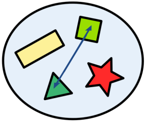
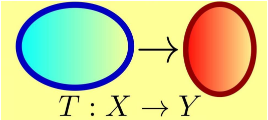
¿Qué es el análisis funcional?

R. Álvarez-Nodarse

Universidad de Sevilla





$$\forall x \in \mathbb{H} \qquad \mathcal{A}x = \sum_n \lambda_n \langle x, x_n \rangle x_n$$

¿De qué va esta historia?

Resolver el PVI

$$f''(x) + f(x) = g(x), \quad x \in [a, b], \quad f(a) = 1,\ f'(a) = 0 \tag{1}$$

donde f' es la derivada de f respecto a x y asumiremos que $g \in C_{[a,b]}$ y $f \in C^2_{[a,b]}$.

Resolviendo una ecuación diferencial lineal

Resolver el PVI

$$f''(x) + f(x) = g(x), \quad x \in [a, b], \quad f(a) = 1, \ f'(a) = 0 \qquad (1)$$

donde f' es la derivada de f respecto a x y asumiremos que $g \in C_{[a,b]}$ y $f \in C^2_{[a,b]}$.

La solución es:

$$\boxed{f(x) = \cos(x - a) + \int_a^x \sin(x - t) g(t) dt, \qquad x \in [a, b]} \qquad (2)$$

Teorema 1: *Sea* $h(t,x)$ *una función continua en* $D = \{(t,x) \in \mathbb{R}^2 | t \in [a,b], x \in [c,d]\}$*. Entonces la función* $H(x) = \displaystyle\int_a^b h(t,x)dt$ *es continua y diferenciable en* $[c,d]$ *y*

$$H'(x) = \int_a^b \frac{\partial h}{\partial x}(t,x)dt.$$

Teorema 1: *Sea* $h(t,x)$ *una función continua en* $D = \{(t,x) \in \mathbb{R}^2 | t \in [a,b], x \in [c,d]\}$*. Entonces la función* $H(x) = \int_a^b h(t,x)dt$ *es continua y diferenciable en* $[c,d]$ *y*

$$H'(x) = \int_a^b \frac{\partial h}{\partial x}(t,x)dt.$$

Sea $\alpha(x)$ una función diferenciable en $[c,d]$ cuya imagen esté contenida en $[a,b]$ y sea la función $\Phi(\alpha,x) = \int_a^\alpha h(t,x)dt$, $\alpha \in [a,b]$, $x \in [c,d]$.

Usando el teorema fundamental del cálculo así como el Teorema 1 $\Rightarrow$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}(\alpha,x) = \int_a^\alpha \frac{\partial h}{\partial x}(t,x)dt, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha}(\alpha,x) = h(\alpha,x).$$

Dado que ambas derivadas parciales son continuas, entonces $\Phi(\alpha,x)$ es diferenciable en $\alpha \in [a,b]$, $x \in [c,d]$.

$$\Phi(\alpha, x) = \int_a^\alpha h(t, x)dt, \qquad \alpha \in [a, b]$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}(\alpha, x) = \int_a^\alpha \frac{\partial h}{\partial x}(t, x)dt, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha}(\alpha, x) = h(\alpha, x).$$

$\Phi(\alpha, x)$ es diferenciable en $\alpha \in [a, b]$, $x \in [c, d]$.

La función compuesta $\Psi(x) = \Phi(\alpha(x), x)$ es diferenciable en $x \in [c, d]$ así que usando la regla de la cadena obtenemos

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x} =$$

Resolviendo una ecuación diferencial lineal

$$\Phi(\alpha, x) = \int_a^\alpha h(t,x)dt, \qquad \alpha \in [a,b]$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}(\alpha, x) = \int_a^\alpha \frac{\partial h}{\partial x}(t,x)dt, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha}(\alpha, x) = h(\alpha, x).$$

$\Phi(\alpha, x)$ es diferenciable en $\alpha \in [a,b]$, $x \in [c,d]$.

