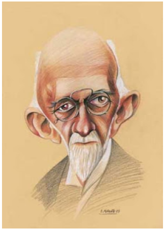
Espacios de Hilbert

R. Álvarez-Nodarse

Universidad de Sevilla



Definición

Se dice que un espacio vectorial $\mathbb{E}$ *es un espacio euclídeo si dados dos elementos cualesquiera* $x, y \in \mathbb{E}$ *existe un número denominado producto escalar y que denotaremos por* $\langle x, y \rangle$ *tal que*

1. *Para todo* $x, y \in \mathbb{E}$, $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$.
2. *Para todo* $x, y, z \in \mathbb{E}$, $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$.
3. *Para todo* $x, y \in \mathbb{E}$ *y* $\lambda \in \mathbb{C}$, $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle$
4. *Para todo* $x \in \mathbb{E}$, $x \neq 0$, $\langle x, x \rangle > 0$ *y si* $\langle x, x \rangle = 0$, *entonces* $x = 0$.

Definición

Se dice que un espacio vectorial $\mathbb{E}$ es un espacio euclídeo si dados dos elementos cualesquiera $x, y \in \mathbb{E}$ existe un número denominado producto escalar y que denotaremos por $\langle x, y\rangle$ tal que

1. *Para todo $x, y \in \mathbb{E}$, $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$.*
2. *Para todo $x, y, z \in \mathbb{E}$, $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$.*
3. *Para todo $x, y \in \mathbb{E}$ y $\lambda \in \mathbb{C}$, $\langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$*
4. *Para todo $x \in \mathbb{E}$, $x \neq 0$, $\langle x, x\rangle > 0$ y si $\langle x, x\rangle = 0$, entonces $x = 0$.*

Ejercicio

Prueba que como consecuencia de la definición anterior se tiene que

1. Para todos $x, y, z \in \mathbb{E}$, $\langle x, y + z\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle$.
2. Para todos $x, y \in \mathbb{E}$ y $\lambda \in \mathbb{C}$, $\langle x, \lambda y\rangle = \overline{\lambda}\langle x, y\rangle$.
3. Para todo $x \in \mathbb{E}$, $\langle x, 0\rangle = \langle 0, x\rangle = 0$.
4. Si $\langle x, z\rangle = \langle y, z\rangle$ para todos los $z \in \mathbb{E}$, entonces $x = y$.

★ $\mathbb{C}^n$ con el prod. escalar: $x = (x_1, \ldots, x_n)$, e $y = (y_1, \ldots, y_n)$

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k \overline{y_k}.$$

Obviamente este es un espacio de dimensión finita.

Espacios euclídeos: Ejemplos

★ $\mathbb{C}^n$ con el prod. escalar: $x = (x_1, \dots, x_n)$, e $y = (y_1, \dots, y_n)$

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k \overline{y_k}.$$

Obviamente este es un espacio de dimensión finita.

★ ℓ^2, el espacio de las sucesiones $(x_n)_n$ tales que $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 < \infty$, donde si $x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$, e $y = (y_1, y_2, \dots, y_n, \dots)$

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \overline{y_k}.$$

De la desigualdad de Hölder $\Rightarrow$ el $\langle x, y \rangle$ está bien definido

★ $\mathbb{C}^n$ con el prod. escalar: $x = (x_1, \ldots, x_n)$, e $y = (y_1, \ldots, y_n)$

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k \overline{y_k}.$$

Obviamente este es un espacio de dimensión finita.

★ ℓ^2, el espacio de las sucesiones $(x_n)_n$ tales que $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 < \infty$, donde si $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$, e $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots)$

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \overline{y_k}.$$

De la desigualdad de Hölder $\Rightarrow$ el $\langle x, y \rangle$ está bien definido (prueba directa).

★ $\mathbb{C}^n$ con el prod. escalar: $x = (x_1, \ldots, x_n)$, e $y = (y_1, \ldots, y_n)$

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k \overline{y_k}.$$

Obviamente este es un espacio de dimensión finita.

★ ℓ^2, el espacio de las sucesiones $(x_n)_n$ tales que $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 < \infty$, donde si $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots)$, e $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots)$

$$\langle x, y \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \overline{y_k}.$$

De la desigualdad de Hölder $\Rightarrow$ el $\langle x, y \rangle$ está bien definido (prueba directa).

★ $C_{[a,b]}$ (que denotaremos por $C^2_{[a,b]}$) de las funciones continuas en $[a, b]$ cerrado y acotado con el siguiente producto escalar

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx.$$

Teorema (Cauchy-Schwarz)

Para todos $f, g \in \mathbb{E}$ *espacio euclídeo* $\Rightarrow$ $\boxed{|\langle f, g\rangle|^2 \leq \langle f, f\rangle\langle g, g\rangle}$

Teorema (Todo espacio euclídeo $\mathbb{E}$ es normado con la norma)

$$\boxed{\|f\| = \sqrt{\langle f, f\rangle}} \qquad \Rightarrow |\langle f, g\rangle| \leq \|f\| \cdot \|g\|.$$

Teorema (Cauchy-Schwarz)

Para todos $f, g \in \mathbb{E}$ *espacio euclídeo* $\Rightarrow$ $\boxed{|\langle f, g\rangle|^2 \leq \langle f, f\rangle\langle g, g\rangle}$

Teorema (Todo espacio euclídeo $\mathbb{E}$ es normado con la norma)

$$\boxed{\|f\| = \sqrt{\langle f, f\rangle}} \qquad \Rightarrow |\langle f, g\rangle| \leq \|f\| \cdot \|g\|.$$

1 y 2 son triviales. Probemos 3: que

$$\begin{aligned} \|f+g\|^2 &= \langle f+g, f+g\rangle = \langle f, f\rangle + 2\Re(\langle f, g\rangle) + \langle g, g\rangle \\ &\leq \langle f, f\rangle + 2|\langle f, g\rangle| + \langle g, g\rangle \leq \langle f, f\rangle + 2\sqrt{\langle f, f\rangle\langle g, g\rangle} + \langle g, g\rangle \\ &= (\sqrt{\langle f, f\rangle} + \sqrt{\langle g, g\rangle})^2 \end{aligned}$$

