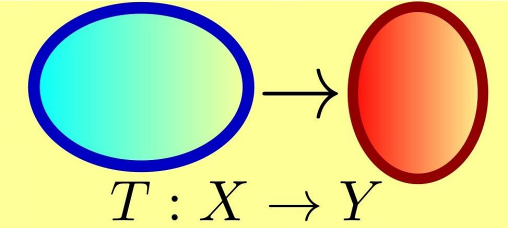
Algunos resultados fundamentales del Análisis Funcional

R. Álvarez-Nodarse

Universidad de Sevilla



☞ El espacio de los funcionales lineales $\mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{C})$ es un espacio de lineal. Este espacio se suele denominar *dual algebraico* de $\mathbb{X}$ y se denota por $\mathbb{X}^*$.

☞ El espacio de los funcionales lineales $\mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{C})$ es un espacio de lineal. Este espacio se suele denominar *dual algebraico* de $\mathbb{X}$ y se denota por $\mathbb{X}^*$.

☞ Si $\mathbb{X}$ es además normado, entonces $\mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{C})$ es un espacio normado y completo. Este espacio denomina espacio dual (conjugado) de $\mathbb{X}$ y se denota por $\mathbb{X}'$.

☞ El espacio de los funcionales lineales $\mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{C})$ es un espacio de lineal. Este espacio se suele denominar *dual algebraico* de $\mathbb{X}$ y se denota por $\mathbb{X}^*$.

☞ Si $\mathbb{X}$ es además normado, entonces $\mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{C})$ es un espacio normado y completo. Este espacio denomina espacio dual (conjugado) de $\mathbb{X}$ y se denota por $\mathbb{X}'$.

Sea $\mathbb{X}$ un espacio normado de dimensión finita. Sea $E = (e_k)_{k=1}^n$ una base del mismo $\quad\Rightarrow\quad x = \sum_{k=1}^n x_k e_k$.
Sea f un funcional lineal $f : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{C}$ cualquiera. Entonces

$$f(x) = \sum_{k=1}^n x_k f(e_k) = \sum_{k=1}^n x_k c_k, \quad c_k = f(e_k),\ k = 1, \dots, n.$$

Esta representación es única y los números $c_k = f(e_k)$, $k = 1, \dots, n$, definen biunívocamente a f.

Funcionales en dimensión finita

Definamos n funcionales f_k, $k = 1, \dots, n$, tomando las n-tuplas siguientes

$$a_1 = \delta_{1,j} = (1, 0, \dots, 0, 0), \dots, a_n = \delta_{n,j} = (0, 0, \dots, 0, 1), \quad j = 1, \dots, n,$$

tales que

$$f_k(e_j) = \delta_{j,k} = 1 \text{ si } j = k \text{ y } 0 \text{ en otro caso}$$

De hecho se tiene que

$$f_k(x) = f_k\left(\sum_{j=1}^{n} x_j e_j\right) = x_k, \quad k = 1, \dots, n.$$

Definamos n funcionales f_k, $k = 1, \dots, n$, tomando las n-tuplas siguientes

$$a_1 = \delta_{1,j} = (1, 0, \dots, 0, 0), \dots, a_n = \delta_{n,j} = (0, 0, \dots, 0, 1), \quad j = 1, \dots, n,$$

tales que

$$f_k(e_j) = \delta_{j,k} = 1 \text{ si } j = k \text{ y } 0 \text{ en otro caso}$$

De hecho se tiene que

$$f_k(x) = f_k\left(\sum_{j=1}^{n} x_j e_j\right) = x_k, \quad k = 1, \dots, n.$$

Proposición: Los funcionales f_k son una base de $\mathbb{X}^*$, luego $\dim \mathbb{X}^* = \dim \mathbb{X}$.

Definamos n funcionales f_k, $k = 1, \ldots, n$, tomando las n-tuplas siguientes

$$a_1 = \delta_{1,j} = (1, 0, \ldots, 0, 0), \ \ldots, \ a_n = \delta_{n,j} = (0, 0, \ldots, 0, 1), \quad j = 1, \ldots, n,$$

tales que

$$f_k(e_j) = \delta_{j,k} = 1 \text{ si } j = k \text{ y } 0 \text{ en otro caso}$$

De hecho se tiene que

$$f_k(x) = f_k\left(\sum_{j=1}^{n} x_j e_j\right) = x_k, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Proposición: Los funcionales f_k son una base de $\mathbb{X}^*$, luego $\dim \mathbb{X}^* = \dim \mathbb{X}$.

Si $\dim \mathbb{X} = n < \infty$, entonces podemos construir un funcional lineal acotado independientemente de norma de $\mathbb{X}$ que elijamos.

Ejemplo

Sea $f : \mathbb{C}^n_\infty \mapsto \mathbb{C}$, *i.e.*, $\|x\| = \max_{k=1,\ldots,n} |x_k|$. *Probar que*

$$\|f\| = \sum_{k=1}^{n} |c_k|.$$

Ejemplo

Sea $f : \mathbb{C}^n_\infty \mapsto \mathbb{C}$, *i.e.*, $\|x\| = \text{máx}_{k=1,\dots,n} |x_k|$. *Probar que*

$$\|f\| = \sum_{k=1}^{n} |c_k|.$$

✍ ¿Podemos extender f a $\mathbb{C}^m$, $m > n$ tal que el funcional extendido $\tilde{f}$ sea lineal, acotado e igual a f en $\mathbb{C}^n$?

Definición

Sean $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$, *espacios normados La extensión de una aplicación* $T : \mathcal{D}(T) \subset \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$, *a un subconjunto* $M \supset \mathcal{D}(T)$ *es la aplicación* $\widetilde{T}$ *tal que* $\widetilde{T}|_{\mathcal{D}(T)} = T$, *i.e.*, $\widetilde{T}x = Tx$ *para todo* $x \in \mathcal{D}(T)$.

Ejemplo

Sea $f : \mathbb{C}^n_\infty \mapsto \mathbb{C}$, *i.e.*, $\|x\| = \max_{k=1,\dots,n} |x_k|$. *Probar que*

$$\|f\| = \sum_{k=1}^{n} |c_k|.$$

✍ ¿Podemos extender f a $\mathbb{C}^m$, $m > n$ tal que el funcional extendido $\tilde{f}$ sea lineal, acotado e igual a f en $\mathbb{C}^n$?

Definición

Sean $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$, *espacios normados La extensión de una aplicación* $T : \mathcal{D}(T) \subset \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$, *a un subconjunto* $M \supset \mathcal{D}(T)$ *es la aplicación* $\widetilde{T}$ *tal que* $\widetilde{T}|_{\mathcal{D}(T)} = T$, *i.e.*, $\widetilde{T}x = Tx$ *para todo* $x \in \mathcal{D}(T)$.

