Teoría de operadores en espacios de Hilbert

R. Álvarez-Nodarse

Universidad de Sevilla

$$\forall x \in \mathbb{H} \qquad \mathcal{A}x = \sum_{n} \lambda_n \langle x, x_n \rangle x_n$$

Definición

Sea la aplicación lineal y acotada $A : \mathbb{E} \mapsto \mathbb{E}'$, $\mathbb{E}$, $\mathbb{E}'$ *espacios euclídeos. Si existe el operador lineal* $A^* : \mathbb{E}' \mapsto \mathbb{E}$ *tal que para todo* $x \in \mathbb{E}$ *e* $y \in \mathbb{E}'$

$$\langle Ax, y \rangle' = \langle x, A^* y \rangle,$$

lo denominaremos adjunto de A.

Por sencillez asumiremos $\mathbb{E}' = \mathbb{E}$.

Definición

Sea la aplicación lineal y acotada $A : \mathbb{E} \mapsto \mathbb{E}'$, $\mathbb{E}$, $\mathbb{E}'$ *espacios euclídeos. Si existe el operador lineal* $A^* : \mathbb{E}' \mapsto \mathbb{E}$ *tal que para todo* $x \in \mathbb{E}$ *e* $y \in \mathbb{E}'$

$$\langle Ax, y \rangle' = \langle x, A^* y \rangle,$$

lo denominaremos adjunto de A.

Por sencillez asumiremos $\mathbb{E}' = \mathbb{E}$.

Ejemplos: Los operadores *desplazamiento* y *multiplicación*.

Por ejemplo sea el operador $S : \ell^2 \mapsto \ell^2$

$$S(x_1, x_2, x_3, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots),$$

comúnmente denominado *operador desplazamiento* (shift). Entonces su adjunto S^* es el operador $S : \ell^2 \mapsto \ell^2$

$$S^*(x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_2, x_3, \dots),$$

Ejercicio

Sea el operador multiplicación $M : C^2_{[a,b]} \mapsto C^2_{[a,b]}$ *definido por*

$$Mx(t) = f(t)x(t), \quad f(t) \in C_{[a,b]}, \quad \forall x(t) \in C^2_{[a,b]}.$$

Prueba que M^* *existe y es el operador multiplicación por la función complejo conjugada* $\overline{f(t)}$. *Prueba que este operador es acotado y que* $\|M\| \leq \sup_{t\in[a,b]} |f(t)|$. *Nótese que si* $f(t)$ *es real entonces* $M^* = M$.

Teorema (Existencia del operador adjunto)

Sea la aplicación (operador) lineal y acotada $A : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}'$, $\mathbb{H}$, $\mathbb{H}'$ *espacios de Hilbert. Entonces existe un único operador* $A^* : \mathbb{H}' \mapsto \mathbb{H}$ *adjunto a* A*. Además,* A^* *es lineal y* $\|A^*\| = \|A\|$.

Teorema (Existencia del operador adjunto)

Sea la aplicación (operador) lineal y acotada $A : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}'$, $\mathbb{H}$, $\mathbb{H}'$ *espacios de Hilbert. Entonces existe un único operador* $A^* : \mathbb{H}' \mapsto \mathbb{H}$ *adjunto a* A*. Además,* A^* *es lineal y* $\|A^*\| = \|A\|$.

Proposición

Sean $A : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}'$, $B : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}'$, $\mathbb{H}$, $\mathbb{H}'$ *espacios de Hilbert. Entonces se cumple que*

1. $\langle A^* y, x\rangle = \langle y, Ax\rangle'$, $x \in \mathbb{H}$ *e* $y \in \mathbb{H}'$,
2. $(A + B)^* = A^* + B^*$,
3. $(\alpha A)^* = \overline{\alpha} A^*$,
4. $(A^*)^* = A$,
5. $\|A^* A\| = \|AA^*\| = \|A\|^2$,
6. $A^* A = 0$ *si y solo si* $A = 0$,
7. *Si* $\mathbb{H} = \mathbb{H}'$*, entonces* $(AB)^* = B^* A^*$.

Definición

Sea $A : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$*. Si* $A = A^*$*, se dice que el operador es autoadjunto.*

Lo anterior implica que A es autoadjunto si y solo si para todos $x, y \in \mathbb{H}$,

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle.$$

Definición

Sea $U : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$ *biyectivo. Si* $U^{-1} = U^*$*, se dice que* U *es unitario.*

Nótese que lo anterior es equivalente a decir que $U^*U = UU^* = I$. Además de la definición de adjunto se sigue que

$$\langle Ux, Uy \rangle = \langle x, U^*Uy \rangle = \langle x, y \rangle,$$

i.e., los operadores unitarios preservan el producto escalar.

Definición

Sea $A : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$*. Si* $AA^* = A^*A$*, se dice que el operador es normal.*

Supongamos que $\mathbb{H}$ es un espacio de Hilbert de dimensión finita. Entonces $\mathbb{H}$ es isomorfo a $\mathbb{C}^n$. Sea $(e_k)_k$ una base de $\mathbb{H} \Rightarrow$

$$x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k \Rightarrow y = Ax = \sum_{k=1}^{n} x_k A e_k.$$

Supongamos que $Ae_k = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_{i,k} e_i \Rightarrow$

$$y = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} a_{i,k} x_k \right) e_i = \sum_{i=1}^{n} y_i e_i \Rightarrow y_i = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} x_k, \quad i = 1, 2, \dots n.$$

I.e., si consideramos los vectores $x, y \in \mathbb{C}^n$ con coordenadas x_i, y_i, $i = 1, \dots, n$, respectivamente, entonces el operador A se puede representar como una matriz $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^{n}$, i.e., tenemos la aplicación $A : \mathbb{C}^n \mapsto \mathbb{C}^n$, $y = Ax$.

Si $\dim \mathbb{H} < +\infty$ entonces es isomorfo a $\mathbb{C}^n$. Tomemos en $\mathbb{C}^n$ la base canónica $e_k = \delta_{i,k}$, $k, i = 1, \ldots, n$. Dados $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, \ldots, y_n)$, el producto escalar viene dado por

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k \overline{y_k} = x^T \overline{y},$$

donde por x^T entendemos el vector traspuesto de x. Luego

$$\langle Tx, y \rangle = (Ax)^T \overline{y} = x^T A^T \overline{y} = x^T \overline{\overline{A^T} y} \langle x, T^* y \rangle.$$

Al operador T le corresponde la matriz A a su adjunto $B = \overline{A}^T$.
Así, tenemos en dimensión finita que

1. Un operador T es autoadjunto si su matriz A en hermítica, i.e., $A = \overline{A}^T$.
2. Un operador T es unitario si su matriz U es unitaria, i.e., $A^{-1} = \overline{A}^T \iff A\overline{A}^T = \overline{A}^T A = I$.
3. Un operador T es normal si su matriz A satisface que $A\overline{A}^T = \overline{A}^T A$.

Lema

Sea $A : \mathbb{E} \mapsto \mathbb{E}$, con $\mathbb{E}$ un espacio euclídeo complejo. Entonces, si $\langle Ax, x\rangle = 0$ para todo $x \in \mathbb{E}$, $A = 0$.

