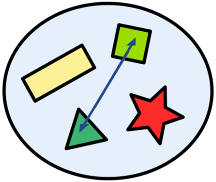
Espacios normados

R. Álvarez-Nodarse

Universidad de Sevilla



Definición

Sea V un conjunto de elementos (vectores) sobre el cual están definidas las operaciones suma x"$+$"y *de dos elementos $x, y \in V$ y la* multiplicación α"$\cdot$"x *de un escalar $\alpha \in \mathbb{R}$ por un vector.*

Definición

Sea V un conjunto de elementos (vectores) sobre el cual están definidas las operaciones suma $x``+"y$ *de dos elementos $x, y \in V$ y la* multiplicación $\alpha``\cdot"x$ *de un escalar $\alpha \in \mathbb{R}$ por un vector. V* **es un espacio vectorial** *si*

1. *$\forall x, y \in V$, el vector suma, $w = x + y \in V$ y se cumple que:*
    1. $x + y = y + x$
    2. $(x + y) + z = x + (y + z)$
    3. *Existe un elemento "nulo" de V, tal que $x + 0 = 0 + x = x$*
    4. *Cualquiera sea el vector x de V, existe el elemento $(-x)$ "opuesto" a x, tal que $x + (-x) = (-x) + x = 0$.*

Definición

Sea V un conjunto de elementos (vectores) sobre el cual están definidas las operaciones suma x"+"y *de dos elementos $x, y \in V$ y la* multiplicación α"·"x *de un escalar $\alpha \in \mathbb{R}$ por un vector. V* **es un espacio vectorial** *si*

1. $\forall x, y \in V$, *el vector suma,* $w = x + y \in V$ *y se cumple que:*
   1. $x + y = y + x$
   2. $(x + y) + z = x + (y + z)$
   3. *Existe un elemento "nulo" de V, tal que $x + 0 = 0 + x = x$*
   4. *Cualquiera sea el vector x de V, existe el elemento $(-x)$ "opuesto" a x, tal que $x + (-x) = (-x) + x = 0$.*

2. $\forall x \in V$, *el vector* $w = \alpha \cdot x \in V$ *y se cumple que:*
   1. $\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$
   2. $(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$
   3. $\alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha\beta) \cdot x$
   4. $1 \cdot x = x$

- El conjunto de los vectores de $\mathbb{R}^n$ cuando la suma de dos vectores y la multiplicación por un escalar es la estándard.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}, \qquad \alpha \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{pmatrix}$$

▶ El conjunto de los vectores de $\mathbb{R}^n$ cuando la suma de dos vectores y la multiplicación por un escalar es la estándard.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}, \qquad \alpha \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{pmatrix}$$

▶ El conjunto $\mathbb{R}^{m\times n}$ de las matrices $m \times n$ cuando la suma de dos matrices y la multiplicación por un escalar es la estándard.

▶ El conjunto de los vectores de $\mathbb{R}^n$ cuando la suma de dos vectores y la multiplicación por un escalar es la estándard.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}, \qquad \alpha \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{pmatrix}$$

▶El conjunto $\mathbb{R}^{m\times n}$ de las matrices $m \times n$ cuando la suma de dos matrices y la multiplicación por un escalar es la estándard.

▶El espacio de las funciones continuas $C_{[a,b]}$.

Definición

Sea V un espacio vectorial. Diremos que un subconjunto H de elementos de V es un subespacio vectorial de V si H es a su vez un espacio vectorial respecto a las mismas operaciones suma "$+$" *y* multiplicación "$\cdot$" *que V.*

Definición

Sea V un espacio vectorial. Diremos que un subconjunto H de elementos de V es un subespacio vectorial de V si H es a su vez un espacio vectorial respecto a las mismas operaciones suma "$+$" *y* multiplicación "$\cdot$" *que V.*

Ejemplos.

1. Dado un espacio vectorial V, son subespacios vectoriales "triviales" los subespacios $H = \{0\}$ (conjunto que tiene como único elemento, el nulo) y $H = V$ (el mismo espacio vectorial).

Definición

Sea V un espacio vectorial. Diremos que un subconjunto H de elementos de V es un subespacio vectorial de V si H es a su vez un espacio vectorial respecto a las mismas operaciones suma "$+$" *y* multiplicación "$\cdot$" *que V.*

Ejemplos.