✍ ¿Y si hacemos formalmente tender m a ∞? Por ejemplo ℓ^2. ¿Qué ocurriría con la norma?

Imaginemos que tenemos un operador lineal operador y acotado $T : \mathcal{D}(T) \subset \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$ y sea $M \subset \mathbb{X}$ tal que $M \supset \mathcal{D}(T)$.

Hay muchas formas de extender T al subconjunto M, sin embargo la idea no es solo extender T a un conjunto más grande, sino también que se mantengan ciertas propiedades como, por ejemplo, la linealidad y la acotación.

Imaginemos que tenemos un operador lineal operador y acotado $T : \mathcal{D}(T) \subset \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$ y sea $M \subset \mathbb{X}$ tal que $M \supset \mathcal{D}(T)$.

Hay muchas formas de extender T al subconjunto M, sin embargo la idea no es solo extender T a un conjunto más grande, sino también que se mantengan ciertas propiedades como, por ejemplo, la linealidad y la acotación.

Teorema

Sea $T : \mathcal{D}(T) \subset \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$ un operador linear y acotado, $\mathbb{X}$ un espacio normado, $\mathbb{Y}$ de Banach. Entonces T se puede extender a $\overline{\mathcal{D}(T)}$, i.e., existe un operador $\widetilde{T} : \overline{\mathcal{D}(T)} \mapsto \mathbb{Y}$ tal que $\widetilde{T}$ es acotado y $\|\widetilde{T}\| = \|T\|$.

Imaginemos que tenemos un operador lineal operador y acotado $T : \mathcal{D}(T) \subset \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$ y sea $M \subset \mathbb{X}$ tal que $M \supset \mathcal{D}(T)$.

Hay muchas formas de extender T al subconjunto M, sin embargo la idea no es solo extender T a un conjunto más grande, sino también que se mantengan ciertas propiedades como, por ejemplo, la linealidad y la acotación.

Teorema

Sea $T : \mathcal{D}(T) \subset \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$ un operador linear y acotado, $\mathbb{X}$ un espacio normado, $\mathbb{Y}$ de Banach. Entonces T se puede extender a $\overline{\mathcal{D}(T)}$, i.e., existe un operador $\widetilde{T} : \overline{\mathcal{D}(T)} \mapsto \mathbb{Y}$ tal que $\widetilde{T}$ es acotado y $\|\widetilde{T}\| = \|T\|$.

Corolario: Todo funcional lineal acotado $f : M \subset \mathbb{X} \mapsto \mathbb{C}$ admite una extensión $F : \overline{M} \subset \mathbb{X} \mapsto \mathbb{C}$ que seguirá siendo lineal y acotada y cumplirá que $\|f\| = \|F\|$.

Sea $f : M \subset \mathbb{X} \mapsto \mathbb{C}$ un funcional lineal definido sobre un subespacio vectorial de dimensión finita M de un espacio normado $\mathbb{X}$.

f es acotado pues M es de dimensión finita ¿se puede extender a todo $\mathbb{X}$? Si $\mathbb{X}$ es de dimensión finita está claro que sí, pero ¿y si $\dim \mathbb{X} = \infty$?

Sea $f : M \subset \mathbb{X} \mapsto \mathbb{C}$ un funcional lineal definido sobre un subespacio vectorial de dimensión finita M de un espacio normado $\mathbb{X}$.

f es acotado pues M es de dimensión finita ¿se puede extender a todo $\mathbb{X}$? Si $\mathbb{X}$ es de dimensión finita está claro que sí, pero ¿y si $\dim \mathbb{X} = \infty$?

Definición: Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial complejo y sea $p : \mathbb{V} \mapsto \mathbb{R}$ una aplicación t.q. $p(x) \geq 0$. Se dice que p es un funcional sublineal si

$$\begin{aligned} &\forall x, y \in \mathbb{V}, \quad p(x+y) \leq p(x) + p(y), \\ &\forall x, y \in \mathbb{V}, \quad p(\alpha x) = \alpha p(x), \qquad \text{si } \alpha \geq 0. \end{aligned}$$

Se dice que p es convexo si

$$\begin{aligned} &\forall x, y \in \mathbb{V}, \quad p(x+y) \leq p(x) + p(y), \\ &\forall x, y \in \mathbb{V}, \quad p(\alpha x) = |\alpha| p(x), \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}, \end{aligned}$$

Ejemplo: Por ejemplo, si $\mathbb{X}$ es un espacio normado, $p(x) = a\|x\|$, $a > 0$, es un funcional sublineal y convexo.

Teorema (Hahn-Banach para un espacio vectorial)

Sea $\mathbb{V}$ *un espacio vectorial real o complejo y sea* p *un funcional convexo simétrico definido sobre* $\mathbb{V}$*. Sea* $M \subset \mathbb{V}$, $M \neq \{0\}$*, un subespacio vectorial y sea* $f : M \mapsto \mathbb{C}$ *un funcional lineal tal que*

$$|f(x)| \leq p(x), \qquad \forall x \in M.$$

Entonces, existe un funcional lineal $F : \mathbb{V} \mapsto \mathbb{R}$ *tal que*

$$\forall x \in M, \quad F(x) = f(x) \quad y \quad \forall x \in \mathbb{V}, \quad |F(x)| \leq p(x).$$

Un corolario del teorema anterior es el siguiente resultado fundamental para espacios normados

Teorema (Hahn-Banach)

Sea $\mathbb{X}$ *un espacio normado,* $M \neq \{0\}$ *un subespacio de* $\mathbb{X}$ *y sea* $f : M \mapsto \mathbb{C}$, *un funcional lineal acotado. Entonces,* $\exists$ *un funcional lineal* $F : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{C}$ *t.q.*

$$\forall x \in M, \quad F(x) = f(x) \quad y \quad \|F\| = \|f\|.$$

f *se puede extender a todo* $\mathbb{X}$ *de forma que la* $\|F\|$ *coincida con la* $\|f\|$.

Un corolario del teorema anterior es el siguiente resultado fundamental para espacios normados

Teorema (Hahn-Banach)

Sea $\mathbb{X}$ *un espacio normado,* $M \neq \{0\}$ *un subespacio de* $\mathbb{X}$ *y sea* $f : M \mapsto \mathbb{C}$*, un funcional lineal acotado. Entonces,* $\exists$ *un funcional lineal* $F : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{C}$ *t.q.*

$$\forall x \in M, \quad F(x) = f(x) \quad y \quad \|F\| = \|f\|.$$

f *se puede extender a todo* $\mathbb{X}$ *de forma que la* $\|F\|$ *coincida con la* $\|f\|$*.*

Una consecuencia del Teorema de Hahn-Banach es que todo espacio normado no nulo $\mathbb{X}$ tiene asociado un espacio dual $\mathbb{X}'$ no nulo. Además, dichos funcionales se pueden extender a espacios normados mas grandes que contengan al espacio original.