Teorema

Sea $A : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$, un operador lineal y acotado en $\mathbb{H}$ espacio de Hilbert. Entonces

1. *Si A es autoadjunto, entonces para todo $x \in \mathbb{H}$, $\langle Ax, x\rangle \in \mathbb{R}$.*
2. *Si $\mathbb{H}$ es complejo y $\forall x \in \mathbb{H}$, $\langle Ax, x\rangle \in \mathbb{R}$, entonces A es autoadjunto.*

Proposición

El producto AB de dos operadores autoadjuntos A y B es autoadjunto si y solo si A y B conmutan, i.e., $AB = BA$.

Teorema

Sea $(T_n)_n$ una sucesión de operadores lineales acotados autoadjuntos $T_n : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$, $\mathbb{H}$ un espacio de Hilbert. Si $T_n \to T$ cuando $n \to \infty$, entonces T es un operador lineal acotado y autoadjunto en $\mathbb{H}$.

Teorema

Sea $(T_n)_n$ una sucesión de operadores lineales acotados autoadjuntos $T_n : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$, $\mathbb{H}$ un espacio de Hilbert. Si $T_n \to T$ cuando $n \to \infty$, entonces T es un operador lineal acotado y autoadjunto en $\mathbb{H}$.

Teorema

Sea A un operador acotado y autoadjunto en un espacio de Hilbert $\mathbb{H}$. Entonces $\|A\| = \sup_{\|x\|=1} |\langle Ax, x\rangle|$.

Teorema

Sea $(T_n)_n$ una sucesión de operadores lineales acotados autoadjuntos $T_n : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$, $\mathbb{H}$ un espacio de Hilbert. Si $T_n \to T$ cuando $n \to \infty$, entonces T es un operador lineal acotado y autoadjunto en $\mathbb{H}$.

Teorema

Sea A un operador acotado y autoadjunto en un espacio de Hilbert $\mathbb{H}$. Entonces $\|A\| = \sup_{\|x\|=1} |\langle Ax, x\rangle|$.

Sea $M = \sup_{\|x\|=1} |\langle Ax, x\rangle| \ldots \Rightarrow \quad M \leq \|A\|$

Sea $x \in \mathbb{H}$ t.q. $\|x\| = 1$ e $y = Ax/\|Ax\|$ $(Ax \neq 0)$ ...

Teorema

Sea $(T_n)_n$ una sucesión de operadores lineales acotados autoadjuntos $T_n : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$, $\mathbb{H}$ un espacio de Hilbert. Si $T_n \to T$ cuando $n \to \infty$, entonces T es un operador lineal acotado y autoadjunto en $\mathbb{H}$.

Teorema

Sea A un operador acotado y autoadjunto en un espacio de Hilbert $\mathbb{H}$. Entonces $\|A\| = \sup_{\|x\|=1} |\langle Ax, x\rangle|$.

Sea $M = \sup_{\|x\|=1} |\langle Ax, x\rangle| \ldots \Rightarrow \quad M \leq \|A\|$

Sea $x \in \mathbb{H}$ t.q. $\|x\| = 1$ e $y = Ax/\|Ax\|$ $(Ax \neq 0)$ ...

$$\Re(\langle Ax, y\rangle) = \frac{1}{4}\Big(\langle A(x+y), x+y\rangle - \langle A(x-y), x-y\rangle\Big), \quad \forall x, y \in \mathbb{H}.$$

$$\|a+b\|^2 + \|a-b\|^2 = 2(\|a\|^2 + \|b\|^2).$$

Corolario

Sean A y B dos operadores autoadjuntos en un espacio de Hilbert $\mathbb{H}$. Si $\langle Ax, x\rangle = \langle Bx, x\rangle$ para todo $x \in \mathbb{H}$, entonces $A = B$.

Corolario

Sean A y B dos operadores autoadjuntos en un espacio de Hilbert $\mathbb{H}$. Si $\langle Ax, x\rangle = \langle Bx, x\rangle$ para todo $x \in \mathbb{H}$, entonces $A = B$.

Ejercicio

Sea $A : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$ un operador acotado y autoadjunto. Prueba que $\|A^2\| = \|A\|^2$.

Corolario

Sean A y B dos operadores autoadjuntos en un espacio de Hilbert $\mathbb{H}$. Si $\langle Ax, x\rangle = \langle Bx, x\rangle$ para todo $x \in \mathbb{H}$, entonces $A = B$.

Ejercicio

Sea $A : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$ un operador acotado y autoadjunto. Prueba que $\|A^2\| = \|A\|^2$.

Veamos un ejemplo muy útil a la hora de encontrar ejemplos de distintos tipos de operadores lineales y acotados en un espacio de Hilbert $\mathbb{H}$.

Ejemplo

Sea $(\mu_n)_n \in \mathbb{C}$ una sucesión (finita o infinita) acotada y sea $m = \sup_n |\mu_n|$. Entonces existe un único operador lineal y acotado $T : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$, tal que, para todo n,

$$T\phi_n = \mu_n \phi_n.$$

Problema

Sea un operador lineal y acotado $T : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$, $\mathbb{H}$ *un espacio de Hilbert. Entonces existen dos operadores autoadjuntos* A, B *de* $\mathbb{H}$ *en* $\mathbb{H}$ *tales que* $T = A + iB$. *Además,*

$$A = \frac{T + T^*}{2}, \quad B = \frac{T - T^*}{2i}.$$

Problema

Sean $U, V : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$, *dos operador unitarios en un espacio de Hilbert* $\mathbb{H} \leq \{0\}$. *Prueba que*

1. U *es una isometría, i.e.,* $\|Ux\| = \|x\|$ *para todo* $x \in \mathbb{H}$.
2. $\|U\| = 1$.
3. *Su inverso* U^{-1} *es unitario.*
4. UV *es unitario*
5. U *es normal.*

Problema

Sea un operador lineal y acotado $T : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$, $\mathbb{H}$ *un espacio de Hilbert y sea* A *un operador autoadjunto. Prueba que* T^*AT *es autoadjunto.*

Problema

Sea un operador lineal y acotado $T : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$, $\mathbb{H}$ *un espacio de Hilbert y sea* A *un operador autoadjunto. Prueba que* T^*AT *es autoadjunto.*

Problema

Sean $(e_n)_n$ *y* $(f_n)_n$ *bases ortonormales de los espacios de Hilbert* $\mathbb{H}$ *y* $\mathbb{H}'$*, respectivamente y sea* $A : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}'$ *lineal y acotado. Prueba que la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} \|Ae_n\|^2$ *converge si y solo si lo hace la serie* $\sum_{m=1}^{\infty} \|A^* f_m\|^2$*, en cuyo caso se tiene que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|Ae_n\|^2 = \sum_{m=1}^{\infty} \|A^* f_m\|^2.$$

Deduce, de lo anterior, que la cantidad $\sum_{n=1}^{\infty} \|Ae_n\|^2$ *es independiente de la base ortogonal* $(e_n)_n$ *escogida.*

Problema

Sea $A : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}'$ un operador lineal y acotado, $\mathbb{H}$ y $\mathbb{H}'$ espacios de Hilbert. Se dice que A es un operador del tipo Hilbert-Schmidt si existe una base ortonormal completa $(\phi_n)_n$ en $\mathbb{H}$ tal que $\sum_{n=1}^{\infty} \|A\phi_n\|^2 < +\infty$. Prueba que:

1. *El espacio de todos los operadores del tipo Hilbert-Schmidt son un subespacio vectorial del espacio $\mathcal{B}(\mathbb{H}, \mathbb{H}')$ de los operadores lineales y acotados, i.e, prueba que si A y B son del tipo Hilbert-Schmidt, entonces $A + B$ y λA también lo son.*
2. *A es del tipo Hilbert-Schmidt si y solo si A^* lo es.*

Como hemos visto en el problema anterior la suma $\sum_{n=1}^{\infty} \|A\phi_n\|^2$ es independiente de la base.