Teorema (Cauchy-Schwarz)

Para todos $f, g \in \mathbb{E}$ *espacio euclídeo* $\Rightarrow$ $\boxed{|\langle f, g\rangle|^2 \leq \langle f, f\rangle\langle g, g\rangle}$

Teorema (Todo espacio euclídeo $\mathbb{E}$ es normado con la norma)

$$\boxed{\|f\| = \sqrt{\langle f, f\rangle}} \qquad \Rightarrow |\langle f, g\rangle| \leq \|f\| \cdot \|g\|.$$

1 y 2 son triviales. Probemos 3: que

$$\begin{aligned} \|f+g\|^2 &= \langle f+g, f+g\rangle = \langle f, f\rangle + 2\Re(\langle f, g\rangle) + \langle g, g\rangle \\ &\leq \langle f, f\rangle + 2|\langle f, g\rangle| + \langle g, g\rangle \leq \langle f, f\rangle + 2\sqrt{\langle f, f\rangle\langle g, g\rangle} + \langle g, g\rangle \\ &= (\sqrt{\langle f, f\rangle} + \sqrt{\langle g, g\rangle})^2 \end{aligned}$$

Corolario (Todo espacio euclídeo $\mathbb{E}$ es un espacio métrico con la métrica)

$$\boxed{\rho(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\langle x - y, x - y\rangle}}$$

Ejercicio: Probar que que para todos $x, y \in \mathbb{E}$, la norma inducida por el producto escalar cumple con la *ley del paralelogramo*:

$$\|a+b\|^2 + \|a-b\|^2 = 2(\|a\|^2 + \|b\|^2).$$

Ejercicio: Probar que que para todos $x, y \in \mathbb{E}$, la norma inducida por el producto escalar cumple con la *ley del paralelogramo*:

$$\|a+b\|^2 + \|a-b\|^2 = 2(\|a\|^2 + \|b\|^2).$$

Proposición

Un espacio normado $\mathbb{X}$ es euclídeo si y sólo si para todos $x, y \in \mathbb{E}$, se cumple la ley del paralelogramo.

Ejercicio: Probar que que para todos $x, y \in \mathbb{E}$, la norma inducida por el producto escalar cumple con la *ley del paralelogramo*:

$$\|a+b\|^2 + \|a-b\|^2 = 2(\|a\|^2 + \|b\|^2).$$

Proposición

Un espacio normado $\mathbb{X}$ es euclídeo si y sólo si para todos $x, y \in \mathbb{E}$, se cumple la ley del paralelogramo.

Para el caso real

$$f(x,z) := \langle x, z\rangle = \frac{1}{4}(\|x+z\|^2 - \|x-z\|^2), \qquad z \in \mathbb{X}$$

Ejercicio: Probar que que para todos $x, y \in \mathbb{E}$, la norma inducida por el producto escalar cumple con la *ley del paralelogramo*:

$$\|a+b\|^2 + \|a-b\|^2 = 2(\|a\|^2 + \|b\|^2).$$

Proposición

Un espacio normado $\mathbb{X}$ es euclídeo si y sólo si para todos $x, y \in \mathbb{E}$, se cumple la ley del paralelogramo.

Para el caso real

$$f(x,z) := \langle x, z\rangle = \frac{1}{4}(\|x+z\|^2 - \|x-z\|^2), \qquad z \in \mathbb{X}$$

El caso complejo es algo más complicado de probar. La demostración original se debe a P. Jordan y J. von Neuman (*Annals of Math.* **36**, 719–723) y se basa en probar que la cantidad

$$\langle x, z\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+z\|^2 - \|x-z\|^2 + i\|x+iz\|^2 - i\|x-iz\|^2\right)$$

define un producto escalar.

En $\mathbb{C}^n$ tenemos que la norma inducida es $\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2}$

En ℓ^2, $\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2}$,

En $C_{[a,b]}$ la norma viene dada por $\|f\| = \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2 dx}$.

En $\mathbb{C}^n$ tenemos que la norma inducida es $\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2}$

En ℓ^2, $\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2}$,

En $C_{[a,b]}$ la norma viene dada por $\|f\| = \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2 dx}$.

Ejercicio

Prueba que si $x_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} x$, $y_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} y$ y $\alpha_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \alpha \Rightarrow$

$$x_n + y_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} x + y, \quad \alpha_n x_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \alpha x, \quad \langle x_n, y_n \rangle \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \langle x, y \rangle.$$

En $\mathbb{C}^n$ tenemos que la norma inducida es $\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2}$

En ℓ^2, $\|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2}$,

En $C_{[a,b]}$ la norma viene dada por $\|f\| = \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2 dx}$.

Ejercicio

Prueba que si $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x$, $y_n \xrightarrow{n\to\infty} y$ y $\alpha_n \xrightarrow{n\to\infty} \alpha \Rightarrow$

$$x_n + y_n \xrightarrow{n\to\infty} x + y, \quad \alpha_n x_n \xrightarrow{n\to\infty} \alpha x, \quad \langle x_n, y_n\rangle \xrightarrow{n\to\infty} \langle x, y\rangle.$$

$$\langle x_n, y_n\rangle - \langle x, y\rangle = \langle x_n - x, y - y_n\rangle + \langle x, y_n - y\rangle + \langle x_n - x, y_n\rangle$$

Definición

Un espacio euclídeo $\mathbb{E}$ *completo se denomina espacio de Hilbert y lo denotaremos por* $\mathbb{H}$.

Definición

Un espacio euclídeo $\mathbb{E}$ completo se denomina espacio de Hilbert y lo denotaremos por $\mathbb{H}$.

Definición

Sea el sistema de vectores $(\phi_n)_n$ (finito o infinito) de un espacio euclídeo $\mathbb{E}$. Diremos que $(\phi_n)_{n=1}^{\infty}$ es un sistema ortogonal dos a dos si

$$\langle \phi_n, \phi_m \rangle = \delta_{n,m} \|\phi_n\|^2.$$

Si además $\|\phi_n\| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, se dice que el sistema es ortonormal.

