Proceedings of the
Seminar of Mathematical Analysis, 2002-2003
Secretariado de Publicaciones
Universidad de Sevilla (2003), 81-117

ANÁLISIS FUNCIONAL: UNA PERSPECTIVA HISTÓRICA

Fernando Bombal

1.-Introducción y algunos antecedentes.

El Análisis Funcional ha sido definido por **J. Dieudonné** [*D*1] como *"...el estudio de los espacios vectoriales topológicos y de las aplicaciones definidas entre subconjuntos de los mismos, sujetas a distintas condiciones algebraicas y topológicas."* Esta definición, aunque formalmente correcta, tiene la desventaja de estar hecha desde el punto de vista actual, cuando la teoría está perfectamente desarrollada y metodológicamente organizada, pero dice muy poco sobre sus contenidos concretos y la clase de problemas que la originaron.

Dentro de su ambigüedad, la definición de Dieudonné pone de manifiesto alguna de las características más importantes del Análisis Funcional: La tendencia hacia la algebrización del Análisis, el énfasis en los resultados de carácter estructural y la fuerte influencia de la topología. De hecho, como el propio Dieudonné señala, es prácticamente imposible disociar los comienzos de la Topología General y del Análisis Funcional.

En cualquier caso, como toda otra teoría matemática, el Análisis Funcional surge de la necesidad de encontrar nuevas técnicas para abordar una serie de problemas que los

---

Parte de estas notas han aparecido, con el título de *Los Orígenes del Análisis Funcional* en *Historia de la Matemática en el Siglo XIX*, Real Academia de Ciencias de Madrid (1994), 35-56 métodos tradicionales no podían resolver. De ellos principalmente tratarán estas notas, en las que intentaré mostrar algunas de las raíces en las que se sustenta esta parte de las Matemáticas.

Al final se incluye una Bibliografía sucinta. El lector interesado puede encontrar en $[BK]$, $[M]$ y, sobre todo, en $[D1]$ una relación muy completa de referencias bibliográficas.

Ya desde el comienzo del Cálculo Diferencial fue poniéndose de manifiesto la conveniencia de considerar conjuntos cuyos elementos, a diferencia de lo que sucede en el Análisis clásico, no son puntos del espacio euclídeo ordinario, sino funciones. Y éste es el origen mismo del nombre de Análisis Funcional: el estudio de los "Espacios Funcionales", es decir, conjuntos formados por funciones, dotados de determinadas estructuras que permiten realizar en ellos gran parte de las operaciones habituales del Análisis (límite de sucesiones, continuidad de funciones sobre ellos, etc.). Si se tiene en cuenta que la noción de función arbitraria, tal como hoy la entendemos, no aparece claramente hasta mediados del pasado siglo, podremos darnos cuenta fácilmente de lo novedosas que son las ideas que llegan a configurar las nociones del Análisis Funcional.

Sin embargo, no hay duda de que se pueden encontrar antecedentes claros del modo de hacer del Análisis Funcional desde el mismo comienzo del Cálculo Diferencial, pues el estudio de las Ecuaciones Diferenciales lleva inmediatamente a la necesidad de considerar el conjunto de las soluciones y, eventualmente, al estudio de sus propiedades. En este sentido puede entenderse, por ejemplo, el famoso *"principio de superposición"*, enunciado por **Daniel Bernouilli** en torno a 1750, que afirma que la forma más general que puede tomar una cuerda homogénea de longitud π, mantenida en tensión y sometida a vibración en un plano, puede obtenerse como "superposición" de las posiciones más sencillas que puede adoptar. Teniendo en cuenta que, para pequeñas vibraciones, la posición $u(x,t)$ que ocupa el punto de abscisa x de la cuerda en el instante t viene dada, aproximadamente, por la solución general de la ecuación diferencial

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \text{ con } u(x,0) = \varphi(x), \ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = \phi(x), \tag{1}$$

donde φ y ϕ son la posición y velocidad iniciales de la cuerda, el principio de superposición establece que la solución general de (1) se puede escribir en la forma

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{sen } nx \cos n(t - b_n),$$

para elecciones adecuadas de a_n y b_n. En terminología actual, esto significa que el conjunto de soluciones de (1) es un espacio vectorial, cerrado para alguna topología, generado por una familia numerable de funciones.

2.- El paso de lo finito a lo infinito: Sistemas de infinitas ecuaciones lineales.

Como ya hemos dicho, uno de los rasgos distintivos del Análisis Funcional es la algebrización del Análisis. Los métodos algebraicos se han desarrollado casi siempre antes que los analíticos y, al considerar esencialmente conjuntos finitos, suelen ser más fáciles de usar. Por ello, una idea reiteradamente utilizada por los analistas ha sido la de considerar las ecuaciones funcionales como casos límites de ecuaciones algebraicas, cuya solución es más sencilla. Así, por ejemplo, la deducción que hace D. Bernouilli en 1750 de la solución general de la cuerda vibrante, se basa en sustituir la cuerda por n masas puntuales, calcular la posición general del sistema a lo largo del tiempo, y hacer tender formalmente n a infinito. El descubrimiento por D'Alembert de la ecuación diferencial que rige el movimiento y el desarrollo de las técnicas analíticas, relegó el método de Bernouilli a un segundo plano. Sin embargo, la idea persistió y tuvo una influencia decisiva en los trabajos sobre Física de **L. Lagrange** y, sobre todo, de **J. B. Fourier**, para la obtención de las ecuaciones diferenciales que controlan los fenómenos de transmisión del calor. Al mismo tiempo, esta idea del paso de lo finito a lo infinito, fue sistemáticamente utilizada por Fourier para la obtención concreta de soluciones. Pero mejor será ilustrar el método con un ejemplo, de los muchos que aparecen en *La thèorie analytique de la chaleur* (1822): Consideremos el problema de encontrar una solución de la ecuación diferencial

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad *$$

en el dominio $x > 0$, $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$, que sea igual a 1 para $x = 0$ y se anule para $y = -\frac{\pi}{2}$, $y = \frac{\pi}{2}$, y para x tendiendo a ∞. Se trata de un modelo matemático de la temperatura estacionaria en el interior de una placa infinita de forma rectangular, cuyos bordes se mantienen a la temperatura prefijada.

Para resolver este problema, Fourier utiliza su método favorito de *separación de variables* (ya empleado por D'Alembert y Bernouilli con anterioridad): Tratemos de encontrar soluciones de la forma $u(x, y) = v(x)w(y)$. Sustituyendo en la ecuación $(*)$, resulta que ha de cumplirse

$$\frac{v''(x)}{v(x)} = -\frac{w''(y)}{w(y)}.$$

Como el primer miembro depende sólo de x y el segundo de y, sólo pueden ser iguales si ambos son una constante λ. Obtenemos así dos ecuaciones diferenciales ordinarias, fáciles de resolver. Pero Fourier es más directo y, simplemente, dice "... vemos que podemos tomar $v(x) = e^{mx}$ y $w(y) = \cos ny$." Sustituyendo en (*), se obtiene $m^2 = n^2 (= \lambda)$. De la condición (iii), resulta $m < 0$, y de la (ii) que $n = (2k-1)$ $(k \in \mathbb{N})$ y $m = -n$. Así pues, las funciones

$$u_k(x, y) = e^{-(2k-1)x} \cos(2k-1)y \quad (k \in \mathbb{N}),$$

satisfacen todas las condiciones, salvo la (i). Retomando el *"principio de superposición"*, Fourier trata entonces de buscar una solución como *"superposición"* de las anteriores, es decir, de la forma

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n(x, y),$$

para unos coeficientes (a_n) adecuados. Para determinar estos coeficientes, Fourier utiliza la condición (i), obteniendo

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(2n-1)y, \quad \text{para } -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}.$$

A continuación, emplea formalmente el método habitual de eliminación de parámetros, derivando la serie término a término y haciendo $y = 0$, lo que le conduce a las ecuaciones

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n. \\ 0 &= \sum_{n=1}^{\infty} (2n-1)^2 a_n. \\ 0 &= \sum_{n=1}^{\infty} (2n-1)^4 a_n. \\ &\cdots \end{aligned} \tag{2}$$

esto es, un sistema de infinitas ecuaciones lineales con infinitas incógnitas. Para resolverlo Fourier propone truncar el sistema, considerando sólo las n primeras ecuaciones con n incógnitas, que resuelve, obteniendo las soluciones $a_1^{(n)}, a_2^{(n)}, \ldots, a_n^{(n)}$. Finalmente, haciendo tender n a infinito, obtiene el "verdadero valor" $a_k = \lim_{n\to\infty} a_k^{(n)}$, para cada k, resultando

$$a_k = \frac{4}{\pi} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}.$$

Obviamente, se pueden poner serias objeciones al proceder de Fourier: Deriva término a término una serie, cuando sabemos que, en general, este proceso no es correcto. De hecho, cuando se sustituyen los valores calculados para a_k en el sistema (2), las series resultantes son divergentes (a partir de la segunda). El mismo Fourier no parece estar muy convencido de la corrección del método empleado, pues añade: *"Como estos resultados parecen desviarse de las consecuencias ordinarias del cálculo, es necesario examinarlos con cuidado e interpretarlos en su verdadero sentido".* Y prueba directamente que la suma de la serie obtenida para $x = 0$ es constante e igual a 1 *en el intervalo señalado* (primera vez que aparece explícitamente el concepto de *campo de convergencia* de una serie). Finalmente, afirma que la serie obtenida para u es solución del problema de contorno propuesto.

Incidentalmente, hay que decir que la postura de Fourier sobre la noción de convergencia de una serie funcional, es muy novedosa para la época, ya que a lo largo del siglo XVIII, los matemáticos habían utilizado las series sin ninguna restricción, operando con ellas como si fueran polinomios. Sin embargo, Fourier no disponía de *criterios* para asegurar la convergencia, por lo que, con gran habilidad, haciendo uso de su conocimiento de resultados previos en sumación de series numéricas, tuvo en cada caso que *calcular* la suma de los m primeros términos de cada serie directamente. El avance sustancial en este campo iba a venir de manos de **A. L. Cauchy**, quien iba a desarrollar una serie de criterios generales de convergencia, basados en el llamado "criterio de Cauchy" (enunciado poco antes, en 1817, por **B. Bolzano** en un importante, pero muy poco conocido trabajo, publicado en las Actas de la Real Sociedad Científica de Bohemia.)

Aparte de las objeciones formales, el método de truncamiento de Fourier fue muy importante en relación con el problema de resolver sistemas de infinitas ecuaciones lineales y resultó muy fecundo para la teoría, como reconoció un siglo más tarde F. Riesz, quien le dio el nombre de *principio de las reducidas.* Este principio puede entenderse como un paso "de lo finito a lo infinito" y resultará también, convenientemente modificado, muy útil en la teoría de las ecuaciones integrales, como veremos más adelante.

Hay que hacer notar que el método de truncamiento usado por Fourier para resolver el sistema (2), no siempre conduce a una solución, como muestra el ejemplo

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + \ldots &= 1 \\ x_2 + x_3 + \ldots &= 1 \\ x_3 + \ldots &= 1 \\ &\ldots \end{aligned}$$

cuyas soluciones truncadas son $(0, 0, \ldots, 1)$, que convergen a la "solución" $x_i = 0$, para todo $i \in \mathbb{N}$, resultado obviamente falso.