Habitualmente se define el inverso de un operador lineal $A : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$, $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$, si $\exists B$, $A : \mathbb{Y} \mapsto \mathbb{X}$ tal que $AB = I_{\mathbb{Y}}$, $BA = I_{\mathbb{X}}$.

Habitualmente se define el inverso de un operador lineal $A : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$, $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$, si $\exists B$, $A : \mathbb{Y} \mapsto \mathbb{X}$ tal que $AB = I_{\mathbb{Y}}$, $BA = I_{\mathbb{X}}$.

Para el caso de dimensión finita, existirá el inverso de A si $\dim \mathbb{X} = \dim \mathbb{Y}$ y se tiene alguna de las siguientes propiedades: 1) A inyectivo, 2) A sobreyectivo, 3) existe un B tal que $AB = I$ 4) existe B tal que $BA = I$. Además, la matriz correspondiente a A^{-1} será la matriz inversa de la matriz correspondiente a A.

Habitualmente se define el inverso de un operador lineal $A : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$, $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$, si $\exists B$, $A : \mathbb{Y} \mapsto \mathbb{X}$ tal que $AB = I_{\mathbb{Y}}$, $BA = I_{\mathbb{X}}$.

Para el caso de dimensión finita, existirá el inverso de A si $\dim \mathbb{X} = \dim \mathbb{Y}$ y se tiene alguna de las siguientes propiedades: 1) A inyectivo, 2) A sobreyectivo, 3) existe un B tal que $AB = I$ 4) existe B tal que $BA = I$. Además, la matriz correspondiente a A^{-1} será la matriz inversa de la matriz correspondiente a A.

En dimensión infinita la situación es *algo* más complicada.

Por ejemplo, el operador desplazamiento S es inyectivo, no es sobreyectivo, $S^*S = I$ pero $SS^* \neq I$, luego S no tiene inverso.

Habitualmente se define el inverso de un operador lineal $A : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$, $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$, si $\exists B$, $A : \mathbb{Y} \mapsto \mathbb{X}$ tal que $AB = I_{\mathbb{Y}}$, $BA = I_{\mathbb{X}}$.

Para el caso de dimensión finita, existirá el inverso de A si $\dim \mathbb{X} = \dim \mathbb{Y}$ y se tiene alguna de las siguientes propiedades: 1) A inyectivo, 2) A sobreyectivo, 3) existe un B tal que $AB = I$ 4) existe B tal que $BA = I$. Además, la matriz correspondiente a A^{-1} será la matriz inversa de la matriz correspondiente a A.

En dimensión infinita la situación es *algo* más complicada.

Por ejemplo, el operador desplazamiento S es inyectivo, no es sobreyectivo, $S^*S = I$ pero $SS^* \neq I$, luego S no tiene inverso.

El operador multiplicación por t $M : L^2_{[0,1]} \mapsto L^2_{[0,1]}$. Este operador es acotado y además inyectivo, pero no es sobreyectivo y no tiene inverso.

Sea el operador $A : \ell^2 \mapsto \ell^2$, $A(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) = (x_1, x_2/2, \dots, x_n/n \dots)$.

A es acotado $\|Ax\|^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x_k|^2}{k^2} \leq \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 = \|x\|^2$.

Sea el operador $A : \ell^2 \mapsto \ell^2$, $A(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) = (x_1, x_2/2, \dots, x_n/n \dots)$.

A es acotado $\|Ax\|^2 \leq \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x_k|^2}{k^2} \leq \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 = \|x\|^2$.

Sea $B(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) = (x_1, 2x_2, \dots, nx_n \dots) \Rightarrow ABx = BAx = x$ $\forall x \in \ell^2 \Rightarrow B = A^{-1}$, pero B no es acotado.

Sea el operador $A : \ell^2 \mapsto \ell^2$, $A(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) = (x_1, x_2/2, \dots, x_n/n \dots)$.

A es acotado $\|Ax\|^2 \leq \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x_k|^2}{k^2} \leq \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 = \|x\|^2$.

Sea $B(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) = (x_1, 2x_2, \dots, nx_n \dots) \Rightarrow ABx = BAx = x$ $\forall x \in \ell^2 \Rightarrow B = A^{-1}$, pero B no es acotado.

Teorema de las aplicaciones inversas acotadas de Banach. *Sea* $A \in \mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$*, con* $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ *espacios de Banach, tal que el núcleo de A,* $\mathcal{N}(A) = \{0\}$*, y la imagen de A,* $\mathcal{I}(A) = \mathbb{Y}$*, entonces* $A^{-1} \in \mathcal{B}(\mathbb{Y}, \mathbb{X})$*.*

Sea el operador $A:\ell^2\mapsto\ell^2$, $A(x_1,x_2,\dots,x_n,\dots)=(x_1,x_2/2,\dots,x_n/n\dots)$.

A es acotado $\displaystyle\|Ax\|^2\le\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|x_k|^2}{k^2}\le\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^2=\|x\|^2$.

Sea $B(x_1,x_2,\dots,x_n,\dots)=(x_1,2x_2,\dots,nx_n\dots)\Rightarrow ABx=BAx=x$ $\forall x\in\ell^2\Rightarrow B=A^{-1}$, pero B no es acotado.

Teorema de las aplicaciones inversas acotadas de Banach. *Sea* $A\in\mathcal{B}(\mathbb{X},\mathbb{Y})$*, con* $\mathbb{X},\mathbb{Y}$ *espacios de Banach, tal que el núcleo de A,* $\mathcal{N}(A)=\{0\}$*, y la imagen de A,* $\mathcal{I}(A)=\mathbb{Y}$*, entonces* $A^{-1}\in\mathcal{B}(\mathbb{Y},\mathbb{X})$*.*

Definición

Sea $A\in\mathcal{B}(\mathbb{X},\mathbb{Y})$*,* $\mathbb{X}$ *e* $\mathbb{Y}$ *Banach. A es invertible* $\exists B\in\mathcal{B}(\mathbb{Y},\mathbb{X})$*, t.q.* $AB=I_{\mathbb{Y}}$*,* $BA=I_{\mathbb{X}}$*.*

Sea el operador $A : \ell^2 \mapsto \ell^2$, $A(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) = (x_1, x_2/2, \ldots, x_n/n \ldots)$.

A es acotado $\|Ax\|^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x_k|^2}{k^2} \leq \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 = \|x\|^2$.

Sea $B(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) = (x_1, 2x_2, \ldots, nx_n \ldots) \Rightarrow ABx = BAx = x$ $\forall x \in \ell^2 \Rightarrow B = A^{-1}$, pero B no es acotado.