- El sistema de los vectores canónicos de $\mathbb{C}^n$ $(e_k)_{k=1}^n$

$$\begin{aligned} e_1 &= (1,0,0,\dots,0,0), \\ e_2 &= (0,1,0,\dots,0,0), \\ &\vdots \\ e_n &= (0,0,0,\dots,0,1). \end{aligned}$$

▶El sistema de los vectores canónicos de $\mathbb{C}^n$ $(e_k)_{k=1}^n$

$$\begin{aligned} e_1 &= (1,0,0,\ldots,0,0),\\ e_2 &= (0,1,0,\ldots,0,0),\\ &\vdots\\ e_n &= (0,0,0,\ldots,0,1). \end{aligned}$$

▶El sistema $(e_k)_{k=1}^n \in \ell^2$ es un sistema ortonormal de ℓ^2.

$$\begin{aligned} e_1 &= (1,0,0,0,\ldots),\\ e_2 &= (0,1,0,0,\ldots),\\ e_n &= (0,0,1,0\ldots),\\ &\vdots \end{aligned}$$

El sistema de funciones $\{1\} \cup \{\sin nx, \cos nx\}_{n=1}^\infty$ es un sistema ortogonal del espacio de las funciones continuas en $[0,2\pi]$, con el producto escalar

$$\langle f,g\rangle = \int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)}dx.$$

Ejercicio

Prueba que si los vectores $x_1, \dots, x_n$ (no nulos) de un espacio euclídeo son ortogonales, entonces son linealmente independientes.

Ejercicio

Prueba que si los vectores $x_1, \dots, x_n$ (no nulos) de un espacio euclídeo son ortogonales, entonces son linealmente independientes.

Teorema (Gram-Schmidt)

En un espacio de Hilbert $\mathbb{H}$ de cualquier conjunto de vectores linealmente independiente se puede construir un conjunto de vectores ortonormales (ortogonales).

Ejercicio

Prueba que si los vectores $x_1, \dots, x_n$ (no nulos) de un espacio euclídeo son ortogonales, entonces son linealmente independientes.

Teorema (Gram-Schmidt)

En un espacio de Hilbert $\mathbb{H}$ de cualquier conjunto de vectores linealmente independiente se puede construir un conjunto de vectores ortonormales (ortogonales).

Idea: Escogemos $\tilde{\psi}_1 = \phi_1$ y luego, $\forall k \geq 2$,

$$\tilde{\psi}_n = \phi_n + \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_{n,k} \psi_k,$$

donde $\alpha_{n,k}$, $n \in \mathbb{N}$, $k = 1, \dots, n-1$ sean tales que $\langle \psi_n, \phi_k \rangle = 0$ $\forall k = 1, 2, \dots, n-1$.

Del proceso anterior $\Rightarrow \forall n \geq 1$,

$$\tilde{\psi}_n = \phi_n + \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_{n,k} \tilde{\psi}_k \Rightarrow \phi_n = \tilde{\psi}_n + \sum_{k=1}^{n-1} \beta_{n,k} \tilde{\psi}_k \quad \Rightarrow$$

$$\langle \tilde{\psi}_k, \tilde{\psi}_n \rangle = 0, \quad \forall k = 0, 1, \ldots n-1 \Leftrightarrow \langle \phi_k, \tilde{\psi}_n \rangle = 0, \quad \forall k = 0, 1, \ldots n-1.$$

Del proceso anterior $\Rightarrow \forall n \geq 1$,

$$\tilde{\psi}_n = \phi_n + \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_{n,k}\tilde{\psi}_k \Rightarrow \phi_n = \tilde{\psi}_n + \sum_{k=1}^{n-1} \beta_{n,k}\tilde{\psi}_k \quad \Rightarrow$$

$$\langle \tilde{\psi}_k, \tilde{\psi}_n \rangle = 0, \quad \forall k = 0, 1, \dots n-1 \Leftrightarrow \langle \phi_k, \tilde{\psi}_n \rangle = 0, \quad \forall k = 0, 1, \dots n-1.$$

Usando lo anterior tenemos:

$$\tilde{\psi}_n = \begin{vmatrix} \langle \phi_1, \phi_1 \rangle & \langle \phi_1, \phi_2 \rangle & \cdots & \langle \phi_1, \phi_{n-1} \rangle & \phi_1 \\ \langle \phi_2, \phi_1 \rangle & \langle \phi_2, \phi_2 \rangle & \cdots & \langle \phi_2, \phi_{n-1} \rangle & \phi_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \langle \phi_n, \phi_1 \rangle & \langle \phi_n, \phi_2 \rangle & \cdots & \langle \phi_n, \phi_{n-1} \rangle & \phi_n \end{vmatrix}.$$

Basta notar que $\langle \phi_k, \tilde{\psi}_n \rangle = 0$, $k = 1, 2, \dots, n-1$.

Del proceso anterior $\Rightarrow \forall n \geq 1$,

$$\tilde{\psi}_n = \phi_n + \sum_{k=1}^{n-1} \alpha_{n,k} \tilde{\psi}_k \Rightarrow \phi_n = \tilde{\psi}_n + \sum_{k=1}^{n-1} \beta_{n,k} \tilde{\psi}_k \quad \Rightarrow$$

$$\langle \tilde{\psi}_k, \tilde{\psi}_n \rangle = 0, \quad \forall k = 0, 1, \dots n-1 \Leftrightarrow \langle \phi_k, \tilde{\psi}_n \rangle = 0, \quad \forall k = 0, 1, \dots n-1.$$

Usando lo anterior tenemos:

$$\tilde{\psi}_n = \begin{vmatrix} \langle \phi_1, \phi_1 \rangle & \langle \phi_1, \phi_2 \rangle & \cdots & \langle \phi_1, \phi_{n-1} \rangle & \phi_1 \\ \langle \phi_2, \phi_1 \rangle & \langle \phi_2, \phi_2 \rangle & \cdots & \langle \phi_2, \phi_{n-1} \rangle & \phi_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \langle \phi_n, \phi_1 \rangle & \langle \phi_n, \phi_2 \rangle & \cdots & \langle \phi_n, \phi_{n-1} \rangle & \phi_n \end{vmatrix}.$$

Basta notar que $\langle \phi_k, \tilde{\psi}_n \rangle = 0$, $k = 1, 2, \dots, n-1$. Ejercicio: $\|\tilde{\psi}\|$

Teorema

Si el espacio euclídeo $\mathbb{E}$ *es separable, entonces cualquier sistema ortogonal (ortonormal) de* $\mathbb{E}$ *es numerable.*

Teorema

Si el espacio euclídeo $\mathbb{E}$ es separable, entonces cualquier sistema ortogonal (ortonormal) de $\mathbb{E}$ es numerable.