Después de Fourier, los sistemas de infinitas ecuaciones lineales no fueron estudiados en los siguientes 50 años, pero a partir de 1870 volvieron a aparecer en relación con distintos problemas algebraicos y analíticos, estos últimos motivados fundamentalmente por la búsqueda de soluciones del tipo $u = \sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n$ de determinadas ecuaciones diferenciales. Durante el último tercio del siglo XIX se hicieron diversos intentos para resolver los sistemas lineales de infinitas ecuaciones con infinitas incógnitas (Poincaré, 1895; Van Koch, 1896, etc.), pero con un éxito discreto. Hubo que esperar a la publicación de la Memoria definitiva de **F. Riesz** *Les systèmes d'equations à une infinité d'inconnues* (Paris, 1913), para conseguir una teoría satisfactoria. El punto fundamental es la clarificación de la noción de *solución*. Volveremos más adelante sobre este tema.

3.- El Problema de Sturm-Liouville. El comienzo de la Teoría Espectral.

Los trabajos de Fourier influyeron decisivamente en el tratamiento posterior de las ecuaciones diferenciales. El método de separación de variables, aplicado a otras ecuaciones diferenciales (en general no homogéneas), conduce al estudio de la ecuación diferencial ordinaria de segundo orden

$$y" - q(x)y + \lambda y = 0, \qquad 3$$

donde λ es un parámetro complejo, $q(x)$ es real, y la función incógnita es de clase 2 en un intervalo $[a, b]$ y satisface unas condiciones de contorno

$$\alpha_1 y(a) + \beta_1 y'(a) = 0, \qquad \alpha_2 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0.$$

Ch. Sturm (1836) y **J. Liouville** (1837) desarrollaron una teoría general para abordar este tipo de problemas (llamados desde entonces *problemas de Sturm-Liouville*). Los resultados obtenidos tuvieron una gran influencia en el desarrollo posterior. La contribución principal de Sturm fue la demostración de que el problema planteado solo tiene solución para una sucesión estrictamente creciente, (λ_n), de valores *reales* del parámetro λ (los *autovalores* del problema), con lo que se sientan las bases de la moderna teoría espectral. Las propiedades de ortogonalidad de las correspondientes autofunciones (u_n), llevaron a Liouville a tratar de generalizar el desarrollo en serie de Fourier, y expresar cualquier función continua u como una serie $\sum a_n u_n$, donde

$$a_n = \frac{\int u u_n}{\int u_n^2}$$

(nótese la analogía con los coeficientes de Fourier). Liouville logra demostrar la convergencia de la serie, siempre que la serie de Fourier de u sea convergente. Finalmente, la demostración de que la función $U = \sum a_n u_n$ coincide con u se reduce a probar que las relaciones $\int_a^b (U-u)u_n = 0$ para todo n, implican $U = u$ (primera aparición de la propiedad de *completitud* de un sistema ortonormal), lo que solo logra demostrar Liouville bajo hipótesis restrictivas. A lo largo de este estudio, aparece por primera vez una ecuación integral *de segunda especie* (terminología de Hilbert), es decir, en la que la función incógnita aparece tanto dentro como fuera del signo integral. Así mismo, se obtienen también por primera vez propiedades de las soluciones sin integración explícita de las mismas.

Gran parte de los esfuerzos de los analistas del XIX, se dirigieron a tratar de extender la teoría de Sturm-Liouville para distintos tipos de ecuaciones en derivadas parciales con 3 o más incógnitas.

4.-El Cálculo de Variaciones y el Problema de Dirichlet.

Probablemente los antecedentes más claros del Análisis Funcional se pueden encontrar en el Cálculo de Variaciones. Con este nombre se conoce una serie de problemas en los que se trata de maximizar o minimizar no ya una función real definida sobre un subconjunto de $\mathbb{R}^n$, sino una expresión del tipo

$$J(\varphi) = \int_a^b F(\varphi(x), \varphi'(x), \ldots)\, dx,$$

siendo F una función regular, y las "variables" φ un adecuado conjunto de curvas regulares parametrizadas en $[a, b]$. Es en este contexto donde aparece primero la idea de *campo funcional*, como conjunto de funciones admisibles, y la de *distancia entre funciones*. Consideremos, por ejemplo, el problema de encontrar una función que minimice el funcional

$$J(\varphi) = \int_a^b F(x, \varphi(x), \varphi'(x))\, dx \tag{4}$$

cuando φ recorre el conjunto de "funciones admisibles" formado por las funciones de clase 2 sobre $[a, b]$ que toman valores fijos en los extremos: $\varphi(a) = c$ y $\varphi(b) = d$. Si φ_o minimiza a (4), ha de ser $J(\varphi) \geq J(\varphi_o)$ para toda φ admisible. Parece natural considerar funciones "próximas" a φ_o las de la forma

$$\varphi_\epsilon(x) = \varphi_o(x) + \epsilon\eta(x), \tag{5}$$

con η de clase 2 y tal que $\eta(a) = \eta(b) = 0$. Es obvio entonces que la expresión $H(\epsilon) = J(\varphi_\epsilon)$ debe tener un mímino en $\epsilon = 0$, luego $\partial H/\partial\epsilon|_{\epsilon=0} = 0$, para todo η (en lenguaje actual, la derivada de Gateaux de J es 0 en φ_o). Tras una integración por partes, se obtiene la famosa *Ecuación de Euler:*

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial \varphi'}\right) = \frac{\partial F}{\partial \varphi}. \tag{6}$$

Habitualmente, por la naturaleza del problema concreto estudiado, se podía establecer a priori la existencia de una solución admisible, que, por tanto, había que buscar entre las soluciones de la ecuación diferencial (6).

En el caso general, para estudiar problemas de extremos de funcionales de la forma (4), se solía razonar por analogía al caso de funciones reales. Así, por ejemplo, se solía admitir como evidente que si F estaba acotada, J *alcanzaba su máximo o mínimo en alguna función admisible.* Sin embargo, el programa de rigorización del Análisis iniciado por **K. Weierstrass**, puso pronto de manifiesto la debilidad de estos argumentos. Así, por ejemplo, tratemos de minimizar la expresión

$$J(\varphi) = \int_{-1}^{1} [x^2 \varphi'(x)]^2 \, dx \tag{7}$$

entre las funciones φ de clase 1 en [-1,1], tales que $\varphi(-1) = a \neq b = \varphi(1)$ (Weierstrass, 1870). Para cada $\epsilon > 0$, la función

$$\varphi_\epsilon(x) = \frac{1}{2}(a+b) + \frac{1}{2}(b-a)\frac{\arctan(x/\epsilon)}{\arctan(1/\epsilon)}$$

es admisible y cumple que $\lim_{\epsilon\to 0} J(\varphi_\epsilon) = 0$, luego $\inf J(\varphi) = 0$. Pero si $\varphi \in C^1([-1,1])$ es tal que $J(\varphi) = 0$, de la continuidad de φ' resulta que ha de ser $\varphi' = 0$ en $[-1,1]$, y por tanto φ es constante. Así pues, ¡no hay ninguna función admisible en donde J alcance su mínimo!

Además de sus aplicaciones geométricas y físicas, el Cálculo de Variaciones está íntimamente ligado a uno de los problemas más importantes del Análisis del siglo XIX: el llamado *Problema de Dirichlet*. Este problema (para la ecuación de Laplace) consiste en encontrar una función u, armónica en un dominio Ω (del plano, por ejemplo; e.d., verificando $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ en Ω), que toma valores prefijados en la frontera Γ de Ω. Este problema y su análogo en 3 o más variables, está relacionado con multitud de problemas físicos (cálculo de potenciales, etc.) y matemáticos, y a lo largo del siglo XIX se hicieron muchos intentos para solucionarlo. Citemos, por ejemplo, la conocida fórmula de Poisson, que resuelve el problema cuando Ω es el disco unidad y los valores frontera son suficientemente regulares. Pero el método que nos interesa destacar ahora es el llamado *Principio de Dirichlet*, según el cual la solución del problema es la función u tal que su restricción a Γ es el valor prefijado, digamos f, y hace mímina la llamada *integral de Dirichlet:*

$$D(v) = \int\int_{\Omega} \left[(\frac{\partial v}{\partial x})^2 + (\frac{\partial v}{\partial y})^2 \right] dx\, dy \qquad 8$$

en el conjunto $\mathcal{F} = \{v \in C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega) : v\, |_{\Gamma} = f \text{ y } D(v) < \infty\}$. En efecto, *si existe* $u \in \mathcal{F}$ que hace mínima a D sobre $\mathcal{F}$, y *además u es de clase 2 en* Ω, la ecuación de Euler implica entonces que $\Delta u = 0$ en Ω.

Este principio fue ya utilizado por **Gauss** en relación con problemas de determinación de funciones analíticas en 1839, y posteriormente por **Lord Kelvin** en 1847, en conexión con la teoría del potencial. El nombre de *principio de Dirichlet* fue dado por **B. Riemann**, quien lo usó en sus importantes trabajos sobre funciones holomorfas y abelianas. La trascendencia de estos resultados, contribuyó decisivamente a la popularización entre la comunidad matemática del principio en cuestión. Puesto que en este caso la función subintegrando en (8) es siempre ≥ 0, para Riemann era evidente que D alcanzaba su mínimo en $\mathcal{F}$. Sin embargo, pronto se pusieron en evidencia los defectos del argumento utilizado. Así, por ejemplo, **F. Prym** dio en 1871 un ejemplo de una función continua sobre la circunferencia unidad que no se puede prolongar a una función v, continua sobre el disco unidad, de modo que la integral (8) sea finita. ¡Esto prueba que el conjunto $\mathcal{F}$ puede ser vacío, aunque, como en este caso, el problema de Dirichlet tenga solución!. Sin embargo, **H. Poincaré** probó que, para poder resolver el problema de Dirichlet, se podía suponer siempre que la función f prefijada era de clase 2 y estaba definida en un entorno de Ω.

Así pues, bajo condiciones "razonables", la mayor dificultad en la demostración del principio de Dirichlet, estriba en probar que el mínimo de (8) *se alcanza en alguna función admisible.* (Por otro lado, la necesidad de imponer alguna restricción a la frontera del dominio, fue puesta en evidencia por los ejemplos de problemas de Dirichlet insolubles dados por **Zaremba** (1911) y **H. Lebesgue** (1912). Este último ejemplo es especialmente contundente, pues el dominio en cuestión (el interior de la esfera de radio 1 en $\mathbb{R}^3$, que queda fuera de la "espina de Lebesgue" ,

$$(x^2 + y^2)^{1/2} = \exp(-\frac{1}{z}), \quad z > 0),$$

es homeomorfo a una bola).

Los esfuerzos de Weierstrass y su escuela (Du Bois-Reymond, Zaremba, etc.) consiguieron fundamentar rigurosamente la mayor parte de los resultados y argumentos clásicos del Cálculo de Variaciones, salvo el principio general de existencia de extremo. Desde nuestra perspectiva, este fallo es perfectamente comprensible: los teoremas generales que implican la existencia de extremos de una función real (continua), están basados en la noción de *compacidad*. De hecho, la primera demostración rigurosa del principio de Dirichlet, dada por **D. Hilbert** alrededor de 1900, se basa en la posibilidad de extraer una subsucesión uniformemente convergente de una sucesión $(u_n) \subseteq \mathcal{F}$ tal que $(D(u_n)) \searrow \inf\{D(v) : v \in \mathcal{F}\}$. Para ello, Hilbert tuvo que redescubrir una versión del que puede considerarse uno de los primeros teoremas del Análisis Funcional: el teorema de Ascoli-Arzelá.