Teorema de las aplicaciones inversas acotadas de Banach. *Sea $A \in \mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$, con $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ espacios de Banach, tal que el núcleo de A, $\mathcal{N}(A) = \{0\}$, y la imagen de A, $\mathcal{I}(A) = \mathbb{Y}$, entonces $A^{-1} \in \mathcal{B}(\mathbb{Y}, \mathbb{X})$.*

Definición

Sea $A \in \mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$, $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$ Banach. A es invertible $\exists B \in \mathcal{B}(\mathbb{Y}, \mathbb{X})$, t.q. $AB = I_{\mathbb{Y}}$, $BA = I_{\mathbb{X}}$.

Teorema

Sea $\mathbb{X}$ un espacio de Banach. El conjunto $E \subset \mathcal{B}(\mathbb{X})$ de los operadores invertibles acotados en $\mathbb{X}$ es abierto en $\mathcal{B}(\mathbb{X})$.

Teorema

Sea el operador lineal $A : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{X}$, $\mathbb{X}$ *espacio de Banach. Si* $\|A\| < 1$, *entonces* $I - A$ *es invertible y (en norma)*

$$(I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k.$$

Teorema

Sea el operador lineal $A : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{X}$, $\mathbb{X}$ *espacio de Banach. Si* $\|A\| < 1$, *entonces* $I - A$ *es invertible y (en norma)*

$$(I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k.$$

Generalización: Sea $A : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{X}$ con $\|A\| < |\lambda|$. Entonces el operador $\lambda I - A$ es invertible y

$$(\lambda I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{\lambda^{k+1}}, \quad \|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{|\lambda| - \|A\|}.$$

Teorema

Sea el operador lineal $A : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{X}$, $\mathbb{X}$ espacio de Banach. Si $\|A\| < 1$, entonces $I - A$ es invertible y (en norma)

$$(I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k.$$

Generalización: Sea $A : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{X}$ con $\|A\| < |\lambda|$. Entonces el operador $\lambda I - A$ es invertible y

$$(\lambda I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{\lambda^{k+1}}, \quad \|(\lambda I - A)^{-1}\| \leq \frac{1}{|\lambda| - \|A\|}.$$

Teorema

El espacio $\mathcal{B}(\mathbb{X})$, $\mathbb{X}$ espacio de Banach, es un espacio de Banach respecto a la norma de los operadores.

Definición

Un operador lineal $A : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$, $\mathbb{X}$ *e* $\mathbb{Y}$ *espacios de Banach es compacto si para toda sucesión acotada* $(x_n)_n$ *de* $\mathbb{X}$*, la sucesión* $(Ax_n)_n$ *de* $\mathbb{Y}$ *tiene una subsucesión convergente.*

Definición

Un operador lineal $A : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$, $\mathbb{X}$ *e* $\mathbb{Y}$ *espacios de Banach es compacto si para toda sucesión acotada* $(x_n)_n$ *de* $\mathbb{X}$*, la sucesión* $(Ax_n)_n$ *de* $\mathbb{Y}$ *tiene una subsucesión convergente.*

Teorema

Todo operador compacto es acotado.

Definición

Un operador lineal $A : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$, $\mathbb{X}$ *e* $\mathbb{Y}$ *espacios de Banach es compacto si para toda sucesión acotada* $(x_n)_n$ *de* $\mathbb{X}$, *la sucesión* $(Ax_n)_n$ *de* $\mathbb{Y}$ *tiene una subsucesión convergente.*

Teorema

Todo operador compacto es acotado.

El recíproco no es cierto.

Ejercicio

Prueba que el operador identidad $I : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$, $\mathbb{H}$ *espacio de Hilbert de dimensión infinita no es compacto.*

Definición

Un operador lineal $A : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$, $\mathbb{X}$ *e* $\mathbb{Y}$ *espacios de Banach es compacto si para toda sucesión acotada* $(x_n)_n$ *de* $\mathbb{X}$*, la sucesión* $(Ax_n)_n$ *de* $\mathbb{Y}$ *tiene una subsucesión convergente.*

Teorema

Todo operador compacto es acotado.

El recíproco no es cierto.

Ejercicio

Prueba que el operador identidad $I : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$, $\mathbb{H}$ *espacio de Hilbert de dimensión infinita no es compacto.*

Teorema

Sea A *un operador lineal* $A : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$, $\mathbb{X}$ *e* $\mathbb{Y}$ *espacios normados de dimensión finita. Entonces* A *es compacto.*

Ejemplo

Cualquier operador $A : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$, *con* $\mathbb{H}$ *espacio de Hilbert de dimensión finita es compacto.*

Teorema

El conjunto de todos los operadores compactos $A : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$, *es un espacio vectorial.*

Proposición

Sea $\mathbb{H}$ *un espacio de Hilbert y sean* y *y* z *dos elementos dados de* $\mathbb{H}$. *Sea el operador lineal* $T : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$ *definido por* $Tx = \langle x, y\rangle z$. *Entonces* T *es compacto.*

Ejemplo

Cualquier operador $A : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$, *con* $\mathbb{H}$ *espacio de Hilbert de dimensión finita es compacto.*

Teorema

El conjunto de todos los operadores compactos $A : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$, *es un espacio vectorial.*

Proposición

Sea $\mathbb{H}$ *un espacio de Hilbert y sean* y *y* z *dos elementos dados de* $\mathbb{H}$. *Sea el operador lineal* $T : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$ *definido por* $Tx = \langle x, y \rangle z$. *Entonces* T *es compacto.*

Ejercicio

Sea $A : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{X}$ *un operador acotado de rango finito en un espacio de Hilbert* $\mathbb{H}$, *i.e., la imagen de* A, $\mathcal{I}(A)$ *es de dimensión finita* ($\dim \mathcal{I}(A) = n < +\infty$). *Prueba, a partir de la proposición anterior, que* A *es compacto.*

Teorema

Sea $(T_n)_n$ una sucesión de operadores compactos de $T_n : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$, $\mathbb{H}$ espacio de Hilbert, tal que $T_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} T$. Entonces T es compacto.

Como $T_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} T \Rightarrow \forall \epsilon_1 > 0\ \exists N_1 \in \mathbb{N}$ t.q. $\forall M > N_1$, $\|T - T_M\| < \epsilon_1$.

Sea $(x_n)_n \in \mathbb{H}$ una sucesión acotada cualquiera. Y sea $S = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|$.

T_n es compacto $\forall n\ \exists$ una subsucesión $(y_k)_k$, t.q. $(T_M y_k)_k$ es convergente.

Como $T_M y_k$ es convergente, entonces es de Cauchy $\Rightarrow \forall \epsilon_2 > 0$. $\exists N_2 > 0$ t.q. $l > m > M > N_2 > N_1$, $\|T_M y_m - T_M y_l\| < \epsilon_2$

$$\begin{aligned} \|Ty_m - Ty_l\| &\leq \|Ty_m - T_M y_m\| + \|T_M y_m - T_M y_l\| + \|T_M y_l - Ty_l\| \\ &\leq \|T - T_M\|\|y_m\| + \epsilon_2 + \|T - T_M\|\|y_l\| \leq 2S\epsilon_1 + \epsilon_2 \end{aligned}$$

Teorema

Sea $(T_n)_n$ una sucesión de operadores compactos de $T_n : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$, $\mathbb{H}$ espacio de Hilbert, tal que $T_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} T$. Entonces T es compacto.