1. Dado un espacio vectorial V, son subespacios vectoriales "triviales" los subespacios $H = \{0\}$ (conjunto que tiene como único elemento, el nulo) y $H = V$ (el mismo espacio vectorial).
2. Sea $k \leq n$. En conjunto $V = \{(x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$.

Definición

Sea V un espacio vectorial. Diremos que un subconjunto H de elementos de V es un subespacio vectorial de V si H es a su vez un espacio vectorial respecto a las mismas operaciones suma "$+$" *y* multiplicación "$\cdot$" *que V.*

Ejemplos.

1. Dado un espacio vectorial V, son subespacios vectoriales "triviales" los subespacios $H = \{0\}$ (conjunto que tiene como único elemento, el nulo) y $H = V$ (el mismo espacio vectorial).
2. Sea $k \leq n$. En conjunto $V = \{(x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$.
3. El conjunto de vectores $x = (x_1, \dots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$ tales que para todos $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$, $\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n = 0$.

Teorema

Un subconjunto H de elementos de V es un subespacio vectorial de V si y sólo si se cumple que

- *Para todos x e y*, vectores *de H y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ el vector $w = \alpha x + \beta y$ también es un vector de H.*

Teorema

Un subconjunto H de elementos de V es un subespacio vectorial de V si y sólo si se cumple que

- *Para todos x e y,* vectores *de H y α, $\beta \in \mathbb{R}$ el vector $w = \alpha x + \beta y$ también es un vector de H.*

Al vector $v = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_p v_p, \quad x_1, \ldots, x_p \in \mathbb{R}$, se le denomina combinación lineal de los vectores $v_1, v_2, ..., v_p$.

Sea $\mathrm{span}\,(v_1, v_2, ..., v_p)$ el conjunto de todas las combinaciones lineales de los vectores $v_1, v_2, ..., v_p \in V$

Teorema

Un subconjunto H de elementos de V es un subespacio vectorial de V si y sólo si se cumple que

- *Para todos x e y*, vectores *de H y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ el vector $w = \alpha x + \beta y$ también es un vector de H.*

Al vector $v = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_p v_p, \quad x_1, \ldots, x_p \in \mathbb{R}$, se le denomina combinación lineal de los vectores $v_1, v_2, ..., v_p$.

Sea $\mathrm{span}\,(v_1, v_2, ..., v_p)$ el conjunto de todas las combinaciones lineales de los vectores $v_1, v_2, ..., v_p \in V$

Teorema

$\mathrm{span}\,(v_1, v_2, ..., v_p)$ *es un subespacio vectorial de V.*

Dicho subespacio vectorial comúnmente se denomina subespacio generado por los vectores $v_1, v_2, ..., v_p$.

Definición

Un conjunto de vectores $v_1, v_2, ..., v_p$ *de un espacio vectorial* V *se denomina* **linealmente independiente** *si la ecuación vectorial*

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_p v_p = 0, \quad x_1, x_2, \cdots, x_p \in \mathbb{R}$$

tiene como única solución la trivial $x_1 = \cdots = x_p = 0$.

Definición

Un conjunto de vectores $v_1, v_2, ..., v_p$ *de un espacio vectorial* V *se denomina* **linealmente independiente** *si la ecuación vectorial*

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_p v_p = 0, \quad x_1, x_2, \cdots, x_p \in \mathbb{R}$$

tiene como única solución la trivial $x_1 = \cdots = x_p = 0$.

Definición

Un conjunto de vectores $v_1, v_2, ..., v_p$ *se denomina* **linealmente dependiente** *si existen* $x_1, x_2, \cdots, x_p \in \mathbb{R}$ *no todos iguales a cero tales que se verifique la ecuación vectorial*

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_p v_p = 0.$$

Definición

Sea H un subespacio vectorial del espacio vectorial V. El conjunto de vectores $B = \{b_1, b_2, ..., b_p\}$ de V es una base de H si

i) *B es un conjunto de vectores linealmente independientes*

ii) *$H = \mathrm{span}\,(b_1, b_2, ..., b_p)$, o sea, B genera a todo H.*

En particular si H coincide con V, entonces B es una base de todo el espacio vectorial V.

Definición

Sea H un subespacio vectorial del espacio vectorial V. El conjunto de vectores $B = \{b_1, b_2, ..., b_p\}$ de V es una base de H si

i) *B es un conjunto de vectores linealmente independientes*

ii) *$H = \mathrm{span}\,(b_1, b_2, ..., b_p)$, o sea, B genera a todo H.*

En particular si H coincide con V, entonces B es una base de todo el espacio vectorial V.

