críticos de* f *en* $D : x^2 + 3y^2 \leq 8$ *y clasifícalos.*

Apellidos, Nombre: ____

Teoría. (3 Puntos) Elige y demuestra uno de los siguientes teoremas:

☐ **Acotación de las aplicaciones lineales** ☐ **Heffe-Young**

Todas las respuestas (debidamente justificadas) deben estar escritas en las hojas del examen.

Problema 1. ***(2 ptos.)*** *Sea* $f(x,y) = \dfrac{|x|^{\alpha}\log(2+y^2)\arctan(2x)}{\sqrt{x^2+3y^2}}$ *si* $x \neq 0$ *y* β *en otro caso.*

1. *Para que valores de* $\alpha \in \mathbb{R}$ *existen los siguientes límites y calcúlalos cuando sea posible*

   $\bullet\, \alpha \in$ _____ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) =$ __________ $\bullet\, \alpha \in$ _____ $\lim\limits_{(x,y)\to(1/2,0)} f(x,y) =$ __________

2. *¿Para algún valores de* α *y* β *se puede definir* $f(0,0)$ *de forma que* f *sea continua en* $(0,0)$*? Justifica la respuesta. (Opcional: ¿y en* $\mathbb{R}$*?)*

3. *Calcula, si es posible, las derivadas parciales de* f *en* $(0,0)$.

   $f_x(0,0) =$

   $f_y(0,0) =$

4. *¿Para que valores de* α f *es diferenciable en* $(0,0)$*? Justifica la respuesta y calcula, si existe, la derivada total (diferencial) de* f *en* $(0,0)$. $\bullet\, \alpha \in$ _____, $Df(0,0) =$ __________

Problema 2. ***(4 ptos.)*** *Sea* $g : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, $g(x, y) = x^2\, e^{y-1} + e^{x+1}\, y^2 + 4\, x\, y$.

1. *Decide si* g *es diferenciable en* $\mathbb{R}^2$*. Justifica la respuesta.*

2. *Calcula las derivadas parciales* $\frac{\partial g}{\partial x}$ *y* $\frac{\partial g}{\partial y}$.

   $g_x(x, y) =$

   $g_y(x, y) =$

3. *¿Cuánto vale la derivada de* g *en el punto* $A(-1, 1)$ *según la dirección del vector* $(3, 4)$.

4. *Encuentra la dirección de máxima la variación de* g *en dicho punto* A*. Encuentra la dirección donde dicha variación es mínima.* ***Justifica*** *la respuesta.*

5. *Escribe la expresión para el plano tangente a la superficie definida por* $z = g(x, y)$ *en* A*?*

6. *Escribe el polinomio de Taylor de orden 2 en el punto* A.

Apellidos, Nombre: ____

Teoría. (2 Puntos) Demuestra la Condición suficiente de extremos.
Todas las respuestas (debidamente justificadas) deben estar escritas en las hojas del examen.

Problema 1. ***(2.5 ptos.)*** *Sea la ecuación*

$$F(x, y, z) = \alpha\, e^{z-2} + \left(x^2 - y^2\right)\, z^2 + y^2\, z = 0.$$

1. *¿Para qué valores de α la ecuación anterior define una función $z = f(x, y)$ en el entorno U del punto $A = (-1, 1, 2)$? Justifica la respuesta.* *Valor de α _____.*

2. *¿Cuántas veces podemos derivar la función resultante $z = f(x, y)$ en el entorno U del punto A? Justifica la respuesta. Nº de veces: _____.*

3. *Calcula las derivadas parciales $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ en un entorno de A y en el propio punto A.*

   $\dfrac{\partial f}{\partial x} =$ $\dfrac{\partial f}{\partial x}(A) =$

   $\dfrac{\partial f}{\partial y} =$ $\dfrac{\partial f}{\partial x}(A) =$

4. *Calcula la derivada direccional de $f(x, y)$ en $a = (-1, 1)$ según la dirección $u = (1, -3)$.*

   $D_u(f(a)) =$

5. *Escribe, si es posible, la ecuación del plano tangente a la superficie definida por la ecuación $F(x, y, z) = 0$ en el punto A.*

6. *Encuentra el valor de z_{xy} en el punto A.*

Problema 2. ***(3.5 ptos.)*** ***Usar el método de los coeficientes indeterminados de Lagrange.***

1. *Dado el elipsoide de ecuación* $(x-1)^2+4y^2+(z-2)^2=1$, *encuentra, si existen, los puntos más cercanos y alejados del punto* $(1,2,2)$.

2. *Sea* $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2 - 3y^2 + 8x + 1$.

2a. *Decide si* f *tiene puntos críticos en* $\mathbb{R}^2$ *y en caso de que los tenga clasifícalos.*

2b. *Encuentra, **usando el método de Lagrange**, todos los puntos críticos de* f *sobre la elipse* $T : x^2 + 3y^2 - 8 = 0$ *y decide si son extremos o puntos silla.*

Máximos locales: ____________, ____________, ____________, ...

Mínimos locales: ____________, ____________, ____________ ...

Puntos silla: ____________, ____________, ____________ ...

¿Tiene f *extremos absolutos sobre* T*?* _____. *Justifica la respuesta y en su caso encuéntralos razonadamente.*

2c. *(Opcional) Encontrar los puntos críticos de* f *en* $D : x^2 + 3y^2 - 8 \leq 0$ *y clasifícalos.*