La función compuesta $\Psi(x) = \Phi(\alpha(x), x)$ es diferenciable en $x \in [c,d]$ así que usando la regla de la cadena obtenemos

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha}\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x} = \alpha'(x)h(\alpha(x), x) + \int_a^{\alpha(x)} \frac{\partial h}{\partial x}(t,x)dt.$$

Aplicando la fórmula anterior con ($\alpha(x) = x$ y $h(t,x) = \sin(x-t)g(t)$) a nuestra función f

$$f(x) = \cos(x-a) + \int_a^x \sin(x-t)g(t)dt, \qquad x \in [a,b].$$

obtenemos:

$$f'(x) = -\sin(x-a) + \int_a^x \cos(x-t)g(t)dt, \qquad x \in [a,b], \qquad (3)$$

y

$$f''(x) = -\cos(x-a) + g(x) - \int_a^x \sin(x-t)g(t)dt, \qquad x \in [a,b].$$

$$f'(x) = -\sin(x-a) + \int_a^x \cos(x-t)g(t)dt, \qquad x \in [a,b], \tag{3}$$

y

$$f''(x) = -\cos(x-a) + g(x) - \int_a^x \sin(x-t)g(t)dt, \qquad x \in [a,b].$$

Nótese que esta última expresión se puede escribir, usando (2), como

$$f''(x) = -f(x) + g(x) \quad \Rightarrow f''(x) + f(x) = g(x), \qquad x \in [a,b].$$

Además, de (3) se tiene que $f'(a) = 0$ y, por tanto, dado que $f(a) = 1$, la función f efectivamente la solución del PVI.

Resolver el PVI

$$f''(x) + f(x) = \sigma(x)f(x), \quad x \in [a,b], \quad f(a) = 1,\ f'(a) = 0.$$

La *solución* será

$$f(x) = \cos(x-a) + \int_a^x \sin(x-t)\sigma(t)f(t)dt, \qquad x \in [a,b]. \tag{4}$$

(4) define una ec. integral que reescribiremos convenientemente. Sea $D = \{(t,x) \in \mathbb{R}^2 | t \in [a,b], x \in [c,d]\}$ y sea $k(x,t)$ una función continua en D. Definamos el *operador* K, $K : C_{[a,b]} \mapsto C_{[a,b]}$

$$\boxed{Kf := K(f(x)) = \int_a^x k(x,t)f(t)dt}$$

Entonces (4) la podemos reescribir como

$$\boxed{f = u + Kf} \qquad u = \cos(x-a), \quad k(x,t) = \sin(x-t)\sigma(t).$$

¿Cómo resolver esta ecuación?

Vamos a *intentar* resolver la ecuación

$$f(x) = u(x) + Kf(x), \quad x \in [a, b], \tag{5}$$

donde $u, f \in C_{[a,b]}$ y K es el operador de Volterra definido por

$$Kf := K(f(x)) = \int_a^x k(x,t) f(t) dt. \tag{6}$$

Vamos a usar el *método iterativo de Picard*:

$$f_1(x) = u(x) + Kf_0(x), \quad x \in [a, b]. \tag{7}$$

$$\vdots$$

$$\boxed{f_n(x) = u(x) + Kf_{n-1}(x)} \quad x \in [a, b], \quad n = 1, 2, \ldots . \tag{8}$$

¿Convergencia $f_n \to f$?

Una sucesión de funciones f_n converge **uniformemente** a f en $[a, b]$ si

$$\sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| \to 0, \text{ cuando } n \to \infty.$$

Dadas $f, g \in C_{[a,b]}$ definiremos la **distancia** $\rho(f, g)$ mediante la expresión

$$\boxed{\rho(f, g) = \sup_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)|}$$

Una sucesión de funciones f_n converge **uniformemente** a f en $[a,b]$ si

$$\sup_{x\in[a,b]} |f_n(x) - f(x)| \to 0, \text{ cuando } n \to \infty.$$

Dadas $f, g \in C_{[a,b]}$ definiremos la **distancia** $\rho(f,g)$ mediante la expresión

$$\boxed{\rho(f,g) = \sup_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)|}$$

De esta definición se sigue que $\forall f, g, h \in C_{[a,b]}$:

1. $\rho(f,g) \geq 0$ y $\rho(f,g) = 0$ si y sólo si $f = g$,
2. $\rho(f,g) = \rho(g,f)$, y
3. $\rho(f,g) \leq \rho(f,h) + \rho(h,g)$.