Sea $(\psi_n)_n$ ortonormal. Entonces $\|\psi_n - \psi_m\| = \sqrt{2}$ si $n \neq m$. Sea el conjunto de las bolas $B(\psi_n, 1/2) \cdots$

Teorema

Si el espacio euclídeo $\mathbb{E}$ es separable, entonces cualquier sistema ortogonal (ortonormal) de $\mathbb{E}$ es numerable.

Sea $(\psi_n)_n$ ortonormal. Entonces $\|\psi_n - \psi_m\| = \sqrt{2}$ si $n \neq m$. Sea el conjunto de las bolas $B(\psi_n, 1/2) \cdots$

Definición (Serie de Fourier respecto al sist. ortonormal $(\phi_n)_{n=1}^{\infty}$)

Dado un vector $x \in \mathbb{H}$ definiremos la serie de Fourier

$$s := \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n, \qquad c_n = \langle x, \phi_n \rangle, \quad \forall n \geq 1.$$

Teorema

Sea H el subespacio lineal de $\mathbb{H}$ generado por los vectores $\{\phi_1, \phi_2 \ldots, \phi_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, i.e., $H = \operatorname{span}(\phi_1, \phi_2 \ldots, \phi_n)$. Entonces

$$\min_{q \in H} ||x - q||^2 = ||x||^2 - \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 = ||x||^2 - \sum_{k=1}^{n} |\langle x, \phi_n \rangle|^2$$

y se alcanza cuando q es la suma parcial de la serie $s_n := \sum_{k=1}^{n} c_k \phi_k$.

Teorema

Sea H el subespacio lineal de $\mathbb{H}$ generado por los vectores $\{\phi_1, \phi_2 \dots, \phi_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, i.e., $H = \operatorname{span}(\phi_1, \phi_2 \dots, \phi_n)$. Entonces

$$\min_{q \in H} ||x - q||^2 = ||x||^2 - \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 = ||x||^2 - \sum_{k=1}^{n} |\langle x, \phi_n \rangle|^2$$

y se alcanza cuando q es la suma parcial de la serie $s_n := \sum_{k=1}^{n} c_k \phi_k$.

Definamos $g_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \phi_k$. Calculamos $\|x - g_n\|^2$

$$\langle x - g_n, x - g_n \rangle = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 \|\phi_k\|^2 + \sum_{k=1}^{n} |a_k - c_k|^2 \|\phi_k\|^2.$$

Teorema

Sea H el subespacio lineal de $\mathbb{H}$ generado por los vectores $\{\phi_1, \phi_2 \dots, \phi_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, i.e., $H = \operatorname{span}(\phi_1, \phi_2 \dots, \phi_n)$. Entonces

$$\min_{q \in H} ||x - q||^2 = ||x||^2 - \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 = ||x||^2 - \sum_{k=1}^{n} |\langle x, \phi_n \rangle|^2$$

y se alcanza cuando q es la suma parcial de la serie $s_n := \sum_{k=1}^{n} c_k \phi_k$.

Definamos $g_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \phi_k$. Calculamos $\|x - g_n\|^2$

$$\langle x - g_n, x - g_n \rangle = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 \|\phi_k\|^2 + \sum_{k=1}^{n} |a_k - c_k|^2 \|\phi_k\|^2.$$

$\|x - g_n\|^2$ es mínimo $\iff a_k = c_k \ \forall k \in \mathbb{N}$, i.e., $g_n = s_n$.

$$
\begin{aligned}
\|x-g_n\|^2 = & \left\langle x-\sum_{k=1}^{n} a_k, x-\sum_{m=1}^{n} a_m\phi_k \right\rangle \\
= & \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n}(\overline{a_k}c_k + a_k\overline{c_k}) + \sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{n} a_k\overline{a_m}\langle\phi_k,\phi_m\rangle \\
= & \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n}(\overline{a_k}c_k + a_k\overline{c_k}) + \sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{n} a_k\overline{a_m}\delta_{k,m} \\
= & \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 + \sum_{k=1}^{n}|a_k-c_k|^2.
\end{aligned}
$$

donde hemos usado la ortogonalidad de $(\phi_n)_n$ y

$$
|a_k-c_k|^2 = (a_k-c_k)(\overline{a_k}-\overline{c_k}) = |a_k|^2+|c_k|^2-\left(\overline{a_k}c_k+a_k\overline{c_k}\right)
$$

Como corolario del Teorema tenemos que

$$I_n = \|x - s_n\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 \geq 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Como corolario del Teorema tenemos que

$$I_n = \|x - s_n\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 \geq 0, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow$$

Luego se tiene la Desigualdad de Bessel

$$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \leq \|x\|^2} \quad \Rightarrow$$

Como corolario del Teorema tenemos que

$$I_n = \|x - s_n\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 \geq 0, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow$$

Luego se tiene la Desigualdad de Bessel

$$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \leq \|x\|^2} \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 < +\infty \Rightarrow$$

Como corolario del Teorema tenemos que

$$I_n = \|x - s_n\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 \geq 0, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow$$

Luego se tiene la Desigualdad de Bessel

$$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \leq \|x\|^2} \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 < +\infty \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} |c_n| = 0.$$

Como corolario del Teorema tenemos que

$$I_n = \|x - s_n\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 \geq 0, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \Rightarrow$$

Luego se tiene la Desigualdad de Bessel

$$\boxed{\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 \leq \|x\|^2} \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 < +\infty \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} |c_n| = 0.$$

La serie de Fourier converge a x (en norma) $\Leftrightarrow$

$$\boxed{\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, \phi_n\rangle|^2}$$

Esta igualdad se denomina comúnmente **igualdad de Parseval** y es, en general, muy complicada de comprobar en la práctica.