Un corolario del teorema anterior es el siguiente resultado fundamental para espacios normados

Teorema (Hahn-Banach)

Sea $\mathbb{X}$ un espacio normado, $M \neq \{0\}$ un subespacio de $\mathbb{X}$ y sea $f : M \mapsto \mathbb{C}$, un funcional lineal acotado. Entonces, $\exists$ un funcional lineal $F : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{C}$ t.q.

$$\forall x \in M, \quad F(x) = f(x) \quad y \quad \|F\| = \|f\|.$$

f se puede extender a todo $\mathbb{X}$ de forma que la $\|F\|$ coincida con la $\|f\|$.

Una consecuencia del Teorema de Hahn-Banach es que todo espacio normado no nulo $\mathbb{X}$ tiene asociado un espacio dual $\mathbb{X}'$ no nulo. Además, dichos funcionales se pueden extender a espacios normados mas grandes que contengan al espacio original.

Ejemplo: Sea $0 \neq x_0 \in \mathbb{X}$. Definamos $M = \operatorname{span}(x_0) \subset \mathbb{X}$, i.e., $x = \alpha x_0$, $\alpha \in \mathbb{C}$. Definamos el$f : M \mapsto \mathbb{C}$, $f(x) = f(\alpha x_0) = \alpha$

Para mostrar lo anterior tomemos un espacio normado $\mathbb{X} \neq \{0\}\}$, luego existe $0 \neq x_0 \in \mathbb{X}$. Definamos $M = \operatorname{span}(x_0)$, i.e., $x = \alpha x_0$, $\alpha \in \mathbb{C}$. Entonces el funcional $f : M \mapsto \mathbb{C}$, $f(x) = f(\alpha x_0) = \alpha$ es un funcional lineal y acotado. La linealidad es inmediata ya que para todos $a, b \in \mathbb{C}$, y $x = \alpha x_0$ e $y = \beta x_0$ tenemos

$$f(ax + by) = f[(a\alpha + b\beta)x_0] = a\alpha + b\beta = af(x) + bf(y).$$

Para la acotación tomamos $0 \neq x \in M$

$$\frac{|f(x)|}{\|x\|} = \frac{|f(\alpha x_0)|}{\|\alpha x_0\|} = \frac{|\alpha|}{\alpha\|x_0\|} = \frac{1}{\|x_0\|} \quad \Rightarrow \quad \|f\| \leq \frac{1}{\|x_0\|}.$$

Teorema (Hahn-Banach para un espacio vectorial real)

Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial real y sea p un funcional sublineal definido sobre $\mathbb{V}$. Sea $M \subset \mathbb{V}$, $M \neq \{0\}$, un subespacio vectorial y sea $f : M \mapsto \mathbb{R}$ un funcional lineal tal que

$$f(x) \leq p(x), \qquad \forall x \in M.$$

Entonces, existe un funcional lineal $F : \mathbb{V} \mapsto \mathbb{R}$ tal que

$$\forall x \in M, \quad F(x) = f(x) \quad y \quad \forall x \in \mathbb{V}, \quad F(x) \leq p(x).$$

Teorema (Hahn-Banach para un espacio vectorial real)

Sea $\mathbb{V}$ un espacio vectorial real y sea p un funcional sublineal definido sobre $\mathbb{V}$. Sea $M \subset \mathbb{V}$, $M \neq \{0\}$, un subespacio vectorial y sea $f : M \mapsto \mathbb{R}$ un funcional lineal tal que

$$f(x) \leq p(x), \qquad \forall x \in M.$$

Entonces, existe un funcional lineal $F : \mathbb{V} \mapsto \mathbb{R}$ tal que

$$\forall x \in M, \quad F(x) = f(x) \quad y \quad \forall x \in \mathbb{V}, \quad F(x) \leq p(x).$$

Asumiremos que $M \neq \{0\}$ y que $M \neq \mathbb{V}$. Entonces existe un $x_1 \in \mathbb{V}$ que no pertenece a M. Definamos el subespacio

$$\{M \cup x_1\} := M_1 = \{z = x + \alpha x_1 \ : \forall x \in M, \ \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Nótese que $\forall z \in M_1$, la representación $z = x + \alpha x_1$ es única ......

En adelante denotaremos por $\mathbb{K}$ al conjunto $\mathbb{C}$ o $\mathbb{R}$ y por $\mathbb{X}' = \mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{K})$.

En adelante denotaremos por $\mathbb{K}$ al conjunto $\mathbb{C}$ o $\mathbb{R}$ y por $\mathbb{X}' = \mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{K})$.

Corolario

Sea $\mathbb{X} \neq \{0\}$ un espacio normado y sea $0 \neq x_0 \in \mathbb{X}$. Entonces, existe un funcional lineal F en $\mathbb{X}$ tal que $F(x_0) = \|x_0\|$ y $\|F\| = 1$.

En adelante denotaremos por $\mathbb{K}$ al conjunto $\mathbb{C}$ o $\mathbb{R}$ y por $\mathbb{X}' = \mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{K})$.

Corolario

Sea $\mathbb{X} \neq \{0\}$ un espacio normado y sea $0 \neq x_0 \in \mathbb{X}$. Entonces, existe un funcional lineal F en $\mathbb{X}$ tal que $F(x_0) = \|x_0\|$ y $\|F\| = 1$.

Corolario

Sea $\mathbb{X} \neq \{0\}$ un espacio normado y sean $x_1 \neq x_2 \in \mathbb{X}$. Entonces, existe un funcional lineal F en $\mathbb{X}$ tal que $F(x_1) \neq F(x_2)$.

En adelante denotaremos por $\mathbb{K}$ al conjunto $\mathbb{C}$ o $\mathbb{R}$ y por $\mathbb{X}' = \mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{K})$.

Corolario

Sea $\mathbb{X} \neq \{0\}$ un espacio normado y sea $0 \neq x_0 \in \mathbb{X}$. Entonces, existe un funcional lineal F en $\mathbb{X}$ tal que $F(x_0) = \|x_0\|$ y $\|F\| = 1$.

Corolario

Sea $\mathbb{X} \neq \{0\}$ un espacio normado y sean $x_1 \neq x_2 \in \mathbb{X}$. Entonces, existe un funcional lineal F en $\mathbb{X}$ tal que $F(x_1) \neq F(x_2)$.