Ejemplo 1: Las n columnas $a_1, ..., a_n$ de una matriz invertible $n \times n$, son **li** y además $\mathbb{R}^n = \mathrm{span}\,(a_1, ..., a_n)$. Por tanto $B = a_1, ..., a_n$ es una base de $\mathbb{R}^n$.

Definición

Sea H un subespacio vectorial del espacio vectorial V. El conjunto de vectores $B = \{b_1, b_2, ..., b_p\}$ de V es una base de H si

i) *B es un conjunto de vectores linealmente independientes*

ii) *$H = \mathrm{span}\,(b_1, b_2, ..., b_p)$, o sea, B genera a todo H.*

En particular si H coincide con V, entonces B es una base de todo el espacio vectorial V.

Ejemplo 1: Las n columnas $a_1, ..., a_n$ de una matriz invertible $n \times n$, son **li** y además $\mathbb{R}^n = \mathrm{span}\,(a_1, ..., a_n)$. Por tanto $B = a_1, ..., a_n$ es una base de $\mathbb{R}^n$.

Si $A = I_n$, es la matriz identidad $n \times n$, las columnas $e_1, e_2, ..., e_n$ de la misma son la *base canónica* de $\mathbb{R}^n$.

Teorema

Si un espacio vectorial V tiene una base de n vectores $B = \{b_1, b_2, ..., b_n\}$, entonces cualquier conjunto con más de n vectores de V es linealmente dependiente. Además, si un espacio vectorial V tiene una base de n vectores $B = \{b_1, ..., b_n\}$, entonces cualquier otra base de V tendrá que tener n vectores de V.

Teorema

Si un espacio vectorial V tiene una base de n vectores $B = \{b_1, b_2, ..., b_n\}$, entonces cualquier conjunto con más de n vectores de V es linealmente dependiente. Además, si un espacio vectorial V tiene una base de n vectores $B = \{b_1, ..., b_n\}$, entonces cualquier otra base de V tendrá que tener n vectores de V.

El menor número de vectores linealmente independientes que generan un espacio vectorial es una propiedad intrínseca de dicho espacio y se denomina **dimensión del espacio vectorial**.

Teorema

Si un espacio vectorial V tiene una base de n vectores $B = \{b_1, b_2, ..., b_n\}$, entonces cualquier conjunto con más de n vectores de V es linealmente dependiente. Además, si un espacio vectorial V tiene una base de n vectores $B = \{b_1, ..., b_n\}$, entonces cualquier otra base de V tendrá que tener n vectores de V.

El menor número de vectores linealmente independientes que generan un espacio vectorial es una propiedad intrínseca de dicho espacio y se denomina **dimensión del espacio vectorial**.

▶Un espacio vectorial V es de dimensión finita n si V está generado por una base de n elementos en cuyo caso $\dim V = n$.

Teorema

Si un espacio vectorial V tiene una base de n vectores $B = \{b_1, b_2, ..., b_n\}$, entonces cualquier conjunto con más de n vectores de V es linealmente dependiente. Además, si un espacio vectorial V tiene una base de n vectores $B = \{b_1, ..., b_n\}$, entonces cualquier otra base de V tendrá que tener n vectores de V.

El menor número de vectores linealmente independientes que generan un espacio vectorial es una propiedad intrínseca de dicho espacio y se denomina **dimensión del espacio vectorial**.

▶Un espacio vectorial V es de dimensión finita n si V está generado por una base de n elementos en cuyo caso $\dim V = n$.

▶El espacio nulo $\{0\}$ tiene dimensión 0.

Teorema

Si un espacio vectorial V tiene una base de n vectores $B = \{b_1, b_2, ..., b_n\}$, entonces cualquier conjunto con más de n vectores de V es linealmente dependiente. Además, si un espacio vectorial V tiene una base de n vectores $B = \{b_1, ..., b_n\}$, entonces cualquier otra base de V tendrá que tener n vectores de V.

El menor número de vectores linealmente independientes que generan un espacio vectorial es una propiedad intrínseca de dicho espacio y se denomina **dimensión del espacio vectorial**.

▶Un espacio vectorial V es de dimensión finita n si V está generado por una base de n elementos en cuyo caso $\dim V = n$.