Como $T_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} T \Rightarrow \forall \epsilon_1 > 0\ \exists N_1 \in \mathbb{N}$ t.q. $\forall M > N_1$, $\|T - T_M\| < \epsilon_1$.

Sea $(x_n)_n \in \mathbb{H}$ una sucesión acotada cualquiera. Y sea $S = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|x_n\|$.

T_n es compacto $\forall n\ \exists$ una subsucesión $(y_k)_k$, t.q. $(T_M y_k)_k$ es convergente.

Como $T_M y_k$ es convergente, entonces es de Cauchy $\Rightarrow \forall \epsilon_2 > 0$. $\exists N_2 > 0$ t.q. $l > m > M > N_2 > N_1$, $\|T_M y_m - T_M y_l\| < \epsilon_2$

$$\begin{aligned} \|Ty_m - Ty_l\| &\leq \|Ty_m - T_M y_m\| + \|T_M y_m - T_M y_l\| + \|T_M y_l - Ty_l\| \\ &\leq \|T - T_M\|\|y_m\| + \epsilon_2 + \|T - T_M\|\|y_l\| \leq 2S\epsilon_1 + \epsilon_2 \end{aligned}$$

Pero ...

T_n es compacto $\Rightarrow \exists(\tilde{x}_k)_k \subset (x_j)_j$, t.q. $\lim_{k\to\infty} T_n\tilde{x}_k \to y_n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$.

T_n es compacto $\Rightarrow \exists(\tilde{x}_k)_k \subset (x_j)_j$, t.q. $\text{lím}_{k\to\infty} T_n\tilde{x}_k \to y_n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$.

$$(x_j)_j \qquad x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad \cdots \quad x_m \quad \cdots \quad x_j \quad \cdots$$

T_n es compacto $\Rightarrow \exists (\tilde{x}_k)_k \subset (x_j)_j$, t.q. $\lim_{k\to\infty} T_n \tilde{x}_k \to y_n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$.

$$
\begin{array}{lcccccccl}
(x_j)_j & x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_m & \cdots & x_j & \cdots \\
(x_{1,j})_j \subset (x_j)_j & x_{1,1} & x_{1,2} & x_{1,3} & \cdots & x_{1,m} & \cdots & x_{1,j} & \cdots \Rightarrow \; T_1 x_{1,j} \xrightarrow{j} y_1
\end{array}
$$

Teoría de operadores en $\mathbb{H}$: la construcción diagonal

T_n es compacto $\Rightarrow \exists (\tilde{x}_k)_k \subset (x_j)_j$, t.q. $\lim_{k\to\infty} T_n \tilde{x}_k \to y_n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$.

$$
\begin{array}{cccccccccl}
(x_j)_j & x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_m & \cdots & x_j & \cdots & \\
(x_{1,j})_j \subset (x_j)_j & x_{1,1} & x_{1,2} & x_{1,3} & \cdots & x_{1,m} & \cdots & x_{1,j} & \cdots \Rightarrow & T_1 x_{1,j} \stackrel{j}{\to} y_1 \\
(x_{2,j})_j \subset (x_{1,j})_j & x_{2,1} & x_{2,2} & x_{2,3} & \cdots & x_{2,m} & \cdots & x_{2,j} & \cdots \Rightarrow & T_2 x_{2,j} \stackrel{j}{\to} y_2
\end{array}
$$

Teoría de operadores en $\mathbb{H}$: la construcción diagonal

T_n es compacto $\Rightarrow \exists (\tilde{x}_k)_k \subset (x_j)_j$, t.q. $\lim_{k\to\infty} T_n\tilde{x}_k \to y_n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$.

$$
\begin{array}{lcccccccl}
(x_j)_j & x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_m & \cdots & x_j & \cdots \\
(x_{1,j})_j \subset (x_j)_j & x_{1,1} & x_{1,2} & x_{1,3} & \cdots & x_{1,m} & \cdots & x_{1,j} & \cdots \Rightarrow \ T_1 x_{1,j} \xrightarrow{j} y_1 \\
(x_{2,j})_j \subset (x_{1,j})_j & x_{2,1} & x_{2,2} & x_{2,3} & \cdots & x_{2,m} & \cdots & x_{2,j} & \cdots \Rightarrow \ T_2 x_{2,j} \xrightarrow{j} y_2 \\
(x_{3,j})_j \subset (x_{2,j})_j & x_{3,1} & x_{3,2} & x_{3,3} & \cdots & x_{3,m} & \cdots & x_{3,j} & \cdots \Rightarrow \ T_3 x_{3,j} \xrightarrow{j} y_3
\end{array}
$$

T_n es compacto $\Rightarrow \exists(\tilde{x}_k)_k \subset (x_j)_j$, t.q. $\lim_{k\to\infty} T_n\tilde{x}_k \to y_n$, $n = 1, 2, 3, \dots$.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
(x_j)_j & x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_m & \cdots & x_j & \cdots & & \\
(x_{1,j})_j \subset (x_j)_j & x_{1,1} & x_{1,2} & x_{1,3} & \cdots & x_{1,m} & \cdots & x_{1,j} & \cdots & \Rightarrow & T_1 x_{1,j} \xrightarrow{j} y_1 \\
(x_{2,j})_j \subset (x_{1,j})_j & x_{2,1} & x_{2,2} & x_{2,3} & \cdots & x_{2,m} & \cdots & x_{2,j} & \cdots & \Rightarrow & T_2 x_{2,j} \xrightarrow{j} y_2 \\
(x_{3,j})_j \subset (x_{2,j})_j & x_{3,1} & x_{3,2} & x_{3,3} & \cdots & x_{3,m} & \cdots & x_{3,j} & \cdots & \Rightarrow & T_3 x_{3,j} \xrightarrow{j} y_3 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & & & & \vdots \\
(x_{m,j})_j \subset (x_{m-1,j})_j & x_{m,1} & x_{m,2} & x_{m,3} & \cdots & x_{m,m} & \cdots & x_{m,j} & \cdots & \Rightarrow & T_m x_{m,j} \xrightarrow{j} y_m \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & & & & \vdots
\end{array}$$

Sea la sucesión de las "diagonales" $(x_{m,m})_m$. Para cada n fijo la sucesión $(x_{m,m})_{m=n}^{\infty}$ es una subsucesión de $(x_{m,j})_j$, luego

$$\lim_{j\to\infty} T_m x_{j,j} = y_m, \quad \text{para} \quad m = 1, 2, 3, \cdots \Rightarrow (T_m x_{j,j})_j \text{ es de Cauchy .}$$

$$\|Tx_{n,n} - Tx_{m,m}\| \leq \|Tx_{n,n} - T_M x_{n,n}\| + \|T_M x_{n,n} - T_M x_{m,m}\| +$$
$$+\|T_M x_{m,m} - Tx_{m,m}\| \leq \|T - T_M\|\|x_{n,n}\| + \tfrac{\epsilon}{3} + \|T_M - T\|\|x_{m,m}\| < \epsilon,$$

Teorema

Sea $(T_n)_n$ una sucesión de operadores compactos de $T_n : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$, $\mathbb{H}$ espacio de Hilbert, tal que $T_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} T$. Entonces T es compacto.