Corolario

Sea $x_0 \in \mathbb{X} \neq \{0\}$, $\mathbb{X}$ espacio normado tal que $f(x_0) = 0$ para todo $f \in \mathbb{X}'$. Entonces $x_0 = 0$.

Dado un funcional $f : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{K}$, $\|f\| = \sup_{x \in \mathbb{X} \,:\, \|x\|=1} |f(x)|$.

El siguiente corolario es, de alguna forma, el recíproco de lo anterior.

Corolario

Sea $x_0 \in \mathbb{X} \neq \{0\}$, $\mathbb{X}$ espacio normado. Entonces,

$$\|x_0\| = \sup_{f \in \mathbb{X}' \,:\, \|f\|=1} |f(x_0)|,$$

y dicho supremo es alcanzable.

Dado un funcional $f : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{K}$, $\|f\| = \sup_{x \in \mathbb{X} \,:\, \|x\|=1} |f(x)|$.

El siguiente corolario es, de alguna forma, el recíproco de lo anterior.

Corolario

Sea $x_0 \in \mathbb{X} \neq \{0\}$, $\mathbb{X}$ espacio normado. Entonces,

$$\|x_0\| = \sup_{f \in \mathbb{X}' \,:\, \|f\|=1} |f(x_0)|,$$

y dicho supremo es alcanzable.

Teorema

Sea $M \subset \mathbb{X} \neq \{0\}$, $M \neq \mathbb{X}$ y sea $x_0 \in \mathbb{X}$ tal que

$$d := \rho(x_0, M) = \inf_{x \in M} \|x_0 - x\| > 0.$$

Entonces, existe un funcional lineal $F : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{R}$, tal que $\|F\| = 1$, $F(x_0) = d$, y $F(x) = 0$ para todo $x \in M$.

Definición

Sean $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$ dos espacios normados sobre $\mathbb{K}$. Una aplicación $A : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$ se llama abierta si A transforma abiertos $U \subset \mathbb{X}$ en abiertos $A(U) \subset \mathbb{Y}$.

Definición

Sean $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$ dos espacios normados sobre $\mathbb{K}$. Una aplicación $A : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$ se llama abierta si A transforma abiertos $U \subset \mathbb{X}$ en abiertos $A(U) \subset \mathbb{Y}$.

Recordemos dos definiciones del álgebra de conjuntos.

Sea $\mathbb{X}$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Sea $M \subset \mathbb{X}$, $\alpha \in \mathbb{K}$ y $z \in \mathbb{X}$. Se definen los conjuntos

$$M + z = \{x + z \,:\, \forall x \in M\}, \qquad \alpha M = \{\alpha x \,:\, \forall x \in M\}.$$

Está claro de la definición anterior que si A es una aplicación lineal

$$A(M + z) = A(M) + Az, \qquad A(\alpha M) = \alpha A(M).$$

Definición

Sean $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$ dos espacios normados sobre $\mathbb{K}$. Una aplicación $A : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$ se llama abierta si A transforma abiertos $U \subset \mathbb{X}$ en abiertos $A(U) \subset \mathbb{Y}$.

Recordemos dos definiciones del álgebra de conjuntos.

Sea $\mathbb{X}$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$. Sea $M \subset \mathbb{X}$, $\alpha \in \mathbb{K}$ y $z \in \mathbb{X}$. Se definen los conjuntos

$$M + z = \{x + z \,:\, \forall x \in M\}, \qquad \alpha M = \{\alpha x \,:\, \forall x \in M\}.$$

Está claro de la definición anterior que si A es una aplicación lineal

$$A(M + z) = A(M) + Az, \qquad A(\alpha M) = \alpha A(M).$$

En adelante $B_{\mathbb{X}} = \{x \in \mathbb{X} : \|x\| < 1\}$ denotará la bola unidad centrada en 0 en $\mathbb{X}$ y $B_{\mathbb{Y}} = \{y \in \mathbb{Y} : \|y\| < 1\}$ la bola unidad centrada en $\mathbb{Y}$.

Teorema (de la bola abierta)

Sean $\mathbb{X}$ *e* $\mathbb{Y}$ *dos espacios de Banach sobre* $\mathbb{K}$*. Sea* $A \in \mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$*, sobreyectiva, i.e.,* $A(\mathbb{X}) = \mathbb{Y}$*. Entonces, existe un* $\delta > 0$ *tal que* $\delta B_{\mathbb{Y}} \subseteq A(B_{\mathbb{X}})$*, es decir, que para todo* $y \in \mathbb{Y}$ *tal que* $\|y\| < \delta$*, existe un* $x \in \mathbb{X}$ *tal que* $\|x\| < 1$ *y* $Ax = y$*.*

Teorema (de la bola abierta)

Sean $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$ dos espacios de Banach sobre $\mathbb{K}$. Sea $A \in \mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$, sobreyectiva, i.e., $A(\mathbb{X}) = \mathbb{Y}$. Entonces, existe un $\delta > 0$ tal que $\delta B_{\mathbb{Y}} \subseteq A(B_{\mathbb{X}})$, es decir, que para todo $y \in \mathbb{Y}$ tal que $\|y\| < \delta$, existe un $x \in \mathbb{X}$ tal que $\|x\| < 1$ y $Ax = y$.

La prueba la haremos en dos partes.

I. $\exists d > 0$ que cumple que, dado un $\epsilon > 0$ y un $z \in \mathbb{Y}$, existe un $x \in \mathbb{X}$ tal que $\|Ax - z\| < \epsilon$, y $\|x\| < \|z\|/d$.

Teorema (de la bola abierta)

Sean $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$ dos espacios de Banach sobre $\mathbb{K}$. Sea $A \in \mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$, sobreyectiva, i.e., $A(\mathbb{X}) = \mathbb{Y}$. Entonces, existe un $\delta > 0$ tal que $\delta B_{\mathbb{Y}} \subseteq A(B_{\mathbb{X}})$, es decir, que para todo $y \in \mathbb{Y}$ tal que $\|y\| < \delta$, existe un $x \in \mathbb{X}$ tal que $\|x\| < 1$ y $Ax = y$.

La prueba la haremos en dos partes.

I. $\exists d > 0$ que cumple que, dado un $\epsilon > 0$ y un $z \in \mathbb{Y}$, existe un $x \in \mathbb{X}$ tal que $\|Ax - z\| < \epsilon$, y $\|x\| < \|z\|/d$.