Uno de los primeros problemas planteados con la rigorización del Análisis, fue estudiar condiciones bajo las cuales el límite (puntual) de una sucesión de funciones, conserva las buenas propiedades que pudieran tener las funciones de la sucesión (continuidad, derivabilidad, etc.) Los primeros intentos en esta dirección, consistieron en imponer condiciones más restrictivas sobre la forma de converger de la sucesión. Así surgió la noción de *convergencia uniforme* (Weierstrass, 1841; Stokes, 1847; Von Seidel, 1848; Cauchy, 1853). La postura de los italianos **U. Dini, G. Ascoli** y **C. Arzelá**, fue radicalmente diferente. En lugar de modificar la noción de convergencia empleada, dieron una condición general sobre el conjunto formado por la sucesión de funciones (la *equicontinuidad*: Ascoli, 1883), de tal modo que el límite puntual es necesariamente continuo. Los trabajos posteriores permitieron demostrar que toda sucesión equicontinua de funciones acotadas sobre un cerrado y acotado de $\mathbb{R}^n$, posee una subsucesión uniformemente convergente, extendiendo así el clásico teorema de Bolzano para conjuntos acotados de $\mathbb{R}$ a conjuntos de funciones. Una versión de este teorema de compacidad en espacios funcionales es la que redescubrió Hilbert para su demostración del Principio de Dirichlet.

5.- Las ecuaciones integrales y su influencia en el desarrollo del Análisis Funcional.

El ejemplo más representativo y, probablemente, más influyente en el establecimiento del Análisis Funcional, es el de las Ecuaciones Integrales. A lo largo del siglo XIX se habían planteado algunas ecuaciones integrales especiales, habitualmente en relación con cuestiones de la Física. Así, por ejemplo, **N. Abel** había resuelto en 1823 la ecuación

$$f(x) = \int_0^x \frac{\phi(y)}{\sqrt{x-y}}\, dy,$$

relacionada con la tautócrona. Este es un ejemplo de *ecuación integral de primera especie* en notación de Hilbert, ya que la función incógnita $\phi(x)$ aparece sólo bajo el signo integral. Otra importante clase de ecuaciones integrales aparece en relación con el llamado *método de Beer-Neumann* para la solución del problema de Dirichlet. En efecto, en 1865 A. Beer interpreta el problema de Dirichlet como la obtención del potencial correspondiente a una capa de "dipolos" normal en cada punto a la superficie Γ del dominio Ω (véase la Sección 4), reduciendo el problema al cálculo de una función de densidad σ sobre Γ adecuada. Si Γ es suficientemente regular, σ debe verificar una ecuación del tipo

$$\sigma(x) + \int_a^b k(x,y)\sigma(y)\, dy = f(x), \tag{9}$$

siendo k un núcleo continuo y simétrico, y f la función dada sobre Γ. Esta es una *ecuación integral de segunda especie*, pues la incógnita aparece tanto dentro como fuera de la integral.

Si consideramos la integral como un operador sobre un cierto espacio funcional, la ecuación (9) toma la forma

$$(I+K)\sigma = f,$$

cuya solución formal es

$$\sigma = (I+K)^{-1}f = f - Kf + K^2f - K^3f + \dots$$

Aplicando esta idea, **Beer** utiliza el "método de las aproximaciones sucesivas", definiendo inductivamente $\sigma_o = f$, y $\sigma_n = (-K)\sigma_{n-1} = (-K)^n f$. Si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n$ converge en algún buen sentido a una función σ, ésta es la solución. Pero Beer no pudo probar la convergencia. **C. Neumann** utilizó la misma idea en 1877, obteniendo algunos éxitos parciales para dominios *convexos y acotados.*

Fue en 1888 cuando **P. du Bois-Reymond** sugirió el nombre de *ecuaciones integrales* para designar este tipo de problemas, y propuso desarrollar una teoría general de tales ecuaciones como método alternativo para resolver problemas de ecuaciones diferenciales.

Los primeros resultados generales en esta dirección, fueron obtenidos por **J.M. Le Roux** (1894) y **V. Volterra** (1896). Ambos establecieron teoremas de existencia y unicidad para ecuaciones del tipo

$$f(x) + \int_a^x k(x,t)f(t)\, dt = g(x),$$

mediante hipótesis adecuadas sobre el núcleo k. Los resultados son muy similares, pero el trabajo de Volterra tuvo una mayor influencia posterior, al destacar las propiedades algebraicas del operador, lo que le permite obtener la solución en términos de una nueva ecuación integral de segunda especie, cuyo núcleo (*núcleo resolvente*) viene dado por la suma de la serie de núcleos iterados. Al final de una de las notas de Volterra, se hace notar la semejanza de la ecuación integral considerada con un sistema de ecuaciones lineales con matriz de coeficientes triangular (sustituyendo la integral por sus sumas de Riemann.). Esta aparentemente inocua observación, iba a influir decisivamente en el trabajo fundamental de Fredholm.

I. Fredholm, estudiante de Mittag-Leffler y más tarde su colega en Estocolmo, realizó una visita a París en 1899, entrando en contacto con Poincaré y otros famosos matemáticos de la época. En 1900 publicó una nota, titulada *Sur une nouvelle méthode pour la resolution du problème de Dirichlet*, completada dos años más tarde por un artículo en *Acta Mathematica*, que iban a provocar un gran impacto en la Comunidad Matemática. Como indica el nombre de la nota de 1900, la intención original de Fredholm es dar un nuevo método de resolución del problema de Dirichlet. Para ello, considera el método de Beer-Neumann y trata de resolver la ecuación integral (9). Siguiendo a Poincaré, introduce un parámetro complejo λ y escribe la ecuación de la forma

$$f(x) + \lambda \int_a^b k(x,t) f(t)\, dt = g(x), \tag{10}$$

para estudiar las propiedades de la solución en función de λ. A partir de aquí, menciona brevemente la analogía de (10) con un sistema lineal, y empieza a escribir sus fórmulas de “determinantes”. Fue posteriormente, en una conferencia dada en 1909, cuando Fredholm reconoció la gran influencia que tuvo la nota de Volterra en su trabajo. Podemos intentar reconstruir el argumento seguido por Fredholm.

En primer lugar, reemplacemos la ecuación (10) por las sumas de Riemann asociadas a una partición del intervalo $[a, b]$ en n partes iguales $a < y_1 < \ldots < y_n = b$:

$$f(y_j) + \lambda \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} k(y_i, y_j) f(y_i) = g(y_j),\ 1 \leq j \leq n. \tag{11}$$

A continuación, escribamos el determinante del sistema como suma de menores principales, utilizando una fórmula debida a **Von Koch**:

$$1 + \lambda \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^{n} k(y_i, y_i) + \lambda^2 \frac{(b-a)^2}{2!n^2} \sum_{k_1,k_2} \begin{vmatrix} k(y_{k_1}, y_{k_1}) & k(y_{k_1}, y_{k_2}) \\ k(y_{k_2}, y_{k_1}) & k(y_{k_2}, y_{k_2}) \end{vmatrix} + \cdots$$

Si ahora hacemos tender n a infinito, formalmente las sumas se convierten en integrales, y obtenemos lo que Fredholm llama el "determinante" del núcleo:

$$\Delta(\lambda) = 1 + \lambda \int_a^b k(s,s)ds + \frac{\lambda^2}{2!} \int_a^b \int_a^b k \begin{pmatrix} s_1 & s_2 \\ s_1 & s_2 \end{pmatrix} ds_1\, ds_2 + \cdots,$$

donde

$$k \begin{pmatrix} s_1 & s_2 & \cdots & s_n \\ t_1 & t_2 & \cdots & t_n \end{pmatrix} = \det(k_{ij}), \text{ siendo } k_{ij} = k(s_i, t_j).$$

Fredholm escribe a continuación el "primer menor"

$$D(x,y,\lambda) = k(x,y) + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \int_a^b \cdots \int_a^b k \begin{pmatrix} x & s_1 & \cdots & s_n \\ y & s_1 & \cdots & s_n \end{pmatrix} ds_1 \ldots ds_n,$$

usando el mismo método de paso al límite formal en el sistema lineal, y prueba que ambas series así definidas convergen uniformemente en cada compacto de $\mathbb{C}$. En particular, Δ es una función entera. Por tanto, sus ceros son aislados y a lo más existen en cantidad numerable. En completa analogía con la teoría de sistemas de ecuaciones lineales, prueba a continuación:

(I) Si $\Delta(\lambda_o) \neq 0$, la ecuación (10) tiene una solución única

$$f = (I - \lambda_o R_{\lambda_o})g,$$

donde R_{λ_o} es el operador integral con núcleo

$$r(x,y,\lambda_o) = \frac{D(x,y,\lambda_o)}{\Delta(\lambda_o)}.$$

Además, si la ecuación homogénea asociada a (10) sólo tiene la solución trivial para $\lambda = \lambda_o$, entonces necesariamente $\Delta(\lambda_o) \neq 0$, y por tanto existe en este caso solución única de (10) para cada g continua.

Como consecuencia del principio del máximo de funciones armónicas, resulta que el problema de Dirichlet tiene como única solución $u = 0$ cuando el valor en Γ es 0. De ello deduce Fredholm inmediatamente que *el problema de Dirichlet tiene solución única para todo dominio Ω acotado del plano, con frontera suficientemente regular.*

En el artículo de Acta Mathematica de 1903, Fredholm completó los resultados obtenidos, probando:

(II) La ecuación (10) tiene solución única, para cada función continua g, si y sólo si la ecuación homogénea posee solamente la solución trivial. Esto sucede si y sólo si $\Delta(\lambda) \neq 0$.

Además, si λ es un cero de orden m de Δ, la ecuación homogénea asociada a (10) tiene exactamente m soluciones linealmente independientes. En este caso, (10) tiene solución si y sólo si g satisface la "condición de ortogonalidad"

$$\int_a^b g(x)h(x)\,dx = 0$$

para toda solución h de la "ecuación transpuesta" homogénea

$$h(x) + \lambda \int_a^b k(y,x)h(y)\,dy = 0,$$

lo que supone una analogía total con la teoría de los sistemas de ecuaciones lineales. La elegancia y potencia de los resultados de Fredholm causaron un profundo impacto, poniendo la teoría de ecuaciones integrales en el centro de interés de los matemáticos contemporáneos. Estos resultados supusieron el punto de partida de la moderna teoría espectral e influyeron decisivamente en el desarrollo posterior del Análisis Funcional.

6.- La contribución de Hilbert. El establecimiento del Análisis Funcional.

Los sensacionales resultados de Fredholm se extendieron rápidamente. En el invierno de 1900-1901 **E. Holgrem** expone estos resultados en Göttingen, en el Seminario de **Hilbert**, quien se interesó vivamente por el tema y entre 1904 y 1910 publicó seis artículos sobre el Ecuaciones Integrales en el *Göttingen Nachrichten*, que fueron posteriormente reunidos en forma de libro, en 1912. El libro contiene también numerosas aplicaciones matemáticas y físicas. En él aparecen nociones y directrices novedosas que posteriormente, en manos de matemáticos como **E.Schmidt** y **F. Riesz**, van a convertirse en los fundamentos del Análisis Funcional.