Teorema

Sea $(T_n)_n$ *una sucesión de operadores compactos de* $T_n : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$, $\mathbb{H}$ *espacio de Hilbert, tal que* $T_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} T$*. Entonces* T *es compacto.*

Teorema

Sea $T : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$*, un operador compacto,* $\mathbb{H}$ *espacio de Hilbert. Entonces su adjunto* T^* *es compacto.*

Teorema

Sea $(T_n)_n$ una sucesión de operadores compactos de $T_n : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$, $\mathbb{H}$ espacio de Hilbert, tal que $T_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} T$. Entonces T es compacto.

Teorema

Sea $T : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$, un operador compacto, $\mathbb{H}$ espacio de Hilbert. Entonces su adjunto T^* es compacto.

Problema

Sea un operador lineal y acotado $A : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$, $\mathbb{H}$ un espacio de Hilbert. Se dice que A es antihermítico si $A^* = -A$. Prueba que A es antihermítico si y solo si el operador $B = iA$ es hermítico (autoadjunto).

Problema

Prueba que si A es un operador del tipo Hilbert-Schmidt, entonces es compacto.

Problema

Prueba que el operador $T : L^2_{[0,1]} \mapsto L^2_{[0,1]}$*, definido por*

$$y = Tx, \qquad y(t) = \int_0^1 k(t,\tau)x(\tau)d\tau,$$

es compacto si se cumple la condición

$$\int_0^1 \int_0^1 |k(t,\tau)|^2 dt d\tau < +\infty,$$

Problema

Sea $A : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$*, lineal y acotado en* $\mathbb{H}$ *espacio de Hilbert,* A *es positivo* ($A \geq 0$) *si* $\langle Ax, x\rangle \geq 0\ \forall x \in \mathbb{H}$*. Prueba las siguientes afirmaciones:*

1. *Si* $A \geq 0$ *entonces* A *es autoadjunto (ver teorema 2).*
2. *Si* $A \geq 0$*,* $B \geq 0$*, y* $\alpha \in \mathbb{R}$*, entonces* $A + B \geq 0$ *y* $\alpha A \geq 0$*.*
3. *Si* $A \geq 0$ *y* $T : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$*, lineal y acotado, entonces* $T^*AT \geq 0$*.*
4. *Cualquiera sea* $T : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$*, lineal y acotado,* $T^*T \geq 0$*.*
5. *Si* $A \geq 0$*,* $B \geq 0$ *y* $A + B = 0$*, entonces* $A = B = 0$*.*
6. *Si* $A \geq 0$ *entonces, para todos* $x, y \in \mathbb{H}$ *se cumple*
$$|\langle Tx, y\rangle| \leq \langle Tx, x\rangle\langle Ty, y\rangle.$$
7. *Si* $A \geq 0$*, entonces* $Tx = 0$ *si y solo si* $\langle Tx, x\rangle$ *(usa el punto anterior).*

6. Usar que $\langle Av, v\rangle \geq 0$, para todo $v \in \mathbb{H}$. Elegir $v = f + \lambda\langle Tx, y\rangle g$, con $\lambda \in \mathbb{R}$ y razonar como en la prueba de la desigualdad de Cauchy-Schwarz.

Problema

Sea $A \in \mathcal{B}(\mathbb{H})$ un operador lineal compacto y $B \in \mathcal{B}(\mathbb{H})$ uno acotado, $\mathbb{H}$ espacio de Hilbert. Entonces los operadores AB y BA son compactos.

Problema

Sea $A \in \mathcal{B}(\mathbb{H})$ un operador lineal compacto y $B \in \mathcal{B}(\mathbb{H})$ uno acotado, $\mathbb{H}$ espacio de Hilbert. Entonces los operadores AB y BA son compactos.

Problema

Sea $A \in \mathcal{B}(\mathbb{H})$, $\mathbb{H}$ espacio de Hilbert, y $\mathcal{I}(A) = \mathbb{H}$. Prueba que si A tiene inverso, y dicho inverso es acotado, entonces el adjunto A^* es invertible y $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$. Si además, A es autoadjunto, entonces A^{-1} también.

Problema

Prueba que si $A \in \mathcal{B}(\mathbb{H})$ es compacto y $\mathbb{H}$ es de dimensión infinita, entonces o A no es invertible o A^{-1} no puede ser acotado.

Problema

Prueba que A es compacto si y solo si A^*A es compacto.

Problema

Sea $A : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$, $\mathbb{H}$, espacio de Hilbert un operador autoadjunto. Prueba que si $\langle Ax, x\rangle = 0$, para todo $x \in \mathbb{H}$, entonces $A = \Theta$, es el operador nulo.

Problema

Prueba que un operador acotado $T : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$, $\mathbb{H}$, espacio de Hilbert es normal si y solo si $\|Tx\| = \|T^*x\|$ para todo $x \in \mathbb{H}$.

Problema

Prueba que un operador acotado $T : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$, $\mathbb{H}$, espacio de Hilbert, es normal si y solo si los operadores autoadjuntos A y B de su forma cartesiana

$$T = A + iB, \qquad A = \frac{T + T^*}{2}, \quad B = \frac{T - T^*}{2i}.$$

conmutan, i.e., $AB = BA$.

Teoría espectral

$$Ax = \lambda x, \quad x \in \mathbb{H}, \; x \neq 0$$

$$\forall x \in \mathbb{H} \;\Rightarrow\; Ax = \sum_n \lambda_n \langle x, \phi_n \rangle \phi_n$$

Definición

Sea $A : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{X}$ un operador en un espacio normado $\mathbb{X}$. Los números complejos λ tales que

$$Ax = \lambda x, \quad x \in \mathbb{X},\ x \neq 0,$$

se denominan autovalores de A y los correspondientes x, autovectores de A asociados al autovalor λ.

En un espacio de dimensión finita podemos definir el *espectro* de un operador como el *conjunto de los autovalores* de su correspondiente matriz, i.e., es un problema "sencillo".

Definición

Sea $A : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{X}$ un operador en un espacio normado $\mathbb{X}$. Los números complejos λ tales que

$$Ax = \lambda x, \quad x \in \mathbb{X},\ x \neq 0,$$

se denominan autovalores de A y los correspondientes x, autovectores de A asociados al autovalor λ.

En un espacio de dimensión finita podemos definir el *espectro* de un operador como el *conjunto de los autovalores* de su correspondiente matriz, i.e., es un problema "sencillo".

¡No ocurre lo mismo en el caso infinito!

Por ejemplo, el operador desplazamiento ya visto antes $S : \ell^2 \mapsto \ell^2$, $S(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (0, x_1, x_2, \ldots)$, no tiene autovalores pues la igualdad $Sx = \lambda x$ implica $x = 0$.

Definición

Sea $\mathbb{X}$ un espacio de Banach y A una aplicación lineal $A : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{X}$. El **espectro** *de A, $\sigma(A)$, es el conjunto de $\lambda \in \mathbb{C}$ tales que el operador $(\lambda I - A)$ es no invertible, i.e.,* **no existe** $A_\lambda := (\lambda I - A)^{-1}$.