I. Sea $dB_{\mathbb{Y}} \subset \mathbb{Y}$ la bola $B(0, d)$, $d > 0$ es el Nº. de la parte **I**.

Fijemos $\epsilon = d/2$ y un $z = y \in dB_{\mathbb{Y}}$. Por **I.** $\exists x_1 \in \mathbb{X}$, $\|x_1\| < \|y\|/d < 1$, t.q. $\|y - Ax_1\| < d/2$.

Teorema (de la bola abierta)

Sean $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$ dos espacios de Banach sobre $\mathbb{K}$. Sea $A \in \mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$, sobreyectiva, i.e., $A(\mathbb{X}) = \mathbb{Y}$. Entonces, existe un $\delta > 0$ tal que $\delta B_{\mathbb{Y}} \subseteq A(B_{\mathbb{X}})$, es decir, que para todo $y \in \mathbb{Y}$ tal que $\|y\| < \delta$, existe un $x \in \mathbb{X}$ tal que $\|x\| < 1$ y $Ax = y$.

La prueba la haremos en dos partes.

I. $\exists d > 0$ que cumple que, dado un $\epsilon > 0$ y un $z \in \mathbb{Y}$, existe un $x \in \mathbb{X}$ tal que $\|Ax - z\| < \epsilon$, y $\|x\| < \|z\|/d$.

I. Sea $dB_{\mathbb{Y}} \subset \mathbb{Y}$ la bola $B(0, d)$, $d > 0$ es el Nº. de la parte **I**.

Fijemos $\epsilon = d/2$ y un $z = y \in dB_{\mathbb{Y}}$. Por **I.** $\exists x_1 \in \mathbb{X}$, $\|x_1\| < \|y\|/d < 1$, t.q. $\|y - Ax_1\| < d/2$. Sea $\epsilon = d/4$ y $z = y - Ax_1 \quad \Rightarrow \quad \exists x_2 \in \mathbb{X}$ tal que

$$\|(y - Ax_1) - Ax_2\| < \frac{d}{4}, \quad \|x_2\| < \frac{1}{d}\|z\| = \frac{1}{d}\|y - Ax_1\| < \frac{1}{2}.$$

Y así sucesivamente ...

Teorema (de la aplicación abierta)

Sean $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$ dos espacios de Banach sobre $\mathbb{K}$. Sea $A \in \mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$, sobreyectiva, i.e., $A(\mathbb{X}) = \mathbb{Y}$. Entonces cualquiera sea el abierto $U \subset \mathbb{X}$, su imagen $A(U) \subset \mathbb{Y}$ es un abierto en $\mathbb{Y}$.

Teorema (de la aplicación abierta)

Sean $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$ dos espacios de Banach sobre $\mathbb{K}$. Sea $A \in \mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$, sobreyectiva, i.e., $A(\mathbb{X}) = \mathbb{Y}$. Entonces cualquiera sea el abierto $U \subset \mathbb{X}$, su imagen $A(U) \subset \mathbb{Y}$ es un abierto en $\mathbb{Y}$.

Teorema (de la inversa acotada de Banach)

Sea $A \in \mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$, con $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ espacios de Banach, tal que el núcleo de A, $\mathcal{N}(A) = \{0\}$, y la imagen de A, $\mathcal{I}(A) = \mathbb{Y}$, entonces $A^{-1} \in \mathcal{B}(\mathbb{Y}, \mathbb{X})$.

Definición

Sean $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ *espacios normados, y* A *un operador,* $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$*. Se denomina grafo de* A *al conjunto de pares ordenados*

$$\mathcal{G}(A) := \{(x, y) \,|\, x \in \mathcal{D}(A),\ y = Ax\} = \{(x, Ax) \,|\, x \in \mathcal{D}(A)\} \subset \mathbb{X} \times \mathbb{Y}.$$

Definición

Sean $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ espacios normados, y A un operador, $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$. Se denomina grafo de A al conjunto de pares ordenados

$$\mathcal{G}(A) := \{(x, y) \,|\, x \in \mathcal{D}(A),\ y = Ax\} = \{(x, Ax) \,|\, x \in \mathcal{D}(A)\} \subset \mathbb{X} \times \mathbb{Y}.$$

Nótese que el espacio $\mathbb{X} \times \mathbb{Y}$ es un espacio lineal si definimos las operaciones

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_1), \quad \alpha(x, y) = (\alpha x, \alpha y), \quad \alpha \in \mathbb{K}.$$

Si en $\mathbb{X} \times \mathbb{Y}$ definimos la aplicación $\|(x, y)\| = \|x\| + \|y\|$, $\mathbb{X} \times \mathbb{Y}$ es un espacio normado. Si además $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$ son de Banach, $\mathbb{X} \times \mathbb{Y}$ es de Banach.

Definición

Sean $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ espacios normados, y $A : \mathcal{D}(A) \mapsto \mathbb{Y}$ un operador lineal (no necesariamente acotado) cuyo dominio es $\mathcal{D}(A) \subset \mathbb{X}$. A es un operador cerrado si su grafo $\mathcal{G}(A)$ es cerrado en $\mathbb{X} \times \mathbb{Y}$.

Nótese que si $\mathcal{G}(A)$ es cerrado en $\mathbb{X} \times \mathbb{Y}$, entonces $\mathcal{G}(A) = \overline{\mathcal{G}(A)}$. Además, si $z = \in \overline{\mathcal{G}(A)}$ entonces existe una sucesión $z_n = (x_n, Ax_n) \in \mathcal{G}(A)$ tal que $z_n \to z \in \overline{\mathcal{G}(A)}$, lo que implica que si $\mathcal{G}(A)$ es cerrado entonces si

$$x_n \to x, \quad Ax_n \to y \quad \Rightarrow \quad x \in \mathcal{D}(A), \quad y = Ax.$$

Definición

Sean $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ espacios normados, y $A : \mathcal{D}(A) \mapsto \mathbb{Y}$ un operador lineal (no necesariamente acotado) cuyo dominio es $\mathcal{D}(A) \subset \mathbb{X}$. A es un operador cerrado si su grafo $\mathcal{G}(A)$ es cerrado en $\mathbb{X} \times \mathbb{Y}$.

Nótese que si $\mathcal{G}(A)$ es cerrado en $\mathbb{X} \times \mathbb{Y}$, entonces $\mathcal{G}(A) = \overline{\mathcal{G}(A)}$. Además, si $z = \in \overline{\mathcal{G}(A)}$ entonces existe una sucesión $z_n = (x_n, Ax_n) \in \mathcal{G}(A)$ tal que $z_n \to z \in \overline{\mathcal{G}(A)}$, lo que implica que si $\mathcal{G}(A)$ es cerrado entonces si

$$x_n \to x, \quad Ax_n \to y \quad \Rightarrow \quad x \in \mathcal{D}(A), \quad y = Ax.$$

Es decir, se tiene la siguiente proposición:

Proposición (del operador cerrado)

Sea A un operador lineal $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$, $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ espacios normados. A es cerrado si y solo si cumple que si $x_n \to x$, $x_n \in \mathcal{D}(A)$ y $Tx_n \to y$, entonces $x \in \mathcal{D}(A)$ y $Tx = y$.