El primer artículo de Hilbert se refiere a la Ecuación Integral (10) con núcleo continuo y *simétrico*, es decir, $k(x,y) = k(y,x)$. Reemplazando la integral por las sumas de Riemann, Hilbert obtiene de (10) el sistema (11), que resuelve en forma de cociente de determinantes. Haciendo despues tender n a infinito, se obtiene de esta manera la fórmula probada por Fredholm. Pero Hilbert llega más lejos. En efecto, el análisis del sistema (11) le lleva a introducir las formas cuadráticas

$$Q_n(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} K(x_i, x_j)x_i x_j,$$

y su posterior reducción a sus ejes principales. A continuación, utilizando la misma idea del paso de lo finito a lo infinito, demuestra que el paso al límite cuando $n \mapsto \infty$, funciona, y le permite obtener al menos un autovalor (en términos modernos, el inverso de un autovalor) de la E.I. (10), probar la ortogonalidad de las autofunciones ψ_n y ψ_m, correspondientes a autovalores distintos y la generalización del teorema de reducción a los ejes principales de una cuádrica:

$$\int_a^b \int_a^b k(x,y)f(x)h(y)\,dx\,dy = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n}(f,\psi_n)(h,\psi_n), \qquad 12$$

donde

$$(f,\psi_n) = \int_a^b f(s)\psi_n(s)\,ds$$

son los "coeficientes de Fourier" de la función f respecto al sistema ortogonal normalizado (ψ_n), $(\psi_n\psi_m) = \delta_{nm}$ y el segundo miembro de (12) converge *uniformemente* cuando f y g varían, satisfaciendo la condición $\int_a^b f^2 \leq 1$, $\int_a^b g^2 \leq 1$ (primera aparición de la "bola unidad en el espacio de Hilbert".)

También trató Hilbert de extender estos resultados para núcleos menos regulares, pero la solución completa no se lograría hasta el descubrimiento del llamado "Teorema de Fischer-Riesz" en 1907.

Hilbert demostró también que toda función de la forma

$$g(x) = \int_a^b k(x,y)f(y)\,dy \quad (f \text{ continua}),$$

tenía un desarrollo en serie de autofunciones

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (g, \psi_n)\psi_n(x),$$

absoluta y uniformemente convergente, lo que permitió abordar la resolución de (10), vía la representación (12). La validez de este desarrollo para *toda función continua* fue probada por uno de los mejores discípulos de Hilbert, **E. Schmidt**, en su Tesis (1905).

Los trabajos segundo y tercero de Hilbert sobre Ecuaciones Iintegrales se dedican a aplicar los resultados a distintos problemas de contorno en ecuaciones diferenciales y a la teoría de Sturm-Liouville.

El artículo cuarto es uno de los más apreciados de Hilbert. En él aparece claramente el espíritu actual del Análisis Funcional y la Teoría Espectral. En efecto, en este artículo Hilbert da un salto cualitativo: abandona deliberadamente el marco de las ecuaciones integrales y trata de crear una teoría general de formas bilineales y cuadráticas de infinitas variables que es aplicable en particular al estudio de E.I. En efecto, Hilbert introduce la noción de "sistema ortogonal completo de funciones" como una sucesión (ψ_n) de funciones continuas en $[a,b]$ tal que $(\psi_n, \psi_m) = \delta_{nm}$ y que cumple la "relación de completitud" siguiente:

$$(f,g) = \sum_{n=1}^{\infty} (f, \psi_n)(g, \psi_n),$$

para todo par de funciones continuas f y g. Si (ψ_n) es uno de tales sistemas (p.e., el sistema trigonométrico), y f es una solución de (10) con $\lambda = 1$, entonces si consideramos los "coeficientes de Fourier"

$$k_{pq} = \int_a^b \int_a^b k(x,y)\psi_p(x)\psi_q(y)\,dx\,dy, \quad b_p = (g, \psi_p), \quad x_p = (f, \psi_p),$$

los (x_p) satisfacen el sistema infinito

$$x_p + \sum_{n=1}^{\infty} k_{pn} x_n = b_p \ (p = 1, 2, \ldots) \qquad 14$$

De la desigualdad de Bessel resulta que $\sum\sum k_{pq}^2 < \infty$, $\sum b_p^2 < \infty$ y $\sum x_p^2 < \infty$. Recíprocamente, si (x_p) satisface $\sum x_p^2 < \infty$ y es solución de (14), la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n \int_a^b k(x,y)\psi_n(y)\,dy$$

converge absoluta y uniformemente, y define por tanto una función continua $u(x)$. Es inmediato que la función $f = g - u$ satisface $(f, \psi_p) = x_p$ y, de la completitud del sistema (ψ_n), resulta que f es solución de (10).

A partir de aquí, Hilbert abandona deliberadamente el punto de vista de las Ecuaciones Integrales para concentrarse en el estudio de la forma cuadrática general

$$Q(x) = \sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty} k_{pq}x_p x_q \qquad (k_{pq} = k_{qp}),$$

donde $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 < \infty$. La forma cuadrática es "completamente continua" si

$$\lim_{n\to\infty} Q_n(x) = Q(x),$$

uniformemente para todos los $x = (x_n)$ tales que $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2 \leq 1$, donde

$$Q_n(x) = \sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{n} k_{pq}x_p x_q.$$

(Nótese que esta condición permite asegurar el éxito del método de truncamiento de Fourier, siempre que las soluciones parciales obtenidas tengan normas en ℓ_2 uniformemente acotadas, en lenguaje actual).

Es obvio que el espacio real ℓ_2 de las sucesiones (x_n) de números reales de cuadrado sumable, está implícito en todos estos desarrollos. Más aún, por analogía con la norma euclí dea en $\mathbb{R}^n$, Hilbert introduce en ℓ_2 la distancia

$$d(x,y) = \left(\sum_{n=1}^{\infty}(x_n - y_n)^2\right)^{1/2},$$

y extiende, para funciones escalares sobre ℓ_2, las nociones de continuidad, límites, etc. Rápidamente aparece el hecho crucial de que no se cumple el análogo del teorema de Bolzano-Weierstrass en la "bola unidad" de ℓ_2, lo que lleva a Hilbert a considerar el equivalente a la noción actual de "topología débil" en ℓ_2, y prueba su famoso *principio de elección*, que permite extraer de cada sucesión acotada en ℓ_2 una subsucesión convergente "débilmente". Hilbert generaliza en este contexto las transformaciones ortogonales y prueba que toda forma cuadrática completamente continua puede reducirse a sus ejes por una transformación ortogonal:

$$Q(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n x_n^2.$$

Además, en el caso completamente continuo, Hilbert probó que el sistema infinito (14) se comporta exactamente igual que los sistemas lineales con un número finito de incógnitas: O bien el sistema homogéneo tiene como única solución la trivial, en cuyo caso (14) tiene solución única para cada $b = (b_p) \in \ell_2$, o bien el sistema homogéneo tiene un número finito de soluciones linealmente independientes, en cuyo caso el sistema transpuesto tiene el mismo número de soluciones linealmente independientes y (14) tiene solución si y sólo si $b = (b_p)$ es ortogonal a todas las soluciones del sistema transpuesto.

Hilbert también consideró el caso de formas cuadráticas no necesariamente completamente continuas, sino simplemente continuas (o equivalentemente, acotadas sobre la bola unidad) e incluso formas no acotadas, estableciendo así el germen de la moderna teoría espectral. De hecho, en el trabajo de Hilbert aparecen ya (en términos de la forma cuadrática asociada) algunas de las clases más importantes de operadores (de Hilbert-Schmidt, nucleares, etc.), aunque la formulación moderna en lenguaje de operadores lineales, en lugar de formas cuadráticas, se debe a F. Riesz (véase la próxima sección.)

Es evidente, con una perspectiva actual, que estos resultados están prefigurando la teoría de los espacios de Hilbert en su versión canónica de espacio ℓ_2. Por otro lado, en 1906 aparece también la famosa Tesis Doctoral de **M. Fréchet** "Sur quelques points du calcul fonctionnel", que tuvo una tremenda influencia, tanto para el desarrollo del Análisis Funcional como para el de la Topología. En su Tesis, Fréchet introduce la noción abstracta de *distancia* en un conjunto, lo que permite extender las nociones habituales de entornos, límites, continuidad, etc. en conjuntos abstractos. Tambien introdujo Fréchet las nociones de *compacidad, completitud y separabilidad*, y las estudió en distintos espacios funcionales ($C([a, b])$, $H(D)$, $B([a, b])$, etc.), mostrando la importancia de las mismas.

Estas ideas topológicas se difundieron rápidamente. No es extraño, pues, que se intentaran aplicar en el contexto de los importantes trabajos desarrollados por Hilbert.

Este programa fue llevado a cabo por el mismo Fréchet y uno de los mejores discípulos de Hilbert: **E. Schmidt** quien, en un artículo publicado en 1908, definió el "espacio de dimensión infinita" ℓ_2, con las nociones actuales de producto escalar, norma, ortogonalidad, etc. Introdujo también el lenguaje geométrico moderno, probando el teorema de la proyección ortogonal y el proceso de ortogonalización que lleva su nombre. Este lenguaje geométrico le permitió abordar el sistema de ecuaciones lineales más general posible en ℓ_2:

$$(a_p, x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{pn} x_n = c_p \quad (p = 1, 2, \ldots),$$

siendo $a_p = (a_{pn}) \in \ell_2$. La manera de resolver este problema, recuerda el método empleado por Fourier para resolver problemas concretos análogos (véase Sección 3): Primero Schmidt "trunca" el sistema y, utilizando la proyección ortogonal, obtiene una solución x_m de norma mínima del sistema truncado

$$(a_p, x) = c_p \quad (p = 1, 2, \ldots, m).$$

Si esas soluciones tienen normas uniformemente acotadas, el "principio de elección" demostrado por Hilbert (es decir, la compacidad débil de la bola unidad de ℓ_2), le permite extraer una subsucesión que converge a una solución del problema. Esta resulta ser condición necesaria y suficiente, y puede reformularse (lo que hace Schmidt) en términos de los datos del problema, lo que permite su solución completa y elegante. Como veremos más adelante, este argumento se va a repetir en diferentes contextos. La búsqueda de resultados análogos al "principio de elección" de Hilbert en otros espacios normados va a ir conformando la idea general de la topología débil y las técnicas de dualidad.