El operador $A_\lambda := (\lambda I - A)^{-1}$ se denomina **resolvente** *de A. El conjunto $\rho(A)$ de todos los $\lambda \in \mathbb{C}$ para los cuales el operador A_λ está bien definido se denomina* **conjunto resolvente** *de A.*

La cantidad $r(A) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}$ se denomina **radio espectral** *de A.*

Obviamente $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$.

Definición

Sea $\mathbb{X}$ un espacio de Banach y A una aplicación lineal $A : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{X}$. El **espectro** *de A, $\sigma(A)$, es el conjunto de $\lambda \in \mathbb{C}$ tales que el operador $(\lambda I - A)$ es no invertible, i.e.,* **no existe** $A_\lambda := (\lambda I - A)^{-1}$.

El operador $A_\lambda := (\lambda I - A)^{-1}$ se denomina **resolvente** *de A. El conjunto $\rho(A)$ de todos los $\lambda \in \mathbb{C}$ para los cuales el operador A_λ está bien definido se denomina* **conjunto resolvente** *de A.*

La cantidad $r(A) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(A)\}$ se denomina **radio espectral** *de A.*

Obviamente $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$.

Ejercicio

Prueba que en dimensión finita $\sigma(A)$ es el conjunto de todos los autovalores.

De la definición se sigue que todo autovalor de A pertenece al espectro de A,

Ejemplo

Sea el espacio de las funciones continuas $C^\infty([a,b])$*. Sea* $u \in C([a,b])$ *y sea el operador multiplicación,* $f \in C([a,b])$*,*

$$M : C([a,b]) \mapsto C([a,b]), \quad Mx(t) = f(t)x(t).$$

Este operador, en general, no tiene autovalores.

Ejemplo

Sea el espacio de las funciones continuas $C^{\infty}([a,b])$. *Sea* $u \in C([a,b])$ *y sea el operador multiplicación,* $f \in C([a,b])$,

$$M : C([a,b]) \mapsto C([a,b]), \quad Mx(t) = f(t)x(t).$$

Este operador, en general, no tiene autovalores.

Ejercicio

Sea $A : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{X}$, $A \in \mathcal{B}(\mathbb{X})$. *Prueba que* $r(A) \le \|A\|$.

Ejemplo

Sea el espacio de las funciones continuas $C^\infty([a,b])$. Sea $u \in C([a,b])$ y sea el operador multiplicación, $f \in C([a,b])$,

$$M : C([a,b]) \mapsto C([a,b]), \quad Mx(t) = f(t)x(t).$$

Este operador, en general, no tiene autovalores.

Ejercicio

Sea $A : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{X}$, $A \in \mathcal{B}(\mathbb{X})$. Prueba que $r(A) \leq \|A\|$.

Del resultado anterior se sigue que $\sigma(A) \subset D = \{z;\, |z| \leq \|A\|\} \Rightarrow$

Teorema

Sea $A : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{X}$, $A \in \mathcal{B}(\mathbb{X})$. Entonces $\sigma(A)$ es un compacto de $\mathbb{C}$ (cerrado y acotado de $\mathbb{C}$) contenido en el disco cerrado $D = \{z;\, |z| \leq \|A\|\}$.

Teorema

Sea $\mathbb{H}$ *un espacio de Hilbert y* $A : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$, *un operador lineal autoadjunto. Entonces todos los autovalores de* A *(si los tiene) son reales. Además los autovectores correspondientes a autovalores distintos son ortogonales.*

Teorema

Sea $A : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$, *un operador lineal autoadjunto,* $\mathbb{H}$ *espacio de Hilbert. Entonces* $r(A) = \|A\|$.

Teorema

Sea $\mathbb{H}$ un espacio de Hilbert y $A : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$, un operador lineal autoadjunto. Entonces todos los autovalores de A (si los tiene) son reales. Además los autovectores correspondientes a autovalores distintos son ortogonales.

Teorema

Sea $A : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$, un operador lineal autoadjunto, $\mathbb{H}$ espacio de Hilbert. Entonces $r(A) = \|A\|$.

En dimensión infinita un operador lineal A puede no tener autovalores. No ocurre así con los operadores compactos y autoadjuntos.

Teorema

Sea $\mathbb{H}$ un espacio de Hilbert y $A : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$, un operador lineal autoadjunto y compacto. Entonces $\lambda = \|A\|$ o $\lambda = -\|A\|$ es un autovalor de A.

Teorema

Sea A un operador compacto en un espacio de Hilbert y $(\phi_n)_n$ una sucesión ortonormal de $\mathbb{H}$. Entonces $\lim_{n\to\infty} A\phi_n = 0$.

Teorema

Sea A un operador compacto en un espacio de Hilbert y $(\phi_n)_n$ una sucesión ortonormal de $\mathbb{H}$. Entonces $\lim_{n\to\infty} A\phi_n = 0$.

Teorema

Sea $\mathbb{H}$ un espacio de Hilbert separable y A un operador lineal $A : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$ autoadjunto y compacto. Entonces A tiene o bien un número finito de autovalores λ_n reales distintos o, si el número de autovalores es infinito, entonces, es numerable y si los ordenamos de mayor a menor $\lambda_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

Y así hemos llegado al ...

Teorema (Teorema espectral)

Sea $\mathbb{H}$ *espacio de Hilbert y* A *un operador lineal* $A : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$ *autoadjunto y compacto. Existe una sucesión numerable de autovectores ortonormales* $(x_n)_n$ *de* $\mathbb{H}$ *con autoval.* $(\lambda_n)_n$ *t.q.* $\forall x \in \mathbb{H}$.

$$(\star) \qquad Ax = \sum_n \lambda_n \langle x, x_n \rangle x_n$$

1. *En* $(\star)$ *aparecen todos los autovalores de* A.
2. *Si la suc.* $(\lambda_n)_n$ *es infinita se puede reordenar de forma que* $\lambda_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$.
3. *Los correspondientes autoespacios* $\ker(\lambda_n I - A)$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ *son de dimensión finita, siendo la dimensión de estos el Nº de veces que aparece un mismo* λ_k *en* $(\star)$.

Teorema espectral

Sea $\mathbb{H}_k = \operatorname{span}(x_{1,k}, \cdots, x_{p_k,k})$ el subespacio generado por los autovectores ortonormales asociados a cada λ_k (finito dimensionales). Definamos el operador de proyección $P_k : \mathbb{H} \mapsto \ker(\lambda_k I - A)$, $k \in \mathbb{N}$ como

$$P_k x = \sum_{i=1}^{p_k} \langle x, x_{i,k} \rangle x_{i,k} = \sum_{i=1}^{p_k} c_{i,k} x_{i,k}.$$

De teorema espectral se sigue que para todo $x \in \mathbb{H}$,

$$Ax = \sum_k \lambda_k \left(\sum_{i=1}^{p_k} \langle x, x_{i,k} \rangle x_{i,k} \right),$$

donde, k recorre todos los autovalores $\lambda_k \neq 0$. Equivalentemente

$$Ax = \sum_n \lambda_n P_n x,$$

donde, n recorre todos los autovalores $\lambda_n \neq 0$ y P_n los operadores de proyección sobre los subespacios $\ker(\lambda_n I - A)$.

De hecho se tiene el siguiente resultado:

Teorema

Todo operador autoadjunto y compacto se puede escribir de la forma

$$A = \sum_n \lambda_n P_n,$$

donde n recorre todos los autovalores $\lambda_n \neq 0$ *siendo* P_n *los operadores de proyección sobre los subespacios* $\ker(\lambda_n I - A)$.