Ejemplo

Un operador cerrado no tiene que ser acotado y uno acotado no tiene que ser cerrado.

Ejemplo

Un operador cerrado no tiene que ser acotado y uno acotado no tiene que ser cerrado.

☞ El operador derivada $D : \mathcal{D}(D) \subset C_\infty([0,1]) \mapsto C_\infty([0,1])$ $(Dx = x')$ es no acotado pero es cerrado.

Ejemplo

Un operador cerrado no tiene que ser acotado y uno acotado no tiene que ser cerrado.

☞ El operador derivada $D : \mathcal{D}(D) \subset C_\infty([0,1]) \mapsto C_\infty([0,1])$ $(Dx = x')$ es no acotado pero es cerrado.

Sea $x_n \in \mathcal{D}(D)$ t.q. que $x_n \to x$ y $Dx_n = x_n' \to y$. Como la convergencia en $C_\infty([0,1])$ es la convergencia uniforme

$$\begin{aligned}\int_0^t y(s)ds &= \int_0^t \lim_{n\to\infty} x_n'(s)ds = \lim_{n\to\infty} \int_0^t x_n'(s)ds = \lim_{n\to\infty} (x_n(s) - x_n(0)) \\ &= x(t) - x(0) \quad \Rightarrow \quad x(t) = x(0) + \int_0^t y(s)ds\end{aligned}$$

Así que $x \in \mathcal{D}(D)$ y $Dx = x' = y \quad \Rightarrow \quad$, por la proposición D es cerrado.

Ejemplo

Un operador cerrado no tiene que ser acotado y uno acotado no tiene que ser cerrado.

☞ El operador derivada $D : \mathcal{D}(D) \subset C_\infty([0,1]) \mapsto C_\infty([0,1])$ $(Dx = x')$ es no acotado pero es cerrado.

Sea $x_n \in \mathcal{D}(D)$ t.q. que $x_n \to x$ y $Dx_n = x_n' \to y$. Como la convergencia en $C_\infty([0,1])$ es la convergencia uniforme

$$\begin{aligned} \int_0^t y(s)ds &= \int_0^t \lim_{n\to\infty} x_n'(s)ds = \lim_{n\to\infty} \int_0^t x_n'(s)ds = \lim_{n\to\infty} (x_n(s) - x_n(0)) \\ &= x(t) - x(0) \quad \Rightarrow \quad x(t) = x(0) + \int_0^t y(s)ds \end{aligned}$$

Así que $x \in \mathcal{D}(D)$ y $Dx = x' = y \quad \Rightarrow$, por la proposición D es cerrado.

☞ El operador $T : \mathcal{D}(T) \subset \mathbb{X} \mapsto \mathcal{D}(T)$, $Tx = x$, donde $\mathcal{D}(T)$ es un subespacio denso en $\mathbb{X}$ y distinto de $\mathbb{X}$ es acotado pero no es cerrado.

Ejemplo

Un operador cerrado no tiene que ser acotado y uno acotado no tiene que ser cerrado.

☞ El operador derivada $D : \mathcal{D}(D) \subset C_\infty([0,1]) \mapsto C_\infty([0,1])$ $(Dx = x')$ es no acotado pero es cerrado.

Sea $x_n \in \mathcal{D}(D)$ t.q. que $x_n \to x$ y $Dx_n = x_n' \to y$. Como la convergencia en $C_\infty([0,1])$ es la convergencia uniforme

$$\begin{aligned} \int_0^t y(s)ds &= \int_0^t \lim_{n\to\infty} x_n'(s)ds = \lim_{n\to\infty} \int_0^t x_n'(s)ds = \lim_{n\to\infty} (x_n(s) - x_n(0)) \\ &= x(t) - x(0) \quad \Rightarrow \quad x(t) = x(0) + \int_0^t y(s)ds \end{aligned}$$

Así que $x \in \mathcal{D}(D)$ y $Dx = x' = y \quad \Rightarrow \quad$, por la proposición D es cerrado.

☞ El operador $T : \mathcal{D}(T) \subset \mathbb{X} \mapsto \mathcal{D}(T)$, $Tx = x$, donde $\mathcal{D}(T)$ es un subespacio denso en $\mathbb{X}$ y distinto de $\mathbb{X}$ es acotado pero no es cerrado.

Teorema (del grafo cerrado)

Sean $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ espacios de Banach, y $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$ un operador lineal cerrado, entonces, si $\mathcal{D}(A)$ es cerrado en $\mathbb{X}$, A es acotado.

Problemas

Teorema (del grafo cerrado)

Sean $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ espacios de Banach, y $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$ un operador lineal cerrado, entonces, si $\mathcal{D}(A)$ es cerrado en $\mathbb{X}$, A es acotado.

Problema

Sea $A : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$ un operador lineal acotado, $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ espacios Banach. Si A es biyectivo entonces existen dos números reales positivos a, b tales que, para todo $x \in \mathbb{X}$, $a\|x\| \leq \|Ax\| \leq b\|x\|$. **Ayuda:** *Usa el Teorema de la inversa acotada de Banach.*

Teorema (del grafo cerrado)

Sean $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ espacios de Banach, y $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$ un operador lineal cerrado, entonces, si $\mathcal{D}(A)$ es cerrado en $\mathbb{X}$, A es acotado.