La definición de distancia entre funciones continuas nos da la idea de como definir el *tamaño* o la *norma* de una función. Así, dada una función $f \in C_{[a,b]}$ definiremos la norma de f, $\|f\|$ al número

$$\boxed{\|f\| := \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|} \tag{9}$$

La definición de distancia entre funciones continuas nos da la idea de como definir el *tamaño* o la *norma* de una función. Así, dada una función $f \in C_{[a,b]}$ definiremos la norma de f, $\|f\|$ al número

$$\boxed{\|f\| := \sup_{x\in[a,b]} |f(x)|} \tag{9}$$

Es fácil comprobar que la *norma* (9) satisface que $\forall f, g \in C_{[a,b]}$

1. $\|f\| \geq 0$ y $\|f\| = 0$ si y sólo si $f = 0$,
2. $\forall\lambda \in \mathbb{R}$, $\|\lambda f\| = |\lambda|\|f\|$,
3. $\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|$.

Lo siguiente que queremos hacer notar es que el espacio de las funciones continuas $C_{[a,b]}$ satisface las siguientes interesantes propiedades:

1. Para todos $f, g \in C_{[a,b]}$, la suma, $h = f + g \in C_{[a,b]}$ y para todos $f, g, h \in C_{[a,b]}$ se cumple que:
    1. $f + g = g + f$
    2. $(f + g) + h = f + (g + h)$
    3. $f + \emptyset = \emptyset + f = f$, donde $\emptyset$ es la función $\emptyset : [a, b] \mapsto \mathbb{R}$, $\emptyset(x) = 0$.
    4. Cualquiera sea f existe una función $(-f)$ tal que $f + (-f) = (-f) + f = \emptyset$.

2. Para todo $f \in C_{[a,b]}$, y $\alpha \in \mathbb{R}$, $g = \alpha \cdot f \in C_{[a,b]}$, y para todos $f, g \in C_{[a,b]}$, y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ se cumple que:
    1. $\alpha \cdot (f + g) = \alpha \cdot f + \alpha \cdot g$,
    2. $(\alpha + \beta) \cdot f = \alpha \cdot f + \beta \cdot f$,
    3. $\alpha \cdot (\beta \cdot f) = (\alpha\beta) \cdot f$
    4. $1 \cdot f = f$

De la propia definición del operador K, usando las propiedades de la integral, tenemos que, para todos $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $f, g \in C_{[a,b]}$,

$$\boxed{K(\alpha f + \beta g) = \alpha K f + \beta K g} \tag{10}$$

Si un operador que cumple con (10) se dice que es un operador **lineal**.

Además, para toda función $f \in C_{[a,b]}$ se tiene

$$\begin{aligned} |Kf| &\leq \int_a^x |k(x,t)||f(t)|dt \leq \int_a^x \sup_{x,t\in[a,b]} |k(x,t)| \sup_{t\in[a,b]} |f(t)|dt \\ &\leq \kappa\|f\|(x-a) \leq \kappa\|f\|(b-a) = c\|f\|, \end{aligned}$$

donde $\kappa = \sup_{x,t\in[a,b]} |k(x,t)|$ y $c = \kappa(b-a)$. Es decir, para toda $f \in C_{[a,b]}$, existe un $c \geq 0$ tal que

$$\boxed{\|Kf\| = \sup_{t\in[a,b]} |Kf| \leq c\|f\|} \tag{11}$$

Los operadores que cumplen con (11) se denominan operadores **acotados**.