Otros dos jóvenes matemáticos, **E. Fischer** y **F. Riesz**, también compartieron esta visión geométrica y topológica del espacio de Hilbert, lo que les llevó a descubrir (independientemente) el llamado "teorema de Fischer-Riesz", que a su vez establece una inesperada relación de estos temas con otro gran descubrimiento de la época: la *Teoría de integración de Lebesgue.* El teorema en cuestión establece que, fijado un sistema ortonormal completo de funciones (ψ_n), la aplicación $f \mapsto ((f, \psi_n))_{n=1}^{\infty}$ es un *isomorfismo hilbertiano* entre el espacio $L_2([a, b])$ de las (clases de) funciones de cuadrado integrable Lebesgue sobre $[a, b]$ (que se define en estos trabajos), y el espacio de Hilbert ℓ_2. Como importante subproducto, resulta que los resultados de Hilbert se pueden aplicar a *cualquier* ecuación integral con núcleo $k \in L_2([a, b]^2)$, objetivo perseguido infructuosamente por distintos matemáticos de la época (Hadamard y Hilbert entre ellos.) Las consecuencias de este resultado estructural, hicieron ver la importancia del nuevo Análisis, y abrieron el camino hacia la introducción de los espacios L_p y ℓ_p por Riesz y, en definitiva, la aparición de la noción general de espacio normado.

7.- Los años decisivos. La aportacion de F. Riesz.

Probablemente, uno de los mayores responsables del desarrollo del Análisis Funcional, tanto por la variedad de aplicaciones como por la profundidad y originalidad de sus contribuciones, es el matemático húngaro **Frédéric Riesz** (1880-1956). Ya hemos comentado el famoso teorema de Riesz-Fischer, descubierto independientemente por Fischer y Riesz (a la sazón Profesor de Enseñanza Media en una pequeña ciudad de Hungría) en 1907, y que supuso la primera contribución de Riesz en este campo. En el mismo año, Fréchet y Riesz, independientemente, obtienen la representación de cualquier forma lineal continua T sobre el espacio L_2 en la forma

$$T(f) = (f, g) = \int f(x)g(x)\, dx$$

para alguna g del mismo espacio.

Dos años más tarde, en 1909, Riesz resuelve completamente un problema abordado por **J. Hadamard** y Fréchet en 1903 y 1904, probando que cualquier funcional lineal continuo T sobre el espacio $C([a, b])$ de las funciones reales continuas sobre $[a, b]$, puede escribirse en forma de integral de Stieltjes:

$$T(f) = \int_a^b f(x)\, d\alpha(x),$$

donde α es una función de variación acotada. Como el mismo Riesz indica, la correspondencia $T \leftrightarrow \alpha$ puede hacerse biyectiva, (imponiendo, por ejemplo, que α sea continua a la derecha y $\alpha(a) = 0$). Este el el famoso "teorema de representación de Riesz", que tendría gran influencia en el desarrollo posterior de la teoría de la integración abstracta. Punto de partida de sucesivas generalizaciones por Radon y muchos otros, este teorema se tomó como definición básica en la "Teoría de medidas de Radon" desarrollada por el grupo Bourbaki a mediados de los 40. Por otro lado, el teorema significó un paso importante en la clarificación de las ideas de dualidad, ya que es el primer ejemplo en el que el dual topológico no puede identificarse con el espacio base (como sucedía con ℓ_2 y L_2).

En 1910, Riesz introduce los espacios $L_p,\ 1 < p < \infty$, como generalización natural de L_2. Se plantea Riesz la resolución de un sistema de infinitas ecuaciones del tipo

$$\int_a^b f_i(x)g(x)\,dx = c_i \quad (i \in I), \tag{15}$$

donde las f_i y los escalares c_i son los datos, y se trata de encontrar una solución g. Despues de referirse a trabajos precedentes de Hilbert, Schmidt y Fisher, quienes consideraron el caso $f \in L_2 = L_2([a,b])$, Riesz estudia el problema para una clase más general de funciones (no usó la palabra "espacio"), a saber, la clase ("Klasse") de funciones f tales que $|\,f\,|^p$ es integrable en sentido de Lebesgue, que denotó por $[L^p]$ $(p > 1)$. Riesz hace notar la linealidad de esta clase. Para que el problema tenga siempre sentido, Riesz muestra que la solución g debe buscarse en la clase $[L^q]$, siendo $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Para $p = 2$, Riesz hace notar que sus resultados pueden deducirse de los de Schmidt (véase final de la Sección 6), via el teorema de Fischer-Riesz. Introduce la norma usual en estos espacios y, utilizando la idea de Schmidt, logra probar la existencia de soluciones de norma mínima de un número finito de ecuaciones. Para seguir el paralelismo con el método de Schmidt, necesita probar un "principio de elección" en $L_p([a,b])$, lo que le lleva a introducir la noción de convergencia débil en la forma

$$(f_n) \xrightarrow{w} f \iff \int_a^x f_n(t)\,dt \to \int_a^x f(t)\,dt,\ \forall x \in [a,b].$$

(Posteriormente, Riesz prueba que esto es equivalente a que $\int f_n g$ converja a $\int fg$, para cada g de $L_q([a,b])$). De esta manera, aunque sin usar la palabra *dual*, Riesz establece la dualidad $L_p^* = L_q$ (p y q conjugados) y prueba que toda sucesión en L_p acotada en norma, posee una subsucesión débilmente convergente a alguna función de L_p. La condición necesaria y suficiente para que (15) tenga solución, se traduce entonces, como en el caso de Schmidt, en una condición de acotación uniforme de las normas de las soluciones de los sistemas "truncados", que, a su vez, puede expresarse en términos de los datos únicamente.

Esta idea se va a repetir varias veces en la obra de Riesz. Por ejemplo, es central en el libro *Les Systèmes d'Equations Linéaires à une Infinité d'Inconnues*, publicado por Riesz en Paris en 1913, y que supone una contribución fundamental al estudio de los sistemas de infinitas ecuaciones lineales, con infinitas incógnitas, de la forma

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{in}x_n = c_i \ (i = 1, 2, \ldots), \tag{16}$$

donde $a_i = (a_{in}) \in \ell_p$ (precisamente se definen aquí estos espacios, por analogía a los L_p) y la solución $x = (x_n)$ se busca en ℓ_q, con q conjugado de p. La resolución del problema pasa también por un proceso de truncamiento, más un criterio de compacidad para alguna topología adecuada (en este caso, la topología débil).

Vemos pues que en la obra de Riesz se van conformando nociones básicas del Análisis Funcional, como son la noción de norma, espacio dual, convergencia débil, etc. Pero no acaba aquí el trabajo seminal de Riesz, ya que en un artículo fundamental sobre ecuaciones funcionales lineales, publicado en 1918 en *Acta Mathematica*, Riesz crea su famosa *teoría de operadores compactos*, versión lineal de gran parte de las nociones introducidas por Hilbert en su 4º artículo sobre Ecuaciones Integrales, pero sin disponer de la herramienta de la ortogonalidad y la geometría del espacio de Hilbert. Aunque el desarrollo de la teoría lo hace Riesz en un espacio de Banach concreto, el espacio $C([a, b])$, él mismo señala que ésto no es esencial, y los resultados son válidos en otros espacios funcionales. De hecho, toda la teoría se desarrolla en términos de la noción de *norma*, cuyos axiomas se introducen también en este trabajo, para el caso concreto de $C([a, b])$.

A la vista de la dualidad entre L_p (resp., ℓ_p) y L_q (resp., ℓ_q), los problemas (15) y (16) pueden interpretarse también así: *Encontrar una forma lineal continua T que tome los valores prefijados c_i en los elementos dados f_i* (o a_i). Como ya dijimos, éste no fue el punto de vista adoptado por Riesz, pero sí el que, en conexión con el problema (16), tomó el matemático austríaco **E. Helly** en 1912, quien obtuvo una nueva demostración de los resultados de Riesz. Helly participó en la Primera Guerra Mundial y fue hecho prisionero, por lo que no volvió a la actividad investigadora hasta 1921. En su importante trabajo, dio un salto cualitativo significativo, considerando en lugar de espacios concretos, "espacios normados de sucesiones", es decir subespacios vectoriales de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ dotados de una cierta noción de norma. En este marco abstracto, investigó las nociones geométricas ligadas a la convexidad, y su relación con la "norma". Llevado por esta idea geométrica, introdujo un cierto "dual" (el equivalente a lo que hoy se conoce como α-dual), y planteó por primera vez el problema de la extensión de una forma lineal continua definida sobre un subespacio, a todo el espacio, conservando su norma. La ausencia de un *principio de elección* en este marco le llevó a Helly a introducir nuevas técnicas de demostración, usando sistemáticamente la separabilidad del espacio y el principio de inducción. Los resultados de Helly fueron fundamentales para la solución general del problema que, como veremos, obtuvo **H. Hahn** en 1927.

El Bautismo del Análisis Funcional.

Como hemos visto, la idea de una *Teoría de Funciones de infinitas variables* está más a menos latente en los primeros 20 años del siglo XX:

•Desde el comienzo de sus estudios sobre ecuaciones integrales, **Volterra** ve la utilidad de estudiar funciones que dependen, a su vez, de otra función (*línea* = *curva*) y utilizó sistemáticamente las analogías formales de tales funciones (*fonctions de lignes*) con las funciones usuales en sus trabajos. Sus dos monografías *Lecons sur les fonctions de lignes* (Roma, 1910) y *Lecons sur les équations intégrales et les équations intégro-differentielles* (Paris, 1912) expresan claramente sus ideas y están plagados de ejemplos de la Física y la Biología.

•**Hilbert** es consciente de ello en sus estudios sobre ecuaciones integrales y explota fuertemente las analogías algebraicas y geométricas de ℓ_2 con el espacio euclídeo n-dimensional (si bien no aparece ninguna indicación de que Hilbert fuera consciente de la estructura vectorial y su importancia en su trabajo).

•**Hadamard** había mostrado ya su interés en los espacios funcionales cuando planteó y resolvió parcialmente el problema del cálculo del dual de $\mathcal{C}([0,1])$. Por cierto, en este trabajo Hadamard introduce el nombre de *funcional*, en lugar de función de línea. En 1912 publicó un artículo en *L'Enseignement Mathématique* sobre lo que él llamaba "cálculo funcional" (e.d., el estudio de espacios cuyos elementos fueran funciones, sometidos a operaciones "arbitrarias") que tuvo gran influencia posterior. Desde entonces, Hadamard fue un gran promotor del nuevo análisis.

•La Tesis de **Fréchet** permite extender a conjuntos abstractos las nociones de límite y continuidad. Más de la mitad de su Tesis está dedicada al estudio de espacios funcionales *concretos*: $C([a,b])$ con la norma del supremo; $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ con la topología de la convergencia puntual; Las funciones holomorfas en el disco unidad, con la topología compacta, etc. Durante las dos siguientes décadas, Fréchet fue un entusiasta promotor de lo que él llamaba *Analyse Générale*: en una serie de artículos entre 1909 y 1925 dedicados a lo que hoy se conoce como *diferencial Fréchet* introduce sus ideas sobre los espacios funcionales y las nociones topológicas sobre ellos.