Definición

Se dice que un sistema de vectores l.i. $(\phi_n)_n$ *es completo en* $\mathbb{X} \subset \mathbb{H}$ *si* $\forall x \in \mathbb{X} \subset \mathbb{H}$ *y* $\forall \epsilon > 0$ *existe una combinación lineal* l_n,

$$l_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \phi_k \quad \textit{tal que} \quad \|x - l_n\| < \epsilon\,.$$

En otras palabras: $\forall x \in \mathbb{X} \subset \mathbb{H}$ se puede **aproximar en norma tanto como se quiera** mediante alguna combinación finita de vectores del sistema $(\phi_n)_n$.

Definición

Un sistema ortogonal (ortonormal) completo de $\mathbb{X} \subset \mathbb{H}$ *se denomina base ortogonal (ortonormal) de* $\mathbb{X} \subset \mathbb{H}$.

Ejemplos: Los sist. $(e_k)_k$, $e_k = \delta_{i,k}$ son bases completas de $\mathbb{C}^n$ y ℓ^2.

Teorema

Sea $\mathbb{H}$ un espacio de Hilbert y sea el sistema ortonormal de vectores $(\phi_n)_{n=1}^{\infty}$ de $\mathbb{H}$. Las siguientes condiciones son equivalentes:

1. $(\phi_n)_n$ *es completo en* $\mathbb{X} \subset \mathbb{H}$.
2. *Para todo* $x \in \mathbb{X} \subset \mathbb{H}$, $x = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \langle x, \phi_k \rangle \phi_k$.
3. *Para todo* $x \in \mathbb{X} \subset \mathbb{H}$, *se cumple la igualdad de Parseval*
$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, \phi_k \rangle|^2.$$
4. *Si* $\langle x, \phi_k \rangle = 0$ *para todo* $k \in \mathbb{N}$ *entonces* $x = 0$.

La equivalencia entre 1 y 2, así como las implicaciones $2 \to 3 \to 4$, son ciertas para cualquier espacio euclídeo (no neces. completo).

Corolario

Sea el sistema ortonormal completo $(\phi_n)_n$ y sean $x, y \in \mathbb{X} \subset \mathbb{H}$ tales que $\langle x, \phi_k \rangle = \langle y, \phi_k \rangle$ para todo $k \in \mathbb{N}$, entonces $x = y$.

En otras palabras, dos elementos de $\mathbb{H}$ con iguales coeficientes de Fourier son iguales, por tanto cualquier vector de $\mathbb{H}$ queda biunívocamente determinado por sus coeficientes de Fourier.

Corolario

Sea el sistema ortonormal completo $(\phi_n)_n$ y sean $x, y \in \mathbb{X} \subset \mathbb{H}$ tales que $\langle x, \phi_k \rangle = \langle y, \phi_k \rangle$ para todo $k \in \mathbb{N}$, entonces $x = y$.

En otras palabras, dos elementos de $\mathbb{H}$ con iguales coeficientes de Fourier son iguales, por tanto cualquier vector de $\mathbb{H}$ queda biunívocamente determinado por sus coeficientes de Fourier.

Definición

Se dice que un sistema ortonormal $(\phi_n)_n$ es cerrado en un espacio euclídeo $\mathbb{E}$ si para todo vector $x \in \mathbb{E}$ se cumple la igualdad de Parseval

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\langle x, \phi_k \rangle|^2 = \|x\|^2.$$

Cosecuencia: $(\phi_n)_n$ es completo en $\mathbb{H} \Leftrightarrow (\phi_n)_n$ es cerrado en $\mathbb{H}$.

Teorema

Todo espacio de Hilbert $\mathbb{H}$ *separable tiene una base ortonormal.*

Teorema

Todo espacio de Hilbert $\mathbb{H}$ separable tiene una base ortonormal.

Recordemos que $\mathrm{span}\,(\phi_1, \phi_2, \dots)$ es el conjunto de todas las combinaciones finitas de los vectores $\phi_1, \phi_2, \dots$.

Teorema

Todo espacio de Hilbert $\mathbb{H}$ separable tiene una base ortonormal.

Recordemos que $\mathrm{span}\,(\phi_1, \phi_2, \dots)$ es el conjunto de todas las combinaciones finitas de los vectores $\phi_1, \phi_2, \dots$.

① $\mathbb{H}$ es separable $\Rightarrow$ $\exists(\phi_n)_n$ denso en $\mathbb{H}$.

Teorema

Todo espacio de Hilbert $\mathbb{H}$ separable tiene una base ortonormal.

Recordemos que $\operatorname{span}(\phi_1, \phi_2, \dots)$ es el conjunto de todas las combinaciones finitas de los vectores $\phi_1, \phi_2, \dots$.

① $\mathbb{H}$ es separable $\Rightarrow \exists (\phi_n)_n$ denso en $\mathbb{H}$.

② Como $(\phi_n)_n$ es denso en $\mathbb{H} \Rightarrow \operatorname{span}(\phi_1, \phi_2, \dots)$ es denso en $\mathbb{H}$

Teorema

Todo espacio de Hilbert $\mathbb{H}$ separable tiene una base ortonormal.

Recordemos que $\operatorname{span}(\phi_1, \phi_2, \dots)$ es el conjunto de todas las combinaciones finitas de los vectores $\phi_1, \phi_2, \dots$.

① $\mathbb{H}$ es separable $\Rightarrow \exists (\phi_n)_n$ denso en $\mathbb{H}$.