▶El espacio nulo $\{0\}$ tiene dimensión 0.

▶Si V no puede ser generado por una base finita, entonces V es de dimensión infinita: $\dim V = \infty$.

Teorema

Si un espacio vectorial V tiene una base de n vectores $B = \{b_1, b_2, ..., b_n\}$, entonces cualquier conjunto con más de n vectores de V es linealmente dependiente. Además, si un espacio vectorial V tiene una base de n vectores $B = \{b_1, ..., b_n\}$, entonces cualquier otra base de V tendrá que tener n vectores de V.

El menor número de vectores linealmente independientes que generan un espacio vectorial es una propiedad intrínseca de dicho espacio y se denomina **dimensión del espacio vectorial**.

▶Un espacio vectorial V es de dimensión finita n si V está generado por una base de n elementos en cuyo caso $\dim V = n$.

▶El espacio nulo $\{0\}$ tiene dimensión 0.

▶Si V no puede ser generado por una base finita, entonces V es de dimensión infinita: $\dim V = \infty$.

Ejemplos: $\dim \mathbb{R}^n = n, \quad \dim C_{[a,b]} = \infty$.

Espacios normados

$$\boxed{\|\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n\| \geq c\big(|\alpha_1| + \cdots + |\alpha_n|\big)}$$

Definición

Un espacio vectorial $\mathbb{X}$ se denomina **espacio normado** *si para todo $x \in \mathbb{X}$ existe un número real denominado norma, y que denotaremos por $\|x\|$, que cumple con las condiciones*

1. $\forall x \in \mathbb{X}$, $\|x\| \geq 0$ *y si* $\|x\| = 0$ *entonces* $x = 0$.
2. $\forall x \in \mathbb{X}$ *y* $\lambda \in \mathbb{R}$, $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$.
3. $\forall x, y \in \mathbb{X}$, *se tiene la des. triang.* $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Definición

Un espacio vectorial $\mathbb{X}$ *se denomina* **espacio normado** *si para todo* $x \in \mathbb{X}$ *existe un número real denominado norma, y que denotaremos por* $\|x\|$*, que cumple con las condiciones*

1. $\forall x \in \mathbb{X}$, $\|x\| \geq 0$ *y si* $\|x\| = 0$ *entonces* $x = 0$.
2. $\forall x \in \mathbb{X}$ *y* $\lambda \in \mathbb{R}$, $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$.
3. $\forall x, y \in \mathbb{X}$, *se tiene la des. triang.* $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Ejemplo

$\mathbb{X} = \mathbb{R}^n$ *con la norma* $\|x\| = \sqrt[p]{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p}$, $p = 2$ *es un espacio normado.*

La norma cuando $p = 2$ se denomina **norma euclídea**.

Definición

Un espacio vectorial $\mathbb{X}$ se denomina **espacio normado** *si para todo $x \in \mathbb{X}$ existe un número real denominado norma, y que denotaremos por $\|x\|$, que cumple con las condiciones*

1. $\forall x \in \mathbb{X}$, $\|x\| \geq 0$ *y si* $\|x\| = 0$ *entonces* $x = 0$.
2. $\forall x \in \mathbb{X}$ *y* $\lambda \in \mathbb{R}$, $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$.
3. $\forall x, y \in \mathbb{X}$, *se tiene la des. triang.* $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Ejemplo

$\mathbb{X} = \mathbb{R}^n$ *con la norma* $\|x\| = \sqrt[p]{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p}$, $p = 2$ *es un espacio normado.*

La norma cuando $p = 2$ se denomina **norma euclídea**. **¿y si $p \geq 1$?**

Si en un espacio normado $\mathbb{X}$ definimos $\rho(x, y) = \|x - y\|$, el par $(\mathbb{X}, \| \cdot \|)$ es espacio métrico, i.e.,

Todo espacio normado es un espacio métrico

A ρ se denomina *métrica inducida por la norma*.

¿Todo espacio métrico es normado? **NO**

Si en un espacio normado $\mathbb{X}$ definimos $\rho(x, y) = \|x - y\|$, el par $(\mathbb{X}, \| \cdot \|)$ es espacio métrico, i.e.,

Todo espacio normado es un espacio métrico

A ρ se denomina *métrica inducida por la norma*.

Lema

Sea $\mathbb{X}$ un espacio normado. Entonces, la métrica ρ inducida por la norma satisface las condiciones

1. $\rho(x + z, y + z) = \rho(x, y)$,
2. $\rho(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| \rho(x, y)$.