•Ya hemos hablado largo y tendido del papel de **F. Riesz** en el desarrollo del Análisis Funcional. Limitémonos aquí a citar sus palabras en la introducción de *Les Systemes d'equations linèaires à une infinité d'inconnues* (1913): *"...Nuestro estudio no forma parte,* *propiamente hablando, de la Teoría de Funciones. Más bien podría considerarse como ... un primer estadio de una teoría de funciones de infinitas variables...”*

•Al otro lado del Atlántico, matemáticos como **E. H. Moore, M. Bôcher** y **G. C. Evans** están al tanto de los desarrollos de sus colegas europeos y participan del mismo interés hacia el estudio de los espacios funcionales y el *General Analysis*, como lo llamó Moore en un *survey* publicado en el Bulletin of the Amer. Math. Soc. en 1912 y en unas Conferencias publicadas en 1910. la teoría general de las ecuaciones integrales, la *teoría de una infinidad numerable de variables de Hilbert* (sic) o los trabajos de Fréchet, formarían parte de este *General Analysis*. También es importante la contribución de Moore al desarrollo de la topología general, al introducir la noción de *red* y la convergencia generalizada en un artículo conjunto con **H.L. Smith** (*A general Theory of Limits*, Amer. Journ. of Math. (1922)). En el *Colloquium* de la A,M,S, en Cambridge, en 1916, G. C. Evans dio un *survey* sobre *Functionals and Their Applications*, en el que se recogían los resultados sobre funcionales y ecuaciones integrales y se comentaban las principales ideas de Volterra, Hadamard, Fréchet, Riesz, Bôcher, Moore, etc.

•Finalmente, en 1922, el alumno de Hadamard **Paul Lévy** publica el libro *Lecons d'Analyse Fonctionnelle*, que supone el bautismo oficial de la nueva disciplina. En el libro, se divide el *calcul fonctionnelle* en *algèbre fonctionnelle* y *analyse fonctionnelle*. El primero trata de problemas cuyas incógnitas son funciones ordinarias, mientras que el segundo aborda problemas cuyas incógnitas son funcionales.

Las contribuciones fundamentales a que nos hemos venido refiriendo, preparan el camino para el desarrollo de una teoría general de espacios normados, funcionales y operadores lineales entre ellos. Esto aconteció en la Tesis de **S. Banach**, defendida Lwów en Junio de 1920 y publicada dos años después en *Fundamenta Mathematicae*. En la Introducción, Banach declara su intención de demostrar un serie de resultados válidos en distintos “campos funcionales”, para lo cual establece un conjunto de teoremas en un marco muy general que, por especialización, dan lugar a los distintos resultados buscados. Con sus propias palabras:

> *“El objetivo de este trabajo es demostrar algunos teoremas que son ciertos para diferentes espacios funcionales (champs fonctionneles). En lugar de probar los resultados para cada espacio funcional particular, he optado por enfoque diferente: considero en general un conjunto de elementos abstrac-*

> *tos, para los que postulo una serie de propiedades y demuestro los teoremas para esos conjuntos. Entonces pruebo que los distintos espacios funcionales particulares en los que estoy interesado, satisfacen los axiomas postulados...”*

El marco general en cuestión es precisamente lo que hoy conocemos como espacio normado completo. Banach da la definición axiomática de espacio vectorial real, normado y completo y comprueba que numerosos *campos funcionales* verifican esos axiomas. La Tesis contiene, entre otros, el *principio de acotación uniforme* y la forma general del *principio de contracción* en espacios métricos completos y Banach aplica con gran habilidad estos resultados a distintos espacios funcionales.

Una década de consolidación y desarrollo.

Los artículos de Wiener y Banach fueron pasos decisivos en el desarrollo del Análisis Funcional, al establecer la noción correcta de espacio normado, que supone una síntesis axiomática de propiedades algebraicas y topológicas suficientes para construir una teoría potente y con muchas aplicaciones. Durante la siguiente década se produce un periodo de gran actividad en el desarrollo de la teoría de los espacios de Banach (“espacios de tipo (B)”, en la notación de Banach) y sus aplicaciones a distintas ramas del Análisis. Muchos de estos avances se debieron al propio Banach (con la ayuda, después, de su discípulo **S. Mazur**). De esta forma, Lwów se convirtió en un centro de referencia importante en el desarrollo del Análisis Funcional, a lo que contribuyó también en gran medida la fundación por **H. Steinhaus** de la Revista *Studia Mathematica* en 1929. Esta revista jugó un papel análogo a la que desempeñó en el desarrollo de la topología *Fundamenta Mathematicae*, fundada en Varsovia en 1920 por **W. Sierpinski** y **S. Mazurkiewicz** (entre otros.

Hagamos un recorrido somero por los avances más destacados, tomando como guía los considerados tres resultados principales del Análisis Funcional clásico: El Principio de Acotación Uniforme, el Teorema de Hahn-Banach y el Teorema de la Aplicación Abierta.

`Principio de Acotación Uniforme`. Los antecedentes aparecen en un famoso trabajo, ya citado, de **Hellinger** y **Toeplitz**, aparecido en Matematische Ann., en 1910, donde desarrollan una teoría de matrices infinitas acotadas (equivalentemente, formas bilineales sobre ℓ_2). Utilizando el “método de la joroba deslizante”, (previamente usado por Lebesgue para construir una función continua con serie de Fourier divergente en un punto prefijado), demuestran que si (K_n) es una sucesión de formas bilineales acotadas sobre ℓ_2 tal que para cada par x, y de elementos de la bola unidad de ℓ_2, la sucesión $(K_n(x, y)$

está acotada (por una constante $M_{x,y}$, que depende de xe y, entonces la sucesión está uniformemente acotada, e.d., existe $M > 0$ tal que $|K_n(x, y)| \leq M, \forall n$ y $\forall x, y$ en la bola unidad de ℓ_2.

En su Tesis, Banach prueba el Principio de Acotación uniforme para una *sucesión* de operadores lineales entre espacios de Banach. La continuidad del límite puntual de la sucesión, la deriva Banach de un resultado general sobre puntos de continuidad de los límites puntuales de una sucesión de funciones continuas (e.d. funciones *de la primera clase de Baire*. El resultado que usa y demuestra Banach, había sido probado por **R. Baire** en 1899 para funciones sobre abiertos de $\mathbb{R}^n$). La acotación uniforme como consecuencia de la acotación puntual, la demuestra Banach también por el método de la joroba deslizante. Casi al mismo tiempo, **H. Hahn** probó en *Über Folgen linearer Operationen* (Monasth. für Math. und Phys. (1922)) el mismo resultado y con similares técnicas para una sucesión de *funcionales* sobre un espacio de Banach. Finalmente, en *Sur le principle de condensation des singularités* (Fund. Math., 1927), **Banach** y **Steinhaus** probaron el resultado para una familia arbitraria de operadores entre espacios de Banach, extendiendo un teorema de Baire a espacio de Banach y comenzando así la aplicación de las técnicas de categoría de Baire al Análisis Funcional. El resultado para $F-$espacios fue probado por **S. Mazur** y **W. Orlicz** en 1933.

`El Teorema de Hahn-Banach.` Como ya hemos dicho, Helly había probado algunos resultados de extensión para espacios normados de sucesiones en su trabajo de 1921. En un artículo publicado en 1927 en el *Journal für die reine und ang. Math.*, **H. Hahn** retomó el trabajo y las técnicas de Helly (a quien cita) en el contexto de los espacios de Banach generales, y probó que toda forma lineal continua sobre un subespacio de un espacio de Banach real, se puede extender al total conservando su norma. Su demostración utiliza por primera vez en Análisis Funcional la inducción transfinita, en lugar de la inducción ordinaria que había empleado Helly.

Hahn introduce formalmente en el mismo trabajo la noción de *espacio dual* E' de un espacio de Banach E ("polare Raum" en su terminología), mostrando que no se reduce a 0 (si $E \neq \{0\}$). También define el bidual y la noción de *espacio reflexivo* ("regular", según Hahn) Por tanto, este trabajo puede considerarse como el inicio "oficial" de la teoría de dualidad en espacios normados (si bien es cierto que para espacios concretos ya se habían obtenido muchos resultados).

Dos años más tarde, en un artículo aparecido en *Studia*, **Banach** redescubre el teorema de extensión de Hahn con una demostración similar. (Más tarde, reconoció la prioridad de Hahn). En un artículo aparecido en el mismo número de la Revista (*Sur les fonctionnelles linéaires II*), Banach se da cuenta de que el argumento puede generalizarse a funcionales lineales mayorados por una subnorma o seminorma, y aplica este resultado para obtener resultados de dualidad, relacionando las propiedades de un operador lineal continuo y su transpuesto. Esta formulación iba a jugar también un importante papel posteriormente en la teoría de espacios localmente convexos. Banach se da cuenta de que esta formulación permite obtener más directamente resultados previos relacionados con el *problema de la medida*, lo que le permitió obtener nuevos resultados para medidas abstractas, límites generalizados, etc.

`Teorema de la Aplicación Abierta.` Este importante resultado es una contribución genuina del genio de Banach. Una versión débil del resultado (concretamente, que toda biyección lineal continua entre espacios de Banach tiene inversa continua) aparece ya en el artículo mencionado de 1929 donde se da la forma general del teorema de extensión de formas lineales mayoradas por subnormas. La versión general para espacios de Fréchet, aparece en el libro de Banach *Théorie des opérations linéaires* aparecido en 1932 y del que volveremos a hablar más adelante. La demostración, que es prácticamente la que aparece en la mayoría de los textos actuales, es una ingeniosa aplicación de la teoría de categoría de Baire, y el resultado es mucho más profundo que el Teorema de Banach-Steinhaus. Según Dieudonné, es de hecho el resultado más destacado incluido en el libro de Banach (afirmación cuanto menos, discutible). Banach también obtiene como consecuencia el Teorema de la Gráfica Cerrada y, a lo largo del libro, muchas aplicaciones de estos resultados a distintos problemas del Análisis.

J. von Neumann y la Mecánica Cuántica.

En el otoño de 1926, el joven **J. von Neumann** llegó a Göttingen, como ayudante de Hilbert. Por entonces, Hilbert estaba tratando de encontrar un modelo matemático "razonable" para la recién creada Mecánica Cuántica. A diferencia de otras teorías físicas, los modelos matemáticos propuestos para desarrollar la Mecánica Cuántica fueron muy diversos. En muchos casos, las matemáticas empleadas eran claramente insatisfactorias y en absoluto rigurosas. Las formulaciones más conocidas son la *Mecánica Matrices* de **W. Heisenberg** y la *Mecánica Ondulatoria* de **E. Schrödinger**. El mismo Schrödinger se encargó de encontrar lo que llamó "una identidad matemática formal" entre ambas formulaciones. Esencialmente se trataba de una regla formal que permitía trasladar toda ecuación de la mecánica ondulatoria a una ecuación de la mecánica matricial, y un recíproco parcial.

El problema residía en la búsqueda de una analogía formal entre el espacio "discreto" Z de los valores de los índices de las matrices que aparecían en la teoría de Heisenberg, y el espacio Ω de la variable "continua" de las ecuaciones de Schrödinger. Como señala Von Neumann, *"... no es de extrañar que no se pueda lograr esto sin cierta violencia sobre el formalismo y la matemática: los espacios Z y Ω son verdaderamente muy distintos, y toda tentativa de ponerlos en relación debe chocar con grandes dificultades."* . El descubrimiento innovador de Von Neumann fue percatarse de que, si bien Z y Ω son muy distintos, **los espacios de funciones reales sobre ellos que intervienen en la Mecánica Cuántica son esencialmente los mismos.** En efecto, a las sucesiones que aparecían en la Mecánica de matrices habitualemente se les imponía la condición de normalización $\sum \mid x_n \mid^2 = 1$, mientras que las funciones ψ de la Mecánica ondulatoria debían cumplir $\int \mid \psi \mid^2 = 1$, tras su interpretación como densidades de probabilidad. Esto sugirió a Von Neumann limitar el ámbito de las sucesiones o funciones aceptables en ambas teorías a lo que hoy conocemos como los espacios ℓ_2 y L_2 (Von Neumann los designó por F_Z y F_Ω, respectivamente). El teorema de Riesz-Fischer, bien conocido para los matemáticos desde 1907, probaba que ambos espacios eran isomorfos e isométricos Como quiera -razonó Von Neumann- que F_Z y F_Ω (¡y no Z y Ω!) forman el "substrato analítico real" de las mecánicas matricial y ondulatoria, respectivamente, y ambos espacios son isomorfos, esta isomorfía significa que ambas teorías deben dar los mismos resultados.