② Como $(\phi_n)_n$ es denso en $\mathbb{H} \Rightarrow \operatorname{span}(\phi_1, \phi_2, \dots)$ es denso en $\mathbb{H}$

③ De $(\phi_n)_n$ eliminamos los vectores ϕ_k que se pueden obtener como combinación lineal de los anteriores $\Rightarrow (\phi_{n_k})_k$ son linealmente independiente.

Teorema

Todo espacio de Hilbert $\mathbb{H}$ separable tiene una base ortonormal.

Recordemos que $\operatorname{span}(\phi_1, \phi_2, \dots)$ es el conjunto de todas las combinaciones finitas de los vectores $\phi_1, \phi_2, \dots$.

① $\mathbb{H}$ es separable $\Rightarrow \exists(\phi_n)_n$ denso en $\mathbb{H}$.

② Como $(\phi_n)_n$ es denso en $\mathbb{H} \Rightarrow \operatorname{span}(\phi_1, \phi_2, \dots)$ es denso en $\mathbb{H}$

③ De $(\phi_n)_n$ eliminamos los vectores ϕ_k que se pueden obtener como combinación lineal de los anteriores $\Rightarrow (\phi_{n_k})_k$ son linealmente independiente.

④ $\operatorname{span}(\phi_{n_1}, \phi_{n_2}, \dots) = \operatorname{span}(\phi_1, \phi_2, \dots) \Rightarrow \operatorname{span}(\phi_{n_1}, \phi_{n_2}, \dots)$ es denso en $\mathbb{H} \Rightarrow$ es una base completa de $\mathbb{H}$.

Teorema

Todo espacio de Hilbert $\mathbb{H}$ separable tiene una base ortonormal.

Recordemos que $\operatorname{span}(\phi_1, \phi_2, \dots)$ es el conjunto de todas las combinaciones finitas de los vectores $\phi_1, \phi_2, \dots$.

① $\mathbb{H}$ es separable $\Rightarrow \exists(\phi_n)_n$ denso en $\mathbb{H}$.

② Como $(\phi_n)_n$ es denso en $\mathbb{H} \Rightarrow \operatorname{span}(\phi_1, \phi_2, \dots)$ es denso en $\mathbb{H}$

③ De $(\phi_n)_n$ eliminamos los vectores ϕ_k que se pueden obtener como combinación lineal de los anteriores $\Rightarrow (\phi_{n_k})_k$ son linealmente independiente.

④ $\operatorname{span}(\phi_{n_1}, \phi_{n_2}, \dots) = \operatorname{span}(\phi_1, \phi_2, \dots) \Rightarrow \operatorname{span}(\phi_{n_1}, \phi_{n_2}, \dots)$ es denso en $\mathbb{H} \Rightarrow$ es una base completa de $\mathbb{H}$.

⑤ Usamos Gram-Schmidt $\Rightarrow (\psi_k)_k$ ortonormales, $\operatorname{span}(\psi_1, \psi_2, \dots) = \operatorname{span}(\phi_{n_1}, \phi_{n_2}, \dots) \Rightarrow (\psi_k)_k$ es una base ortonormal de $\mathbb{H}$.

Teorema

Todo espacio de Hilbert $\mathbb{H}$ separable tiene una base ortonormal.

Recordemos que $\mathrm{span}\,(\phi_1, \phi_2, \dots)$ es el conjunto de todas las combinaciones finitas de los vectores $\phi_1, \phi_2, \dots$.

① $\mathbb{H}$ es separable $\Rightarrow \exists(\phi_n)_n$ denso en $\mathbb{H}$.

② Como $(\phi_n)_n$ es denso en $\mathbb{H} \Rightarrow \mathrm{span}\,(\phi_1, \phi_2, \dots)$ es denso en $\mathbb{H}$

③ De $(\phi_n)_n$ eliminamos los vectores ϕ_k que se pueden obtener como combinación lineal de los anteriores $\Rightarrow (\phi_{n_k})_k$ son linealmente independiente.

④ $\mathrm{span}\,(\phi_{n_1}, \phi_{n_2}, \dots) = \mathrm{span}\,(\phi_1, \phi_2, \dots) \Rightarrow \mathrm{span}\,(\phi_{n_1}, \phi_{n_2}, \dots)$ es denso en $\mathbb{H} \Rightarrow$ es una base completa de $\mathbb{H}$.

⑤ Usamos Gram-Schmidt $\Rightarrow (\psi_k)_k$ ortonormales, $\mathrm{span}\,(\psi_1, \psi_2, \dots) = \mathrm{span}\,(\phi_{n_1}, \phi_{n_2}, \dots) \Rightarrow (\psi_k)_k$ es una base ortonormal de $\mathbb{H}$.

Este teorema se puede generalizar a cualquier esp. euc. separable.

$\forall x \in \mathbb{H}$ existe su serie de Fourier ¿y el recíproco?

$\forall x \in \mathbb{H}$ existe su serie de Fourier ¿y el recíproco?

Teorema (Riesz-Fischer)

Sea $(\phi_n)_n$ *un sistema ortonormal en un espacio de Hilbert* $\mathbb{H}$ *y sean los números* $c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$ *tales que* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 < +\infty$. *Entonces, existe un elemento* $x \in \mathbb{H}$ *cuyos coeficientes de Fourier son precisamente los números* $c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$, *i.e.,*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 = \|x\|^2, \qquad c_n = \langle x, \phi_n \rangle.$$

Definición

Una aplicación U entre dos espacios de Hilbert $\mathbb{H}$ y $\mathbb{H}^*$ se denomina unitaria si U es lineal, biyectiva y preserva el producto escalar, i.e.[a]*,*

$$\langle x, y \rangle = \langle Ux, Uy \rangle_* = \langle x^*, y^* \rangle_*.$$

Los espacios $\mathbb{H}$ y $\mathbb{H}^*$ son isomorfos si existe una aplicación unitaria U $U : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}^*$ tal que $x^* = Ux$, donde $x \in \mathbb{H}$ y $x^* \in \mathbb{H}^*$.

[a] Se entiende que $\langle \cdot, \cdot \rangle_*$ denota el producto escalar en $\mathbb{H}^*$ que no tiene por que ser el mismo que en $\mathbb{H}$.