$$f_n(x) = u(x) + Kf_{n-1}(x), \quad x \in [a,b], \quad n = 1, 2, \dots.$$

$$f_1(x) = u(x) + Kf_0(x),$$

$$f_2 = u + Kf_1 = u + K(u + Kf_0) = u + Ku + K(Kf_0) = u + Ku + K^2 f_0 \quad \cdots$$

$$f_n = u + Ku + K^2 u + \cdots + K^{n-1} u + K^n f_0 \quad \Rightarrow$$

$$f_n - f_m = K^m u + \cdots + K^{n-1} u + K^n f_0 - K^m f_0.$$

Entonces, usando las propiedades de la norma

$$\|f_n - f_m\| \leq \|K^m u\| + \cdots + \|K^{n-1} u\| + \|K^n f_0\| + \|K^m f_0\|.$$

Vamos a acotar cada uno de los sumando $\|K^n h\|$, $h \in C_{[a,b]}$, $n = 1, 2, \dots$.
Para $n = 1$ ya hemos visto que $\|Kh\| \leq c\|h\|$. Entonces,

$$\|K^2 h\| = \|K(Kh)\| \leq c\|Kh\| \leq c^2\|h\| \quad \Rightarrow \quad \|K^n h\| \leq c^n\|h\|. \tag{12}$$

Esta cota es útil si $c < 1$ ...

Vamos a acotar cada uno de los sumando $\|K^n h\|$, $h \in C_{[a,b]}$, $n = 1, 2, \ldots$.
Para $n = 1$ ya hemos visto que $\|Kh\| \le c\|h\|$. Entonces,

$$\|K^2 h\| = \|K(Kh)\| \le c\|Kh\| \le c^2\|h\| \quad \Rightarrow \quad \|K^n h\| \le c^n\|h\|. \tag{12}$$

Esta cota es útil si $c < 1$ ... Vamos a *afinar* nuestra cota. Como ya vimos

$$|Kh| \le \kappa\|h\|(x-a) \quad \Rightarrow$$

$$|K^2 h| = |K(Kh)| \le \int_a^x |k(x,t)||Kh|dt \le \cdots = \frac{\kappa^2(x-a)^2}{2}\|h\|,$$

$$|K^3 h| = |K(K^2 h)| \le \int_a^x |k(x,t)||K^2 h|dt \le \kappa \int_a^x |K^2 h|dt \le \cdots = \frac{\kappa^3(x-a)^3}{3!}\|h\|.$$

$$\boxed{|K^n h| \le \frac{\kappa^n(x-a)^n}{n!}\|h\| \quad \Rightarrow \quad \|K^n h\| \le \frac{\kappa^n(b-a)^n}{n!}\|h\|}$$

$$\|f_n - f_m\| \leq \left(\frac{\zeta^m}{m!} + \cdots + \frac{\zeta^{n-1}}{(n-1)!}\right)\|u\| + \left(\frac{\zeta^m}{m!} + \frac{\zeta^n}{n!}\right)\|f_0\|, \quad \zeta = (b-a)\kappa$$

f_n es uniformemente convergente y su límite f es una función continua.

$$\|f_n - f_m\| \leq \left(\frac{\zeta^m}{m!} + \cdots + \frac{\zeta^{n-1}}{(n-1)!}\right)\|u\| + \left(\frac{\zeta^m}{m!} + \frac{\zeta^n}{n!}\right)\|f_0\|, \quad \zeta = (b-a)\kappa$$

f_n es uniformemente convergente y su límite f es una función continua.

Probemos que $Kf_n \to Kf$ si $f_n \to f$.

$$\|Kf_n - Kf\| = \|K(f_n - f)\| \leq c\|f_n - f\| \to 0 \text{ si } n \to \infty.$$

Por tanto, si $n \to \infty$ en

$$f_n(x) = u(x) + Kf_{n-1}(x) \quad \Rightarrow \quad f(x) = u(x) + Kf(x)$$

Teorema 2a: La sucesión f_n construida mediante el método iterativo de Picard tiende a la solución de la ecuación integral de Volterra.

Es f ¿es única?