De esta manera, la equivalencia de la mecánica de matrices y la mecánica ondulatoria resulta una consecuencia lógica del hecho de que ambas son sólo diferentes representaciones matemáticas de las mismas relaciones abstractas. *Es de esperar* -añade Von Neumann- *que una formulación de la mecánica cuántica basada exclusivamente en las propiedades intrínsecas básicas comunes a F_Z y F_Ω, permitirá obtener una estructura unitaria, presentando las relaciones absolutamente esenciales, y eliminando lo accidental que resulta del marco formal en cada caso elegido...*

Esa estructura básica común a la que hace referencia Von Neumann es la noción de *Espacio de Hilbert abstracto.* Hasta entonces, se entendía por "espacio de Hilbert" uno de los dos espacios “concretos ” ℓ_2 o L_2. Von Neumann fue el primer en concebir un espacio de Hilbert “abstracto”, en el sentido actual. Abandonando cualquier representación concreta, Von Neumann, trabajando intrínsecamente, con las nociones obtenidas directamente de los axiomas, von Neumann publicó tres artículos fundamentales entre 1929 y 1932, en los que desarrolló la teoría de operadores normales y hermitianos (en general, no acotados ni definidos en todo el espacio) en un espacio de Hilbert complejo y aplicó los resultados para formular un modelo matemático de la Mecánica Cuántica en la que los “observables” se corresponden con operadores hermitianos, y que es, esencialmente, el utilizado actualmente.

Tres importantes libros.

El año 1932 es una fecha importante en la historia del Análisis Funcional. Y no solamente porque en ese año nacen **C. Bessaga, A. Pelczynski** y **S. Rolewicz**, futuros alumnos de Mazur e integrantes de la vanguardia de la nueva escuela polaca que, a partir de 1960, iba a dar un nuevo impulso a la teoría de espacios de Banach, sino porque en este año aparecen tres grandes monografías, que iban a tener una gran difusión y repercusión en el desarrollo posterior, y que significaron la consolidación definitiva del Análisis Funcional como una rama independiente e importante del Análisis.

La primera es *Matematische Grundlagen der Quantenmechanik* de **J. Von Neumann** (traducido al español, antes que al inglés, por el “Instituto Jorge Juan” con el título de *Fundamentos Matemáticos de la Mecánica Cuántica*). Una parte importante del libro está dedicada a la primera exposición sistemática de la teoría general de Espacios de Hilbert y de la teoría espectral desarrollada en sus trabajos anteriores; Después, von Neumann para a describir la conexión entre los conceptos introducidos y sus ideas sobre la Mecánica cuántica. El libro incluye un extenso estudio sobre los aspectos probabilísticos del proceso físico de *medida* y las relaciones de incertidumbre. Von Neumann también compara su modelo con los formalismos usados por Born, Heisenberg, Jordan y Dirac.

El segundo de los libros que vamos a comentar es *Linear Transformations in Hilbert Space*, de **M. Stone**, en el que se presenta la teoría espectral de operadores autoadjuntos en espacios de Hilbert, con aplicaciones al análisis clásico. El libro, muy bien organizado y con un estilo claro y directo, alcanzó rápidamente una gran popularidad y se convirtió en el texto de referencia sobre espacios de Hilbert durante al menos dos décadas. Tras definir axiomáticamente la noción de espacio de Hilbert (separable) y los resultados generales de la teoría, pasa a estudiar los operadores autoadjuntos no acotados, obteniendo el teorema espectral con técnicas diferentes a las empleadas por von Neumann. El estudio de los operadores maximales simétricos y las extensiones maximales simétricas de un operador dado, sigue más de cerca la exposición de von Neumann, aunque también contiene resultados originales. El último Capítulo (cerca de 220 páginas) está dedicado íntegramente a las aplicaciones a la teoría de ecuaciones integrales y diferenciales.

Finalmente, el tercero de los libros que queremos comentar es *Théorie des Opérations Linéaires*, de **S. Banach**. Si el libro de von Neumann mostró las aplicaciones de la nueva teoría a la Mecánica cuántica, y el de Stone al análisis clásico, el de Banach está dedicado fundamentalmente al estudio de la estructura de espacio normado completo real (*espaces (B)*. Escrito en un estilo claro y elegante, este libro reúne los resultados más importantes de la teoría de Espacios de Banach (en particular, los obtenidos por su autor entre 1922 y 1929) y muchas aplicaciones al Análisis clásico. Comienza con una introducción a la teoría de espacios métricos y una discusión de las estructuras algebraicas de grupo y espacio vectorial, para pasar inmediatamente a discutir los espacios *de tipo (F)* (espacios de Fréchet) y espacios *de tipo (B)* (espacios de Banach), con abundantes ejemplos y aplicaciones del análisis clásico. En el libro se incluye la teoría de Riesz de operadores compactos, con aplicaciones a diversos tipos de ecuaciones integrales, y el estudio de series biortogonales y de bases topológicas en espacio de Banach. Banach dedica gran parte del resto del libro al estudio de los funcionales lineales y la convergencia débil y débil* de sucesiones. Se demuestran las versiones secuenciales de los teoremas de Alaoglu-Bourbaki y Banach-Dieudonné, junto con la caracterización de la reflexividad por la compacidad (secuencial) débil de la bola unidad. En fin, además de éstos y muchos otros resultados, el libro concluye con una lista detallada y comentada de cuestiones y problemas abiertos que ha sido fuente de inspiración de muchas investigaciones posteriores. La inmensa maquinaria desarrollada desde entonces, ha permitido resolver la mayoría de estas cuestiones, (algunas muy recientemente, en parte gracias a los trabajos de los recientes medallistas Field **J. Bourgain** y **W. T. Gowers**).

El libro de Banach tuvo una gran influencia en el desarrollo del Análisis Funcional. La tremenda cantidad de información, organizada de forma sistemática, junto con la variedad y diversidad de aplicaciones que contiene, contribuyeron a su rápida difusión y aceptación entre los analistas y estimuló la aparición de una gran cantidad de trabajos sobre la teoría de espacios de Banach.

Las Álgebras de Banach.

Tras sus trabajos en Teoría Espectral, von Neumann se mostró sumamente interesado en continuar el estudio de las subálgebras involutivas de $\mathcal{L}(E)$, dotadas de ciertas restricciones topológicas "razonables". En una serie de artículos que, con la colaboración parcial de **F. Murray**, publicó a partir de 1935, desarrolló gran parte de su programa, estableciendo las bases y muchos de los resultados fundamentales de lo hoy conocemos como *álgebras de von Neumann*. Estos artículos están entre los más difíciles y profundos de von Neumann.

Sorprendentemente, los resultados de von Neumann aparecieron 5 años antes de que se definieran los conceptos elementales de la teoría general de *álgebras normadas*, creación del matemático ruso **I. Gelfand** en 1941. La idea fundamental de Gelfand fue extender la teoría espectral de Riesz a un álgebra normada arbitraria A, con unidad e: imitando la definición de Riesz para el álgebra $\mathcal{L}(E)$ de los endomorfismos continuos de un espacio de Banach, Gelfand define el *espectro* de un elemento $x \in A$, como el conjunto $\sigma(x) := \{\lambda \in \mathbb{C} : x - \lambda e \text{ no es inversible en } A\}$. Si A es completa, se recuperan los resultados principales de la teoría de Riesz. Gelfand consideró también el conjunto de todos los caracteres de A, que con la topología inducida por la débil de A', es un conjunto compacto (el *espectro* de A), y lo identificó con el conjunto de ideales maximales de A. Un poco más tarde, en colaboración con **M. Naimark**, comenzó el estudio de lo que hoy se conocen como C^*-álgebras; las álgebras unitarias y conmutativas de este tipo resultan ser isométricas al álgebra de funciones continuas sobre su espectro (*teorema de Gelfand-Naimark*). Este resultado permitió dar una nueva interpretación de la teoría espectral de Hilbert, Riesz y von Neumann para operadores normales N sobre un Hilbert E: al fin y al cabo, ¡la subálgebra de $\mathcal{L}(E)$ generada por I_E, N y N^* es una C^*-álgebra con unidad!.

Desde 1940, la teoría de álgebras de Banach y sus generalizaciones se ha desarrollado enormemente, con profundas aplicaciones a la teoría de funciones de varias variables complejas, álgebras de funciones continuas y, especialmente, análisis armónico (tanto "clásico", como "abstracto"), en donde el lenguaje y las técnicas de álgebras de Banach se han hecho imprescindibles.

Los espacios Localmente Convexos.

Obviamente, los espacios normados no agotan todas las posibilidades en el estudio de los espacios funcionales. En su Tesis, Fréchet estudia espacios funcionales clásicos, como las funciones holomorfas en un abierto de $\mathbb{C}$ con la topología compacta-abierta, que no son normables. Más aún, el mismo Fréchet se da cuenta de que las nociones métricas pueden incluso no ser suficientes: el límite puntual de una sucesión de funciones reales continuas y acotadas sobre $\mathbb{R}$ es una función de la clase de Baire 1; si la convergencia puntual en $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ fuera metrizable, la adherencia de $A := \mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ en $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ serían las funciones de Baire de clase 1 y, por tanto, el límite puntual de una sucesión de tales funciones (que sería una función de clase 2), debería ser del mismo tipo; ¡Pero se sabe que existen funciones de clase 2 que no son de clase 1!.

También Banach. en su libro, dedica un capítulo a los espacios de tipo (F) que, en general, no son normables. Sin embargo, sorprendentemente, las nociones topológicas generales no se aplicaron en este contexto hasta más tarde. La topología débil, tema central del libro de Banach, sólo se trata en términos de sucesiones, como ya hemos dicho.

En su segundo artículo sobre la teoría espectral (1930), **von Neumann** introduce la topología débil en un espacio de Hilbert H y las topologías débil y fuerte de operadores en el espacio de endomorfismos de H en términos de *entornos*. Un sencillo ejemplo (el conjunto $S := \{e_m + me_n : 0 \leq m < n,\ n \in \mathbb{N}\}$), muestra que existen conjuntos $S \subset \ell_2$ tales que 0 es punto de acumulación de S en la topología débil, pero no es límite de ninguna *sucesión* de puntos de S.

La noción general de *espacio vectorial topológico (e.v.t.)* (e.d., un espacio vectorial, dotado de una topología que hace continuas las operaciones de suma y producto por escalares), se debe a **A. Kolmogoroff**, en un artículo publicado en *Studia* en 1934. En el mismo, introduce también una noción de *conjunto acotado*, que coincide con la conocida para espacios normados, pero que sólo depende de la topología del espacio: A es acotado si, para toda sucesión $(x_n) \subset A$ y toda sucesión (λ_n) de escalares, tendiendo a 0, la sucesión $(\lambda_n x_n)$ converge a 0. Esta noción, que iba a jugar un importante papel en el futuro, permite a Kolmogoroff caracterizar los espacios vectoriales topológicos (separados) cuya topología se puede definir por una norma: son precisamente aquellos que poseen un entorno convexo y acotado de 0.