Si en un espacio normado $\mathbb{X}$ definimos $\rho(x, y) = \|x - y\|$, el par $(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$ es espacio métrico, i.e.,

Todo espacio normado es un espacio métrico

A ρ se denomina *métrica inducida por la norma*.

Lema

Sea $\mathbb{X}$ un espacio normado. Entonces, la métrica ρ inducida por la norma satisface las condiciones

1. $\rho(x + z, y + z) = \rho(x, y)$,
2. $\rho(\lambda x, \lambda y) = |\lambda|\rho(x, y)$.

Definición

Un espacio normado completo (en la métrica inducida por la norma) se denomina espacio de Banach.

Ejercicio: Probar que $\mathbb{R}^n$ es normado con la norma $\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p}$.

Ejercicio: Probar que $\mathbb{R}^n$ es normado con la norma $\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p}$.

1. Recordemos que para todos $u, v \geq 0$ y $1 \leq p < +\infty$ se tiene

$$(u+v)^p = \inf_{t\in(0,1)} \left\{ t^{1-p}u^p + (1-t)^{1-p}v^p; u, v \geq 0, 0 < t < 1 \right\}.$$

Ejercicio: Probar que $\mathbb{R}^n$ es normado con la norma $\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p}$.

1. Recordemos que para todos $u, v \geq 0$ y $1 \leq p < +\infty$ se tiene

$$(u+v)^p = \inf_{t\in(0,1)} \left\{ t^{1-p}u^p + (1-t)^{1-p}v^p; u, v \geq 0, 0 < t < 1 \right\}.$$

2. Usamos 1. $|x_i + y_i|^p \leq (|x_i| + |y_i|)^p = \cdots$

Así, en los espacios normados, como en los métricos, podemos definir la convergencia de sucesiones, sucesiones de Cauchy, etc.

Así, en los espacios normados, como en los métricos, podemos definir la convergencia de sucesiones, sucesiones de Cauchy, etc.

Definición

Una sucesión $(x_n)_n$ *de elementos de* $\mathbb{X}$ **es convergente**, *y lo denotaremos por* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, **si existe un x** $\in \mathbb{X}$ *t.q.* $\forall\epsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ *t.q.* $\forall n > N$, $\|x, x_n\| < \epsilon$. *En caso contrario diremos que* $(x_n)_n$ *es* **divergente**.

Así, en los espacios normados, como en los métricos, podemos definir la convergencia de sucesiones, sucesiones de Cauchy, etc.

Definición

Una sucesión $(x_n)_n$ de elementos de $\mathbb{X}$ **es convergente**, *y lo denotaremos por $\lim_{n\to\infty} x_n = x$,* **si existe un x** $\in \mathbb{X}$ *t.q.* $\forall\epsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ *t.q.* $\forall n > N$, $\|x, x_n\| < \epsilon$. *En caso contrario diremos que $(x_n)_n$ es* **divergente**.

Corolario: Si existe el límite es único.

Así, en los espacios normados, como en los métricos, podemos definir la convergencia de sucesiones, sucesiones de Cauchy, etc.

Definición

Una sucesión $(x_n)_n$ de elementos de $\mathbb{X}$ **es convergente**, *y lo denotaremos por $\lim_{n\to\infty} x_n = x$,* **si existe un x** $\in \mathbb{X}$ *t.q.* $\forall\epsilon > 0$, $\exists N \in \mathbb{N}$ *t.q.* $\forall n > N$, $\|x, x_n\| < \epsilon$. *En caso contrario diremos que $(x_n)_n$ es* **divergente**.

Corolario: Si existe el límite es único.

Ejercicio: Tanto la norma es una aplicación continua: Es decir, si $x_n \to x$ entonces $\|x_n\| \to \|x\|$.