Supongamos que hay dos funciones continuas en $C_{[a,b]}$, f y g, con $f \neq g$ tales que $f = u + Kf$ y $g = u + Kg$. Restando ambas tenemos $f - g = K(f - g)$. Sea $h = f - g$. Entonces

$$h = Kh \quad \Rightarrow \quad h = K(Kh) = K^2 h = K^2(Kh) = K^3 h = \cdots = K^n h,$$

y, por tanto, $\|h\| = \|K^n h\|$. Si tomamos el límite cuando $n \to \infty$ en la expresión anterior y usamos

$$\|K^n h\| \leq \frac{\kappa^n (b-a)^n}{n!} \|h\| \quad \Rightarrow \quad \|K^n h\| \to 0 \ldots$$

Teorema 2b: La sucesión f_n construida mediante el método iterativo de Picard tiende a la **única** solución de la ecuación integral de Volterra.

Recapitulemos el conjunto de propiedades que hemos usado:

1. Para el conjunto $C_{[a,b]}$ las funciones continuas es un*espacio vectorial*
2. En $C_{[a,b]}$es un espacio *normado* y a su vez *métrico*
3. El operador K es un operador lineal y acotado.
4. $\forall (f_n)_n \in C_{[a,b]}$ t.q. $f_n - f_m \to 0$ cuando $n, m \to \infty$, (i.e. sucesión de Cauchy) es convergente, i.e., $f_n \to f \in C_{[a,b]}$ cuando $n \to \infty \implies C_{[a,b]}$ es un espacio completo.

Recapitulemos el conjunto de propiedades que hemos usado:

1. Para el conjunto $C_{[a,b]}$ las funciones continuas es un*espacio vectorial*
2. En $C_{[a,b]}$es un espacio *normado* y a su vez *métrico*
3. El operador K es un operador lineal y acotado.
4. $\forall (f_n)_n \in C_{[a,b]}$ t.q. $f_n - f_m \to 0$ cuando $n, m \to \infty$, (i.e. sucesión de Cauchy) es convergente, i.e., $f_n \to f \in C_{[a,b]}$ cuando $n \to \infty \Longrightarrow$ $C_{[a,b]}$ es un espacio completo.

¿Existen otros espacios útiles para resolver este tipo de problemas?

Recapitulemos el conjunto de propiedades que hemos usado:

1. Para el conjunto $C_{[a,b]}$ las funciones continuas es un*espacio vectorial*
2. En $C_{[a,b]}$es un espacio *normado* y a su vez *métrico*
3. El operador K es un operador lineal y acotado.
4. $\forall (f_n)_n \in C_{[a,b]}$ t.q. $f_n - f_m \to 0$ cuando $n, m \to \infty$, (i.e. sucesión de Cauchy) es convergente, i.e., $f_n \to f \in C_{[a,b]}$ cuando $n \to \infty \Longrightarrow C_{[a,b]}$ es un espacio completo.

¿Existen otros espacios útiles para resolver este tipo de problemas?

¿Qué otras propiedades importantes tienen estos espacios?

Recapitulemos el conjunto de propiedades que hemos usado:

1. Para el conjunto $C_{[a,b]}$ las funciones continuas es un*espacio vectorial*
2. En $C_{[a,b]}$es un espacio *normado* y a su vez *métrico*
3. El operador K es un operador lineal y acotado.
4. $\forall (f_n)_n \in C_{[a,b]}$ t.q. $f_n - f_m \to 0$ cuando $n, m \to \infty$, (i.e. sucesión de Cauchy) es convergente, i.e., $f_n \to f \in C_{[a,b]}$ cuando $n \to \infty \Longrightarrow$ $C_{[a,b]}$ es un espacio completo.

¿Existen otros espacios útiles para resolver este tipo de problemas?

¿Qué otras propiedades importantes tienen estos espacios?

¿Con qué otros tipos de operadores podemos encontrarnos en la práctica?

Recapitulemos el conjunto de propiedades que hemos usado:

1. Para el conjunto $C_{[a,b]}$ las funciones continuas es un *espacio vectorial*
2. En $C_{[a,b]}$ es un espacio *normado* y a su vez *métrico*
3. El operador K es un operador lineal y acotado.
4. $\forall (f_n)_n \in C_{[a,b]}$ t.q. $f_n - f_m \to 0$ cuando $n, m \to \infty$, (i.e. sucesión de Cauchy) es convergente, i.e., $f_n \to f \in C_{[a,b]}$ cuando $n \to \infty \Longrightarrow$ $C_{[a,b]}$ es un espacio completo.