Problema

Sea $A : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$ un operador lineal acotado, $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ espacios Banach. Si A es biyectivo entonces existen dos números reales positivos a, b tales que, para todo $x \in \mathbb{X}$, $a\|x\| \leq \|Ax\| \leq b\|x\|$. **Ayuda:** *Usa el Teorema de la inversa acotada de Banach.*

Problema

Sean $\mathbb{X}_1 = (\mathbb{X}, \|\cdot\|_1)$ y $\mathbb{X}_2 = (\mathbb{X}, \|\cdot\|_2)$ dos espacios de Banach de dimensión no necesariamente finita. Si existe una constante b tal que $\|x_1\| \leq b\|x_2\|$ para todo $x \in \mathbb{X}$, entonces existe una constante a tal que $\|x_2\| \leq a\|x_1\|$, es decir, ambas normas son equivalentes. **Ayuda:** *Define $T : \mathbb{X}_2 \mapsto \mathbb{X}_1$, $Tx = x$. Prueba que es biyectivo y acotado y usa el Teorema de la inversa acotada de Banach.*

Problema

Sea $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$ *un operador lineal acotado,* $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ *espacios normados. Prueba que*

1. *Si* $\mathcal{D}(A)$ *es cerrado en* $\mathbb{X}$*, entonces* A *es cerrado.*
2. *Si* A *es cerrado e* $\mathbb{Y}$ *es Banach, entonces* $\mathcal{D}(A)$ *es cerrado en* $\mathbb{X}$*.*

Ayuda: *Usa la proposición del operador cerrado.*

Problema

Sea $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$ *un operador lineal acotado,* $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ *espacios normados. Prueba que*

1. *Si* $\mathcal{D}(A)$ *es cerrado en* $\mathbb{X}$*, entonces* A *es cerrado.*
2. *Si* A *es cerrado e* $\mathbb{Y}$ *es Banach, entonces* $\mathcal{D}(A)$ *es cerrado en* $\mathbb{X}$*.*

Ayuda: *Usa la proposición del operador cerrado.*

Problema

Prueba que si un operador lineal cerrado A *tiene inverso, entonces* A^{-1} *es cerrado.* **Ayuda:** *Usa que la aplicación* $(x, y) \mapsto (y, x)$ *es una isometría.*

Problema

Sea $A : \mathcal{D}(A) \subset \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$ *un operador lineal acotado,* $\mathbb{X}, \mathbb{Y}$ *espacios normados. Prueba que*

1. *Si* $\mathcal{D}(A)$ *es cerrado en* $\mathbb{X}$*, entonces* A *es cerrado.*
2. *Si* A *es cerrado e* $\mathbb{Y}$ *es Banach, entonces* $\mathcal{D}(A)$ *es cerrado en* $\mathbb{X}$*.*

Ayuda: *Usa la proposición del operador cerrado.*

Problema

Prueba que si un operador lineal cerrado A *tiene inverso, entonces* A^{-1} *es cerrado.* **Ayuda:** *Usa que la aplicación* $(x, y) \mapsto (y, x)$ *es una isometría.*

Problema

Usando el Teorema del grafo cerrado prueba el Teorema de la inversa acotada de Banach.

Corolario: T. grafo cerrado es cierto si y solo si el de la inversa acotada lo es.

Definición

Una sucesión $(x_n)_n \in \mathbb{X}$*,* $\mathbb{X}$ *espacio normado, se dice que converge débilmente a* $x \in \mathbb{X}$ *si* $f(x_n) \to f(x)$ *para todo* $f \in \mathbb{X}' = \mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{C})$*, y escribiremos* $x_n \rightharpoonup x$*.*

Esta definición difiere de la habitual $x_n \to x$ cuando $\|x_n - x\| \to 0$. En este caso se dice que x_n converge a x fuertemente (o simplemente converge en norma).

Definición

Una sucesión $(x_n)_n \in \mathbb{X}$, $\mathbb{X}$ *espacio normado, se dice que converge débilmente a* $x \in \mathbb{X}$ *si* $f(x_n) \to f(x)$ *para todo* $f \in \mathbb{X}' = \mathcal{B}(\mathbb{X}, \mathbb{C})$, *y escribiremos* $x_n \rightharpoonup x$.

Esta definición difiere de la habitual $x_n \to x$ cuando $\|x_n - x\| \to 0$. En este caso se dice que x_n converge a x fuertemente (o simplemente converge en norma).

Proposición

Sea la sucesión $(x_n)_n \in \mathbb{X}$, $\mathbb{X}$ *espacio normado. Entonces*

1. *Si* $(x_n)_n$ *converge débilmente a* $x \in \mathbb{X}$, x *es único.*
2. *Si* $(x_n)_n$ *converge débilmente, entonces* x_n *es acotada.*
3. *Si* $(x_n)_n$ *converge en norma a* x, *entonces también converge débilmente.*

Teorema

Sea $\mathbb{H}$ *Hilbert y* $(x_n)_n \in \mathbb{H}$. *Entonces,* $x_n \rightharpoonup x \Leftrightarrow \forall z \in \mathbb{H}$, $\langle x_n, z\rangle \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \langle x, z\rangle$.

Teorema

Sea $\mathbb{H}$ *Hilbert y* $(x_n)_n \in \mathbb{H}$. *Entonces,* $x_n \rightharpoonup x \Leftrightarrow \forall z \in \mathbb{H}$, $\langle x_n, z\rangle \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \langle x, z\rangle$.

Ejemplo: $x_n \rightharpoonup x \not\Rightarrow x_n \to x$. $\mathbb{X} = \mathbb{H}$, $(e_n)_n$ orthon. $f(e_n) = \langle e_n, z\rangle \ldots$

Teorema

Sea la sucesión $(x_n)_n \in \mathbb{X}$, $\mathbb{X}$ *espacio normado. Si* $\dim \mathbb{X} = k < \infty$, *entonces la convergencia en norma y la débil son equivalentes.*

Teorema

Sea $\mathbb{H}$ *Hilbert y* $(x_n)_n \in \mathbb{H}$. *Entonces,* $x_n \rightharpoonup x \Leftrightarrow \forall z \in \mathbb{H}$, $\langle x_n, z\rangle \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \langle x, z\rangle$.

Ejemplo: $x_n \rightharpoonup x \not\Rightarrow x_n \to x$. $\mathbb{X} = \mathbb{H}$, $(e_n)_n$ orthon. $f(e_n) = \langle e_n, z\rangle \ldots$

Teorema

Sea la sucesión $(x_n)_n \in \mathbb{X}$, $\mathbb{X}$ *espacio normado. Si* $\dim \mathbb{X} = k < \infty$, *entonces la convergencia en norma y la débil son equivalentes.*

Un sistema de vectores l.i. $(\phi_n)_n \in \mathbb{X}$ es completo en $\mathbb{X}$ si para todo vector $x \in \mathbb{X}$ y cualquiera sea $\epsilon > 0$ existe una combinación lineal finita tal que

$$\forall \epsilon > 0,\ \forall x \in \mathbb{X},\ \exists \quad \sum_{k=1}^{\mathbf{n}} \alpha_k \phi_k \ \text{ t.q. } \left\| x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \phi_k \right\| < \epsilon\,.$$

Teorema

Sea $\mathbb{H}$ *Hilbert y* $(x_n)_n \in \mathbb{H}$. *Entonces,* $x_n \rightharpoonup x \Leftrightarrow \forall z \in \mathbb{H}, \langle x_n, z\rangle \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \langle x, z\rangle$.