Por la misma época, **G. Köthe** y **O. Toeplitz** comienzan sus trabajos sobre espacios de sucesiones (muchos de ellos, modelos de espacios de funciones analíticas, identificando la sucesión de escalares con los coeficientes del desarrollo en serie), dotados de diversas topologías vectoriales asociadas a la dualidad $\langle E, E^\times \rangle$, siendo $E^\times$ el *dual de Köthe* de E, e.d., el espacio formado por todas las sucesiones numéricas (u_n), tales que $\sum |u_n x_n| < \infty$, *para toda sucesión* $(x_n) \in E$. Gran parte de la teoría general de dualidad que iba a desarrollarse posteriormente, tiene su origen en los trabajos de Köthe y su escuela.

En 1935, a raíz de sus trabajos sobre funciones semiperiódicas, **J. von Neumann** introduce la noción de espacio vectorial topológico (sin mencionar a Kolmogoroff) y la más útil de *espacio localmente convexo (e.l.c.)*, coincidiendo con un renacimiento del interés por el estudio de los conjuntos convexos: En 1932, **S. Mazur** había dado la versión geométrica del Teorema de Hahn-Banach y probando la existencia de hiperplanos soporte por cada punto frontera de cualquier conjunto abierto y convexo de un espacio normado; Poco más tarde (1940), en un artículo aparecido también en *Studia*, **M. Krein** y **D. Milman** introdujeron la noción de *punto extremo* de un conjunto convexo y probaron el famoso teorema que lleva su nombre, con tantas aplicaciones al Análisis.

La noción de e.l.c. demostró ser la generalización más adecuada de la noción de espacio normado. El teorema de Hahn-Banach es válido en estos espacios (esencialmente es válida la demostración de Banach) y, por tanto, el espacio dual es "grande" (al menos, para espacios separados). Esto permitió extender las técnicas de Köthe y su escuela a un contexto más general, obteniéndose una potente *teoría de dualidad* para estos espacios. Uno de los iniciadores del estudio sistemático de esta teoría fue **G. Mackey**, quien en 1946 extiende el proceso de Köthe y Toeplitz a un par (E, F) de espacios vectoriales y una forma bilineal B sobre $E \times F$, no degenerada. Esto permite identificar F con un subespacio del dual algebraico de E. Mackey caracteriza entonces todas las topologías localmente convexas sobre E para las que F es su dual topológico (*topología compatibles con la dualidad*) y prueba que todas tienen los mismos conjuntos acotados.

En fin, la teoría general de e.v.t. y e.l.c. fue surgiendo de manera anárquica hasta 1950. La aparición del todo de **N. Borbaki** sobre espacios vectoriales topológicos en 1953, supuso el primer estudio sistemático sobre el tema. Su desarrollo posterior fue espectacular, en parte debido al brillante éxito de la teoría de distribuciones de **L. Schwartz**, ganador de la Medalla Field en 1950. Los espacios de funciones *test*, básicos en esta teoría, son e.l.c. no normables y, muchos de ellos, no metrizables. Según cuenta en su autobiografía, durante su estancia en Grenoble a partir de 1944, y como mero ejercicio, Schwartz generalizó la teoría de dualidad en espacios de Banach para espacios de Fréchet, definiendo el dual fuerte y caracterizando la reflexividad. Este trabajo en análisis funcional abstracto no se publicó nunca, pero tuvo una gran influencia en el descubrimiento de las distribuciones.

En la primavera de 1945, Schwartz desarrolló su nueva teoría de distribuciones, que engloba y unifica las distintas definiciones de "soluciones generalizadas" de ecuaciones diferenciales y de "funciones singulares" que habían ido apareciendo en la literatura. El éxito de la teoría y la necesidad de una base teórica de la misma, aumentó el interés en el estudio de la teoría general de e.l.c., señalando nuevas líneas de investigación. Por ejemplo, la noción de convergencia que había definido en el espacio $\mathcal{D}$ de las funciones de clase infinito con soporte compacto, Schwartz sabía muy bien que no podía obtenerse a partir de una topología de espacio de Fréchet en ese espacio. Por tanto, él no trató de definir un sistema de entornos en $\mathcal{D}$, sino un sistema de conjuntos acotados que le permitieran (por dualidad) definir una topología en $\mathcal{D}'$. Cuando **J. Dieudonné** conoció estos resultados, los relacionó con la teoría abstracta de límite inductivo de espacios topológicos. Como consecuencia, escribieron un famoso artículo conjunto, *La dualité dans les espaces (F) et (LF)*, aparecido en los Annales del Institut Fourier en 1949, en el que se introduce y estudia con detalle la noción de *límite inductivo de e.l.c.*, y se demuestran los principales teoremas que Schwartz había usado en el caso de los espacios de funciones test y de distribuciones, en un marco general.

Probablemente se debe a Schwartz y Bourbaki (¿Dieudonné?) la idea de clasificar los e.l.c. según su comportamiento frente a algunos teoremas "clásicos" o propiedades importantes de los espacios normados. Así, los e.l.c. para los que se cumple el teorema de Banach-Steinhaus, se llaman *tonelados*; los e.l.c. tales que toda aplicaciones lineal acotada sobre ellos, es continua, se llaman *bornológicos*; aquellos en los que se cumple cierta versión del Teorema de la Aplicación abierta, se llaman *espacios de Pták*, etc.

Uno de los grandes éxitos de la teoría de distribuciones fue el descubrimiento en 1950 por Schwartz del *teorema de los núcleos*. Desde los trabajos de Hilbert y Riesz, se sabía que los operadores en un espacio funcional dado (p.e., L_2), definidos por una "núcleo funcional" $K(x,y)$, e,d, de la forma $T_K(f)(x) = \int K(x,y)f(y)\,dy$, tenían propiedades especialmente agradables, pero que, desafortunadamente, estos operadores no agotaban todos los posibles (de hecho, la identidad en L_2 no puede expresarse así; esta es una de las dificultades que aparecieron al tratar de formalizar la mecánica cuántica). Sin embargo, Schwartz consiguió demostrar que prácticamente todos los operadores que aparecen en

Análisis, se pueden representar por una "núcleo distribucional". Concretamente, si U, V son abiertos en sendos espacios euclídeos, $\mathcal{D}(U)$ el espacio de funciones de clase infinito, con soporte compacto contenido en U, $\mathcal{D}'(V)$ el espacio de las distribuciones (e.d., el dual de $\mathcal{D}(V)$) sobre V, *cualquier* operador lineal continuo $T : \mathcal{D}(U) \to \mathcal{D}'(V)$ tiene asociado un "núcleo distribucional" $K \in \mathcal{D}'(U \times V)$ de modo que para todo par de funciones $u \in \mathcal{D}(U), v \in \mathcal{D}(V)$, se tiene $\langle T(u), v\rangle = \langle K, u \otimes v\rangle$ o, en forma simbólica,

$$T(u) = \int K(x, y)u(x)\, dx.$$

Si ahora E es un espacio de funciones sobre U y F otro sobre V, usualmente se tiene la relación $\mathcal{D}(U) \hookrightarrow E \hookrightarrow \mathcal{D}'(U)$, y $\mathcal{D}(V) \hookrightarrow F \hookrightarrow \mathcal{D}'(V)$, con lo que cualquier operador lineal continuo $S : E \to F$ da lugar, por composición, a un $T : \mathcal{D}(U) \to \mathcal{D}'(V)$, y, por tanto, viene definido por un núcleo distribucional.

Pues bien, en su Tesis **A. Grothendieck**, otro de los grandes responsables del tremendo desarrollo de la teoría de e.l.c. en la década de 1950-1960, abordó el problema de descubrir la razón de por qué se verificaba el teorema de los núcleos en el espacio $\mathcal{D}$ y no, por ejemplo, en L_2. El resultado fue una monografía; *Produits tensorielles topologiques et espaces nucléaires*, publicada en las Memorias de la Amer. Math. Soc. en 1953. Esta obra, de difícil lectura, contiene una tremenda cantidad de ideas seminales, que motivaron muchos de los desarrollos posteriores de la teoría de e.l.c. y de los espacios de Banach. En ella se aísla la clase de e.l.c. para los que el teorema de los núcleos se cumple: los *espacios nucleares*. La mayor parte de los espacios de funciones que aparecen en la teoría de distribuciones, son nucleares. Sin embargo, ¡los únicos espacios normados nucleares, son los de dimensión finita!. Los espacios nucleares también mostraron su importancia en la teoría de probabilidades y en la teoría de la medida.

La impronta de Grothendieck se dejó notar durante mucho tiempo, y no sólo en Análisis Funcional (recordemos sus trabajos fundamentales sobre Geometría Algebraica, etc.) Sus ideas y métodos de trabajo abrieron nuevas perspectivas y líneas de investigación que sigue ocupando a los especialistas. Pero su enumeración resultaría demasiado técnica y prolija. Citemos solamente que contribuyó también a la sistematización del Análisis Funcional con la publicación de un texto en 1958: *Espaces vectoriels topologiques.*

En esta fecha, 1958, con la aparición de otros textos clásicos: *Normed linear spaces*, de **M. M. Day**; *Linear Operators*, de **N. Dunford** y **J. Schwartz**; *Introduction to*

Functional Analysis, de **A. E. Taylor**, se puede decir que comienza la etapa moderna de la Teoría y acaba nuestro cometido.

BIBLIOGRAFIA SUCINTA

[Ba] S. Banach. *Théorie des Opérations Linéaires.* Chelsea, N.Y., 1932.

[BK] G. Birkhoff y E. Kreyszig. *The Establishment of Functional Analysis.* Historia Math., **11** (1984), 258-321.

[Bo] N. Bourbaki. *Elementos de Historia de la Matemática.* Alianza Ed., Madrid, 1972.

[D1] J. Dieudonné. *History of Functional Analysis.* North Holland, Amsterdam, 1981.

[D2] J. Dieudonné (ed.). *Abrégé d'Histoire des Mathématiques 1700-1900.* Paris, Hermann, 1978.

[DS] N. Dunford y J. T.Schwartz. *Linear Operators, Vol. I.* Interscience, New York, 1957.

[Mo] A. F. Monna. *Functional Analysis in Historical Perspective.* Oosthoek, Utrecht, 1973.

[RN] F. Riesz y B. Szg. Nagy. *Lecons d'Analyse Fonctionnelle.* Gauthier Villars, Paris, 1965.

[St] M. Stone. *Linear transformations in Hilbert space and their applications to Analysis.* Amer. Math. Soc., 1932.

[Te] G. Temple. *100 Years of Mathematics.* Duckworth, Londres, 1981.

[Vn] J. von Neumann. *Fundamentos Matemáticos de la Mecánica Cuántica.* Publicaciones del Instituto de Matemáticas "Jorge Juan", Madrid, 1949. 2ª Ed., 1991.

Fernando Bombal
Departamento de Análisis Matemático
Facultad de Matemáticas
Universidad Complutense 28040 Madrid. España