¿Existen otros espacios útiles para resolver este tipo de problemas?

¿Qué otras propiedades importantes tienen estos espacios?

¿Con qué otros tipos de operadores podemos encontrarnos en la práctica?

¿Qué otras propiedades útiles tienen los operadores lienales?

Recapitulemos el conjunto de propiedades que hemos usado:

1. Para el conjunto $C_{[a,b]}$ las funciones continuas es un*espacio vectorial*
2. En $C_{[a,b]}$es un espacio *normado* y a su vez *métrico*
3. El operador K es un operador lineal y acotado.
4. $\forall (f_n)_n \in C_{[a,b]}$ t.q. $f_n - f_m \to 0$ cuando $n, m \to \infty$, (i.e. sucesión de Cauchy) es convergente, i.e., $f_n \to f \in C_{[a,b]}$ cuando $n \to \infty \Longrightarrow$ $C_{[a,b]}$ es un espacio completo.

¿Existen otros espacios útiles para resolver este tipo de problemas?

¿Qué otras propiedades importantes tienen estos espacios?

¿Con qué otros tipos de operadores podemos encontrarnos en la práctica?

¿Qué otras propiedades útiles tienen los operadores lienales?

El objetivo de este curso es estudiar algunas de las propiedades de los espacios *funcionales* así como de cierta clase de operadores que generalizan el operador de Volterra y, a ser posible, mostrar el ámbito de aplicación de dicha teoría para describir el mundo que nos rodea.

¡Si aprendemos aprobamos pero no necesariamente al revés!

1. Conceptos básicos de topología general. Espacios métricos. Espacios normados y espacios de Hilbert. Operadores lineales entre espacios normados. Espacio normados de dimensión finita e infinita. 10 horas.
2. Aproximación en espacios de Hilbert. Sistemas ortonormales. Coeficientes y series de Fourier. 10 horas
3. Operador adjunto. Operadores compactos. Teoría espectral de operadores. Aplicaciones. 16 horas.
4. Teorema de Hahn-Banach. Reflexividad. Ejemplos de espacios reflexivos y no reflexivos. Duales de los espacios clásicos de sucesiones y funciones. 12 horas.
5. Teorema de Baire. Principio de la acotación uniforme. Teoremas de la aplicación abierta y del grafo cerrado. 12 horas.

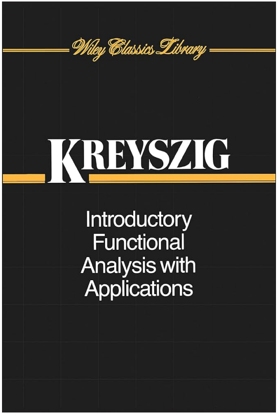
¡Si aprendemos aprobamos pero no necesariamente al revés!

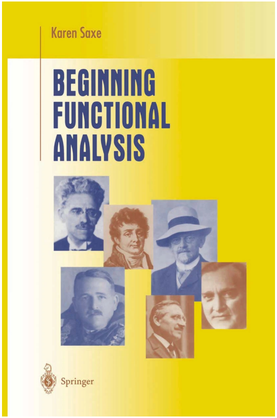
1. Conceptos básicos de topología general. Espacios métricos. Espacios normados y espacios de Hilbert. Operadores lineales entre espacios normados. Espacio normados de dimensión finita e infinita. ~~10 horas~~
2. Aproximación en espacios de Hilbert. Sistemas ortonormales. Coeficientes y series de Fourier. ~~10 horas~~
3. Operador adjunto. Operadores compactos. Teoría espectral de operadores. Aplicaciones. ~~16 horas~~
4. Teorema de Hahn-Banach. Reflexividad. Ejemplos de espacios reflexivos y no reflexivos. Duales de los espacios clásicos de sucesiones y funciones. ~~12 horas~~
5. Teorema de Baire. Principio de la acotación uniforme. Teoremas de la aplicación abierta y del grafo cerrado. ~~12 horas~~

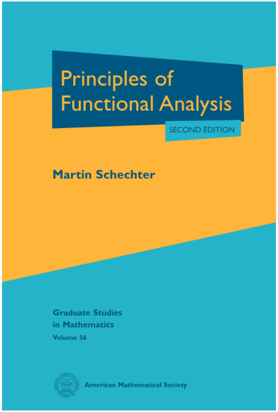
Se realizarán dos pruebas **escritas** a lo largo del curso: una a mitad una el último día de clases.