Definición

Una aplicación U entre dos espacios de Hilbert $\mathbb{H}$ y $\mathbb{H}^*$ se denomina unitaria si U es lineal, biyectiva y preserva el producto escalar, i.e.[a],

$$\langle x, y\rangle = \langle Ux, Uy\rangle_* = \langle x^*, y^*\rangle_*.$$

Los espacios $\mathbb{H}$ y $\mathbb{H}^*$ son isomorfos si existe una aplicación unitaria U $U : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{H}^*$ tal que $x^* = Ux$, donde $x \in \mathbb{H}$ y $x^* \in \mathbb{H}^*$.

[a] Se entiende que $\langle\cdot,\cdot\rangle_*$ denota el producto escalar en $\mathbb{H}^*$ que no tiene por que ser el mismo que en $\mathbb{H}$.

Teorema (del isomorfismo)

Cualquier espacio de Hilbert separable $\mathbb{H}$ es isomorfo a $\mathbb{C}^n$ o a ℓ^2.

Definición

Sea $M \subset \mathbb{H}$ un subespacio[a] *cerrado del espacio de Hilbert $\mathbb{H}$. Denominaremos complemento ortogonal de M, y lo denotaremos por $M^\perp$, al conjunto*

$$M^\perp = \{x \in \mathbb{H};\ \langle x, y\rangle = 0,\ \forall y \in M\}.$$

[a] Como en el caso de los espacios normados M es un subespacio *lineal* de $\mathbb{H}$.

Definición

Sea $M \subset \mathbb{H}$ un subespacio[a] *cerrado del espacio de Hilbert $\mathbb{H}$. Denominaremos complemento ortogonal de M, y lo denotaremos por $M^\perp$, al conjunto*

$$M^\perp = \{x \in \mathbb{H};\ \langle x, y\rangle = 0,\ \forall y \in M\}.$$

[a] Como en el caso de los espacios normados M es un subespacio *lineal* de $\mathbb{H}$.

Ejercicio

Prueba que cualquiera sea $M \subset \mathbb{H}$ subespacio lineal cerrado del espacio de Hilbert $\mathbb{E}$, $M^\perp$ es un subespacio lineal cerrado de $\mathbb{E}$.

Definición

Sea $M \subset \mathbb{H}$ un subespacio[a] *cerrado del espacio de Hilbert $\mathbb{H}$. Denominaremos complemento ortogonal de M, y lo denotaremos por $M^{\perp}$, al conjunto*

$$M^{\perp} = \{x \in \mathbb{H};\ \langle x, y\rangle = 0,\ \forall y \in M\}.$$

[a] Como en el caso de los espacios normados M es un subespacio *lineal* de $\mathbb{H}$.

Ejercicio

Prueba que cualquiera sea $M \subset \mathbb{H}$ subespacio lineal cerrado del espacio de Hilbert $\mathbb{E}$, $M^{\perp}$ es un subespacio lineal cerrado de $\mathbb{E}$.

Teorema

Sea $M \subset \mathbb{H}$ un subespacio cerrado del espacio de Hilbert $\mathbb{H}$ y $M^{\perp}$ su complemento ortogonal. Entonces, todo vector $x \in \mathbb{H}$ admite una única representación de la forma $x = y + y^{\perp}$ donde $y \in M$ e $y^{\perp} \in M^{\perp}$.

▶Si $\forall x \in \mathbb{H}$ se puede escribir en la forma $x = y + y^{\perp}$ donde $y \in M$ e $y^{\perp} \in M^{\perp}$, entonces se dice que M es suma directa de M y $M^{\perp}$ y se escribe

$$\boxed{\mathbb{H} = M \oplus M^{\perp}}$$

►Si $\forall x \in \mathbb{H}$ se puede escribir en la forma $x = y + y^{\perp}$ donde $y \in M$ e $y^{\perp} \in M^{\perp}$, entonces se dice que M es suma directa de M y $M^{\perp}$ y se escribe

$$\boxed{\mathbb{H} = M \oplus M^{\perp}}$$

►La noción de suma directa se puede extender al caso de un número finito o contable de subespacios M_1, M_2, etc.

▶Si $\forall x \in \mathbb{H}$ se puede escribir en la forma $x = y + y^{\perp}$ donde $y \in M$ e $y^{\perp} \in M^{\perp}$, entonces se dice que M es suma directa de M y $M^{\perp}$ y se escribe

$$\boxed{\mathbb{H} = M \oplus M^{\perp}}$$

▶La noción de suma directa se puede extender al caso de un número finito o contable de subespacios M_1, M_2, etc.

▶Del teorema anterior se sigue que $(M^{\perp})^{\perp} = M$.

▶Si $\forall x \in \mathbb{H}$ se puede escribir en la forma $x = y + y^{\perp}$ donde $y \in M$ e $y^{\perp} \in M^{\perp}$, entonces se dice que M es suma directa de M y $M^{\perp}$ y se escribe

$$\boxed{\mathbb{H} = M \oplus M^{\perp}}$$

▶La noción de suma directa se puede extender al caso de un número finito o contable de subespacios M_1, M_2, etc.

▶Del teorema anterior se sigue que $(M^{\perp})^{\perp} = M$.

Teorema (de la proyección ortogonal)

Sea $\mathbb{H}$ un espacio de Hilbert y sea $M \subset \mathbb{H}$ un espacio cerrado generado por ciertos vectores de M, i.e., $M = \operatorname{span}(y_1, \dots, y_p)$ y sea x un vector de $\mathbb{H}$ dado. Entonces existe un **único** *$y \in M$ tal que $\|x - y\| \leq \|x - m\|$ para todo $m \in M$. Además $y \in M$* **si y sólo si** *$\langle x - y, m\rangle = 0$, para todo $m \in M$.*

▶Si $\forall x \in \mathbb{H}$ se puede escribir en la forma $x = y + y^{\perp}$ donde $y \in M$ e $y^{\perp} \in M^{\perp}$, entonces se dice que M es suma directa de M y $M^{\perp}$ y se escribe

$$\boxed{\mathbb{H} = M \oplus M^{\perp}}$$

▶La noción de suma directa se puede extender al caso de un número finito o contable de subespacios M_1, M_2, etc.