Teorema espectral

De hecho se tiene el siguiente resultado:

Teorema

Todo operador autoadjunto y compacto se puede escribir de la forma

$$A = \sum_n \lambda_n P_n,$$

donde n recorre todos los autovalores $\lambda_n \neq 0$ siendo P_n los operadores de proyección sobre los subespacios $\ker(\lambda_n I - A)$.

Corolario (Hilbert-Schmidt)

Sea $\mathbb{H}$ un espacio de Hilbert separable y A un operador lineal $A : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$ autoadjunto y compacto. Entonces existe un sistema ortogonal completo (base ortonormal) de vectores ortonormales $(e_n)_n$ de $\mathbb{H}$ consistente en los correspondientes autovectores de A, incluido los asociados al autovalor $\lambda = 0$, caso que lo tuviera.

Supongamos ahora que dos operadores lineales acotados comparten un sistema completo común de autovectores $\Rightarrow \forall x \in \mathbb{H}$, $x = \sum_i c_i \phi_i$, además

$$A\phi_n = \alpha_n \phi_n, \quad B\phi_n = \beta_n \phi_n \quad \Rightarrow \quad (AB - BA)x = 0 \Rightarrow A \text{ y } B \text{ conmutan}$$

Supongamos ahora que dos operadores lineales acotados comparten un sistema completo común de autovectores $\Rightarrow \forall x \in \mathbb{H}$, $x = \sum_i c_i\phi_i$, además

$$A\phi_n = \alpha_n\phi_n, \quad B\phi_n = \beta_n\phi_n \quad \Rightarrow \quad (AB - BA)x = 0 \Rightarrow A \text{ y } B \text{ conmutan}$$

Una consecuencia del Teorema de Hilbert-Schmidt es el recíproco:

Teorema

Sean A y B dos operadores autoadjuntos y compactos en un espacio de Hilbert separable. Si A y B conmutan, entonces ambos tienen un sistema común completo de autovectores.

Supongamos ahora que dos operadores lineales acotados comparten un sistema completo común de autovectores $\Rightarrow \forall x \in \mathbb{H}$, $x = \sum_i c_i \phi_i$, además

$$A\phi_n = \alpha_n \phi_n, \quad B\phi_n = \beta_n \phi_n \quad \Rightarrow \quad (AB - BA)x = 0 \Rightarrow A \text{ y } B \text{ conmutan}$$

Una consecuencia del Teorema de Hilbert-Schmidt es el recíproco:

Teorema

Sean A y B dos operadores autoadjuntos y compactos en un espacio de Hilbert separable. Si A y B conmutan, entonces ambos tienen un sistema común completo de autovectores.

Beyond the compact selfadjoint operators: Sea $(\mu_n)_n \in \mathbb{C}$ una sucesión (finita o infinita) acotada. Existe un único operador lineal y acotado $T : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$, tal que $\forall n$,

$$T\phi_n = \mu_n \phi_n \quad \Rightarrow \quad Tx = T\left(\sum_{k=1}^{\infty} \langle x, \phi_k \rangle \phi_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k \langle x, \phi_k \rangle \phi_k .$$

Problema

Sea $A : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$ *un operador lineal autoadjunto y compacto y sea* $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ *una función real tal que* $f(\lambda) \to 0$ *si* $\lambda \to 0$, $f(0) = 0$. *En estas condiciones definiremos la función* $f(A)$ *de la siguiente forma*

$$f(A) = \sum_{n=1}^{\infty} f(\lambda_n) P_n, \quad A = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n P_n. \tag{1}$$

Prueba que el operador $f(A)$ *está bien definido y que es lineal, autoadjunto y compacto. Como aplicación encuentra el operador* $\sqrt{A}$ *de un operador compacto y definido positivo* A.

Problema

Sea $A : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$ *un operador lineal tal que se tiene una descomposición espectral de la forma*

$$Ax = \sum_n \lambda_n \langle x, x_n \rangle x_n,$$

donde $(x_n)_n$ *es una sucesión ortonormal de vectores de* $\mathbb{H}$, $(\lambda_n)_n$ *es una sucesión numérica (no necesariamente real) acotada. Si* $y \in \mathcal{I}(A)$, *entonces una solución de la ecuación* $Ax = y$ *es*

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-1} \langle y, x_n \rangle x_n.$$

Problema

Prueba que un operador acotado $T : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$, $\mathbb{H}$, *espacio de Hilbert es normal si y solo si* $\|Tx\| = \|T^*x\|$ *para todo* $x \in \mathbb{H}$.

Problema

Prueba que un operador acotado $T : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$, $\mathbb{H}$, espacio de Hilbert es normal si y solo si $\|Tx\| = \|T^*x\|$ para todo $x \in \mathbb{H}$.

Problema

Prueba que un operador acotado $T : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$, $\mathbb{H}$, espacio de Hilbert, es normal si y solo si los operadores autoadjuntos A y B de su forma cartesiana conmutan, i.e., $AB = BA$.

$$T = A + iB, \qquad A = \frac{T + T^*}{2}, \quad B = \frac{T - T^*}{2i}.$$

Problema

Prueba que un operador acotado $T : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$, $\mathbb{H}$, *espacio de Hilbert es normal si y solo si* $\|Tx\| = \|T^*x\|$ *para todo* $x \in \mathbb{H}$.

Problema

Prueba que un operador acotado $T : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$, $\mathbb{H}$, *espacio de Hilbert, es normal si y solo si los operadores autoadjuntos* A *y* B *de su forma cartesiana conmutan, i.e.,* $AB = BA$.

$$T = A + iB, \qquad A = \frac{T + T^*}{2}, \quad B = \frac{T - T^*}{2i}.$$

Problema

Prueba que un operador lineal acotado es de proyección si y solo si es autoadjunto e idempotente.

Problema

Sea $A : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}$ *un operador lineal autoadjunto y compacto y sea* P_n *el operador del proyección al subespacio de los autovectores asociados al autovalor* λ_n*. Prueba que para todo* n*,* $AP_n = \lambda_n P_n$*. Usando lo anterior prueba que para* $k = 1, 2, \ldots,$ $A^k x = \sum_n \lambda_n^k P_n x$ *para todo* $x \in \mathbb{H}$*. De hecho se tiene que* $A^k = \sum_n \lambda_n^k P_n$

Definición

La extensión de una aplicación $T : \mathcal{D}(T) \subset \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$ *a un subconjunto* $M \supset \mathcal{D}(T)$ *es la aplicación* $\widetilde{T}$ *tal que* $\widetilde{T}|_{\mathcal{D}(T)} = T$, *i.e.,* $\widetilde{T}x = Tx$ *para todo* $x \in \mathcal{D}(T)$.

Teorema

Sea $T : \mathcal{D}(T) \subset \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$ *un operador linear y acotado,* $\mathbb{X}$ *un espacio normado y* $\mathbb{Y}$ *de Banach. Entonces* T *se puede extender a* $\overline{\mathcal{D}(T)}$, *i.e., existe un operador* $\widehat{T} : \overline{\mathcal{D}(T)}$ *tal que* $\widetilde{T}$ *es acotado y* $\|\widehat{T}\| = \|T\|$.