Estas pruebas se evaluarán sobre 10 puntos cada una. Será necesarios un mínimo de 4 puntos para aprobar cada prueba. La nota final será la media obtenida en ellas y si es mayor o igual que 5 se aprobará la asignatura.

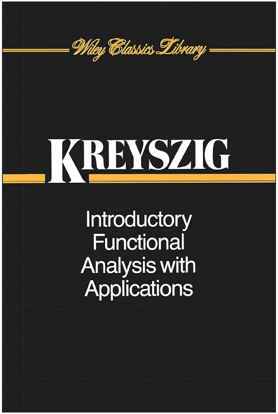
Habrá un examen final **escrito**. Para aprobar la asignatura se necesita sacar al menos **5** puntos en dicho examen.

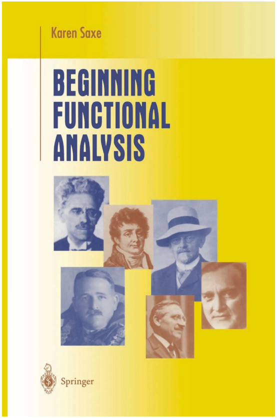

Wiley Classics Library
KREYSZIG
Introductory Functional Analysis with Applications

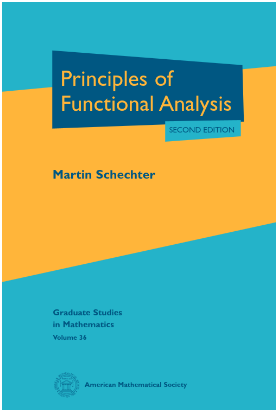

Karen Saxe
BEGINNING FUNCTIONAL ANALYSIS
Springer


Principles of Functional Analysis
SECOND EDITION
Martin Schechter
Graduate Studies in Mathematics
Volume 36
American Mathematical Society

Bibliografía: Algunos libros

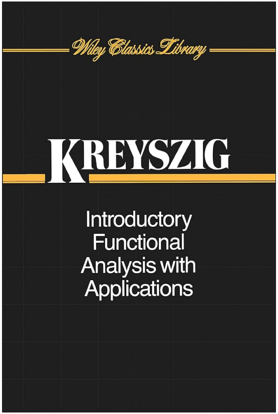


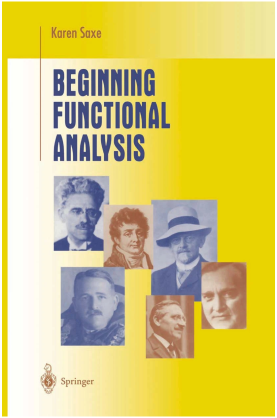


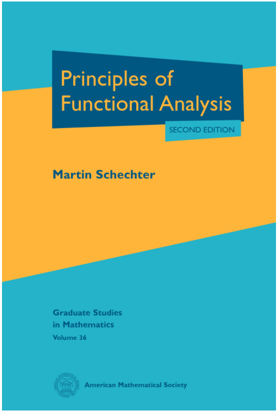


- Ralph P. Boas, Jr. A Primer of Real Functions, MMA, 1997
- V.A. Zorich, *Mathematical Analysis I & II.* Springer, 2015, 2016.

Bibliografía: Algunos libros







- Ralph P. Boas, Jr. A Primer of Real Functions, MMA, 1997
- V.A. Zorich, *Mathematical Analysis I & II.* Springer, 2015, 2016.
- ¿Apuntes? ¿Resúmenes?