▶Del teorema anterior se sigue que $(M^{\perp})^{\perp} = M$.

Teorema (de la proyección ortogonal)

Sea $\mathbb{H}$ un espacio de Hilbert y sea $M \subset \mathbb{H}$ un espacio cerrado generado por ciertos vectores de M, i.e., $M = \operatorname{span}(y_1, \dots, y_p)$ y sea x un vector de $\mathbb{H}$ dado. Entonces existe un **único** *$y \in M$ tal que $\|x - y\| \leq \|x - m\|$ para todo $m \in M$. Además $y \in M$* **si y sólo si** *$\langle x - y, m \rangle = 0$, para todo $m \in M$.*

$$\|a + b\|^2 + \|a - b\|^2 = 2(\|a\|^2 + \|b\|^2)$$

El teorema anterior nos dice que el $y \in M = \operatorname{span}(y_1, \ldots, y_p)$ más cercano a un vector $x \in \mathbb{H}$ dado $\Rightarrow$

$$\min \left\| x - \sum_{k=1}^{p} \alpha_k y_k \right\|$$

se alcanza cuando $x - y$ es $\perp$ a cada uno de los y_k, $k = 1, \ldots, p$. Luego

$$\left\langle x - \sum_{k=1}^{p} \alpha_k y_k, y_j \right\rangle = 0, \quad \forall j = 1, \ldots, p \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\sum_{j=1}^{p} \langle y_j, y_k \rangle \alpha_j = \langle x, y_k \rangle, \quad k = 1, \ldots, p}$$

La matriz de este sistema, conocido como *sistema normal*, es la matriz de Gram de los vectores $y_1, \ldots, y_p$ (Teorema de Gram-Schmidt).

Sea $\delta = \text{mín}\,\|x-y\| \quad \Rightarrow \quad \delta^2 = \|x-y\|^2 = \langle x-y, x-y\rangle = \langle x-y, x\rangle$

Sea $\delta = \min \|x - y\| \quad \Rightarrow \quad \delta^2 = \|x - y\|^2 = \langle x - y, x - y\rangle = \langle x - y, x\rangle$

$$\sum_{j=1}^{p} \langle y_j, x\rangle \alpha_j + \delta^2 = \langle x, x\rangle$$

$$\sum_{j=1}^{p} \langle y_j, y_k\rangle \alpha_j = \langle x, y_k\rangle, \qquad\qquad k = 1, \ldots, p$$

Sea $\delta = \min \|x - y\| \quad \Rightarrow \quad \delta^2 = \|x - y\|^2 = \langle x - y, x - y\rangle = \langle x - y, x\rangle$

$$\sum_{j=1}^{p} \langle y_j, x\rangle \alpha_j + \delta^2 = \langle x, x\rangle$$
$$\sum_{j=1}^{p} \langle y_j, y_k\rangle \alpha_j = \langle x, y_k\rangle, \qquad\qquad k = 1, \ldots, p$$

$$\begin{pmatrix} \langle y_1, y_1\rangle & \cdots & \langle y_p, y_1\rangle & \langle x, y_1\rangle & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \langle y_1, y_p\rangle & \cdots & \langle y_p, y_p\rangle & \langle y_p, y_p\rangle & 0 \\ \langle y_1, x\rangle & \cdots & \langle y_p, x\rangle & \langle y_p, x\rangle & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_p \\ \delta^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle x, y_1\rangle \\ \vdots \\ \langle x, y_p\rangle \\ \langle x, x\rangle \end{pmatrix}$$

Espacios de Hilbert: Proyecciones ortogonales

Sea $\delta = \text{mín}\,\|x-y\| \quad \Rightarrow \quad \delta^2 = \|x-y\|^2 = \langle x-y, x-y\rangle = \langle x-y, x\rangle$

$$\sum_{j=1}^{p} \langle y_j, x\rangle \alpha_j + \delta^2 = \langle x, x\rangle$$
$$\sum_{j=1}^{p} \langle y_j, y_k\rangle \alpha_j = \langle x, y_k\rangle, \qquad\qquad k = 1, \ldots, p$$

$$\begin{pmatrix} \langle y_1, y_1\rangle & \cdots & \langle y_p, y_1\rangle & \langle x, y_1\rangle & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \langle y_1, y_p\rangle & \cdots & \langle y_p, y_p\rangle & \langle y_p, y_p\rangle & 0 \\ \langle y_1, x\rangle & \cdots & \langle y_p, x\rangle & \langle y_p, x\rangle & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_p \\ \delta^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle x, y_1\rangle \\ \vdots \\ \langle x, y_p\rangle \\ \langle x, x\rangle \end{pmatrix}$$

$$\delta^2 = \frac{\Delta_{p+1}(y_1, \ldots, y_p, x)}{\Delta_p(y_1, \ldots, y_p)},$$

Como aplicación de lo anterior veamos el siguiente:

Problema: Sean m números reales $x_1, \ldots, x_m$ y sea una matriz $m \times n$, W con $n < m$ cuyas columnas son linealmente independientes. Encontrar el vector $z \in \mathbb{R}^n$ tal que la norma euclídea $\|x - Wz\|$ sea mínima, i.e., queremos encontrar el mejor estimador lineal de $x \in \mathbb{R}^m$.

Definición

Un funcional lineal es una aplicación lineal $f : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{K}$ *con* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ *o* $\mathbb{R}$.

Teorema (Riesz)

Cualquier funcional lineal acotado $f : \mathbb{H} \mapsto \mathbb{K}$ *(*$\mathbb{K} = \mathbb{C}$ *o* $\mathbb{R}$*) se puede representar en términos de un producto escalar, i.e.,*

$$f(x) = \langle x, z \rangle,$$

donde z *depende de* f *y esta unívocamente determinado por* f *y su norma satisface la ecuación*

$$\|z\| = \|f\|.$$