Definición

Dada una sucesión $(x_n)_n \in \mathbb{X}$*, espacio normado, definiremos la sucesión de sumas parciales* $(s_n)_n$

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} x_k, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Si $s_n \to s \in \mathbb{X}$*,* $n \to \infty$*, la serie es convergente y* s *es su suma. Si converge la serie* $\sum_{k=1}^{n} \|x_k\|$*, diremos que la serie converge absolutamente.*

Definición

Dada una sucesión $(x_n)_n \in \mathbb{X}$*, espacio normado, definiremos la sucesión de sumas parciales* $(s_n)_n$

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} x_k, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Si $s_n \to s \in \mathbb{X}$, $n \to \infty$*, la serie es convergente y* s *es su suma. Si converge la serie* $\sum_{k=1}^{n} \|x_k\|$*, diremos que la serie converge absolutamente.*

Teorema

Sea $\mathbb{X}$ *un espacio de Banach (normado y completo). Entonces toda serie absolutamente convergente es convergente.*

Definición

Dada una sucesión $(x_n)_n \in \mathbb{X}$*, espacio normado, definiremos la sucesión de sumas parciales* $(s_n)_n$

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} x_k, \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Si $s_n \to s \in \mathbb{X}$, $n \to \infty$*, la serie es convergente y* s *es su suma. Si converge la serie* $\sum_{k=1}^{n} \|x_k\|$*, diremos que la serie converge absolutamente.*

Teorema

Sea $\mathbb{X}$ *un espacio de Banach (normado y completo). Entonces toda serie absolutamente convergente es convergente.*

Ejemplo

Prueba que si $\mathbb{X}$ *es un espacio normado, entonces toda serie absolutamente convergente es convergente si y sólo si* $\mathbb{X}$ *es completo.*

Definición

Sea $\mathbb{X}$ *un espacio normado y sea* M *un subespacio vectorial de* $\mathbb{X}$. *Si* M *es un espacio normado con la norma de* $\mathbb{X}$ *restringida a* M *se dice que* M *es un subespacio de* $\mathbb{X}$. *Si* M *es cerrado en* $\mathbb{X}$ *entonces se dice que es un subespacio cerrado.*

Definición

Sea $\mathbb{X}$ un espacio normado y sea M un subespacio vectorial de $\mathbb{X}$. Si M es un espacio normado con la norma de $\mathbb{X}$ restringida a M se dice que M es un subespacio de $\mathbb{X}$. Si M es cerrado en $\mathbb{X}$ entonces se dice que es un subespacio cerrado.

Definición

Sea $\mathbb{X}$ un espacio normado. Sea $(e_n)_n$ una sucesión de elementos de $\mathbb{X}$ tal que, para todo $x \in \mathbb{X}$, existe una única sucesión de escalares $(\alpha_n)_n$ tales que $\|x - (\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n)\| \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Dicha sucesión se denomina base de Schauder.

Definición

Sea $\mathbb{X}$ un espacio normado y sea M un subespacio vectorial de $\mathbb{X}$. Si M es un espacio normado con la norma de $\mathbb{X}$ restringida a M se dice que M es un subespacio de $\mathbb{X}$. Si M es cerrado en $\mathbb{X}$ entonces se dice que es un subespacio cerrado.

Definición

Sea $\mathbb{X}$ un espacio normado. Sea $(e_n)_n$ una sucesión de elementos de $\mathbb{X}$ tal que, para todo $x \in \mathbb{X}$, existe una única sucesión de escalares $(\alpha_n)_n$ tales que $\|x - (\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n)\| \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Dicha sucesión se denomina base de Schauder.

Ejemplo

Sea $\mathbb{X}$ el espacio l^p de las sucesiones y sea $(e_n)_n$ la sucesión $e_k = \delta_{i,k}$, i.e., la sucesión de vectores de l^p con 1 en la posición k y 0 en el resto. Probemos que dicha sucesión es una base de Schauder.

Proposición

Si un espacio normado $\mathbb{X}$ *tiene una base de Schauder, entonces es separable.*

Proposición

Si un espacio normado $\mathbb{X}$ tiene una base de Schauder, entonces es separable.

El recíproco no es cierto en general. Enflo en 1973 encontró un espacio de Banach, separable que no tiene ninguna base de Schauder.

Proposición

Si un espacio normado $\mathbb{X}$ tiene una base de Schauder, entonces es separable.

El recíproco no es cierto en general. Enflo en 1973 encontró un espacio de Banach, separable que no tiene ninguna base de Schauder.

Teorema

Sea $(\mathbb{X}, \|.\|)$ un espacio normado. Entonces existe un espacio de Banach $\widehat{\mathbb{X}}$ y una isometría A de $\mathbb{X}$ en $W \subset \widehat{\mathbb{X}}$, tal que W es denso en $\widehat{\mathbb{X}}$. Además, $\widehat{\mathbb{X}}$ es único excepto isometrías.