Ejemplo: $x_n \rightharpoonup x \not\Rightarrow x_n \to x$. $\mathbb{X} = \mathbb{H}$, $(e_n)_n$ orthon. $f(e_n) = \langle e_n, z\rangle$ ...

Teorema

Sea la sucesión $(x_n)_n \in \mathbb{X}$, $\mathbb{X}$ *espacio normado. Si* $\dim \mathbb{X} = k < \infty$, *entonces la convergencia en norma y la débil son equivalentes.*

Un sistema de vectores l.i. $(\phi_n)_n \in \mathbb{X}$ es completo en $\mathbb{X}$ si para todo vector $x \in \mathbb{X}$ y cualquiera sea $\epsilon > 0$ existe una combinación lineal finita tal que

$$\forall\epsilon > 0,\ \forall x \in \mathbb{X},\ \exists \quad \sum_{k=1}^{\mathbf{n}} \alpha_k \phi_k \ \text{ t.q. } \left\| x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \phi_k \right\| < \epsilon\,.$$

Teorema

Sea $(x_n)_n \in \mathbb{X}$ *acotada,* $\mathbb{X}$ *espacio normado. Sea* $(\phi_k)_k \subset \mathbb{X}'$ *un sistema de funcionales l.i. completo. Si* $\forall k$, $\phi_k(x_n) \to \phi_k(x)$, *entonces* $x_n \rightharpoonup x$.

Ejemplo: El espacio dual de ℓ^1 es ℓ^∞.

Ejemplo: El espacio dual de ℓ^1 es ℓ^∞.

Sea $e_k = \delta_{i,k}$ la base de Schauder de ℓ^1, $x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k$

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k c_k, \quad c_k = f(e_k).$$

Ejemplo: El espacio dual de ℓ^1 es ℓ^∞.

Sea $e_k = \delta_{i,k}$ la base de Schauder de ℓ^1, $x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k$

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k c_k, \quad c_k = f(e_k).$$

Sea $c = (c_1, c_2, \dots, c_k, \dots)$. Para todo $k \in \mathbb{N}$ tenemos

$$|c_k| = |f(e_k)| \leq \|f\| \|e_k\| = \|f\| \quad \Rightarrow \quad \|c\|_\infty = \sup_{k \in \mathbb{N}} |c_k| \leq \|f\| \Rightarrow c \in \ell^\infty.$$

Ejemplo: El espacio dual de ℓ^1 es ℓ^∞.

Sea $e_k = \delta_{i,k}$ la base de Schauder de ℓ^1, $x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k$

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k c_k, \quad c_k = f(e_k).$$

Sea $c = (c_1, c_2, \ldots, c_k, \ldots)$. Para todo $k \in \mathbb{N}$ tenemos

$$|c_k| = |f(e_k)| \le \|f\| \|e_k\| = \|f\| \quad \Rightarrow \quad \|c\|_\infty = \sup_{k\in\mathbb{N}} |c_k| \le \|f\| \Rightarrow c \in \ell^\infty.$$

Sea $b \in \ell^\infty$ cualquiera

$$\text{Sea } b \in \ell^\infty \; g : \ell^1 \mapsto \mathbb{C}, \qquad g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k b_k \quad \Rightarrow \quad g \in \mathcal{B}(\ell^1, \mathbb{C}) = \ell^{1'}$$

Ejemplo: El espacio dual de ℓ^1 es ℓ^∞.

Sea $e_k = \delta_{i,k}$ la base de Schauder de ℓ^1, $x = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k$

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k c_k, \quad c_k = f(e_k).$$

Sea $c = (c_1, c_2, \dots, c_k, \dots)$. Para todo $k \in \mathbb{N}$ tenemos

$$|c_k| = |f(e_k)| \leq \|f\| \|e_k\| = \|f\| \quad \Rightarrow \quad \|c\|_\infty = \sup_{k \in \mathbb{N}} |c_k| \leq \|f\| \Rightarrow c \in \ell^\infty.$$

Sea $b \in \ell^\infty$ cualquiera

$$\text{Sea } b \in \ell^\infty \ g : \ell^1 \mapsto \mathbb{C}, \qquad g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k b_k \quad \Rightarrow \quad g \in \mathcal{B}(\ell^1, \mathbb{C}) = \ell^{1'}$$

$$|f(x)| = \left| \sum_{k=1}^{\infty} x_k c_k \right| \leq \|x\|_1 \|c\|_\infty \quad \Rightarrow \quad \|f\| = \sup_{\|x\|_1 = 1} |f(x)| \leq \|c\|_\infty \quad \Rightarrow$$

1. Reflexividad. Ejemplos de espacios reflexivos y no reflexivos. Por ejemplo: $\mathbb{H}$ es reflexivo. l^1 no es reflexivo. Los espacios normados de dimensión finita son reflexivos. Ref. [Kreyszig, Schechter]

1. Reflexividad. Ejemplos de espacios reflexivos y no reflexivos. Por ejemplo: $\mathbb{H}$ es reflexivo. l^1 no es reflexivo. Los espacios normados de dimensión finita son reflexivos. Ref. [Kreyszig, Schechter]

2. Más sobre los espacios L^p. En particular $L^2([0,1])$ como completamiento de $C^2([0,1])$. Ref. [Debnath & Mikusinsk]

1. Reflexividad. Ejemplos de espacios reflexivos y no reflexivos. Por ejemplo: $\mathbb{H}$ es reflexivo. l^1 no es reflexivo. Los espacios normados de dimensión finita son reflexivos. Ref. [Kreyszig, Schechter]

2. Más sobre los espacios L^p. En particular $L^2([0,1])$ como completamiento de $C^2([0,1])$. Ref. [Debnath & Mikusinsk]

3. Estudiar los espacios duales de los espacios L^p y $C^\infty_{[01,]}$ y ponerlos en relación con la teoría de la medida. [Kolmogorov & Fomín]

1. Reflexividad. Ejemplos de espacios reflexivos y no reflexivos. Por ejemplo: $\mathbb{H}$ es reflexivo. l^1 no es reflexivo. Los espacios normados de dimensión finita son reflexivos. Ref. [Kreyszig, Schechter]

2. Más sobre los espacios L^p. En particular $L^2([0,1])$ como completamiento de $C^2([0,1])$. Ref. [Debnath & Mikusinsk]

3. Estudiar los espacios duales de los espacios L^p y $C^\infty_{[01,]}$ y ponerlos en relación con la teoría de la medida. [Kolmogorov & Fomín]

4. Teoría de operadores y el mundo real: **Mecánica cuántica**