Espacios normados de dimensión finita

$$\boxed{\|\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n\| \geq c\big(|\alpha_1| + \cdots + |\alpha_n|\big)}$$

$$\boxed{\text{¿En cualquier norma } \|x_n - x\| \to 0?}$$

Lema (Lema técnico)

Sean n vectores cualesquiera $x_1, \ldots, x_n$ *linealmente independientes de un espacio normado* $\mathbb{X}$. *Entonces, existe un número real* $c > 0$ *tal que cuales quiera sean los escalares* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$,

$$\|\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n\| \geq c(|\alpha_1| + \cdots + |\alpha_n|). \qquad (*)$$

Demostración:

Lema (Lema técnico)

Sean n vectores cualesquiera $x_1, \ldots, x_n$ linealmente independientes de un espacio normado $\mathbb{X}$. Entonces, existe un número real $c > 0$ tal que cuales quiera sean los escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$,

$$\|\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n\| \geq c(|\alpha_1| + \cdots + |\alpha_n|). \qquad (*)$$

Demostración:

Lema (Lema técnico)

Sean n vectores cualesquiera $x_1, \ldots, x_n$ linealmente independientes de un espacio normado $\mathbb{X}$. Entonces, existe un número real $c > 0$ tal que cuales quiera sean los escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$,

$$\|\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n\| \geq c(|\alpha_1| + \cdots + |\alpha_n|). \qquad (*)$$

Demostración: **What a f..k! A virus?**

Lema (Lema técnico)

Sean n vectores cualesquiera $x_1, \ldots, x_n$ linealmente independientes de un espacio normado $\mathbb{X}$. Entonces, existe un número real $c > 0$ tal que cuales quiera sean los escalares $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$,

$$\|\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n\| \geq c(|\alpha_1| + \cdots + |\alpha_n|). \qquad (*)$$

Demostración: Sea $s = |\alpha_1| + \cdots + |\alpha_n|$. Si $s = 0$ el lema es trivial así que asumiremos $s > 0$. Dividiendo la igualdad (*) por s se sigue que la fórmula (*) es equivalente a probar que si $x_1, \ldots, x_n$ son linealmente independientes, entonces existe un número real $c > 0$ tal que cuales quiera sean los los escalares $\beta_1, \ldots, \beta_n$, con $\sum_{k=1}^n |\beta_k| = 1$

$$\|\beta_1 x_1 + \cdots + \beta_n x_n\| \geq c.$$

La prueba será por reducción al absurdo.

Prueba del Lema técnico

Entonces ha de existir (¿por qué?) una sucesión $(y_m)_m \subset \mathbb{X}$ tal que

$$y_m = \beta_1^{(m)} x_1 + \cdots + \beta_n^{(m)} x_n, \quad \sum_{k=1}^{n} |\beta_k^{(m)}| = 1, \text{ y } \|y_m\| \stackrel{m\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

De la condición $\sum_{k=1}^{n} |\beta_k^{(m)}| = 1$ se sigue que las n sucesiones numéricas $(\beta_k^{(m)})_m$, $k = 1, \ldots, n$, son acotadas.

Entonces ha de existir (¿por qué?) una sucesión $(y_m)_m \subset \mathbb{X}$ tal que

$$y_m = \beta_1^{(m)} x_1 + \cdots + \beta_n^{(m)} x_n, \quad \sum_{k=1}^{n} |\beta_k^{(m)}| = 1, \text{ y } \|y_m\| \xrightarrow{m\to\infty} 0.$$

De la condición $\sum_{k=1}^{n} |\beta_k^{(m)}| = 1$ se sigue que las n sucesiones numéricas $(\beta_k^{(m)})_m$, $k = 1, \ldots, n$, son acotadas.

Sea la sucesión $(\beta_1^{(m)})_m$ acotada, entonces por el T de B-W de ella se puede extraer una subsucesión convergente

Entonces ha de existir (¿por qué?) una sucesión $(y_m)_m \subset \mathbb{X}$ tal que

$$y_m = \beta_1^{(m)} x_1 + \cdots + \beta_n^{(m)} x_n, \quad \sum_{k=1}^{n} |\beta_k^{(m)}| = 1, \text{ y } \|y_m\| \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

De la condición $\sum_{k=1}^{n} |\beta_k^{(m)}| = 1$ se sigue que las n sucesiones numéricas $(\beta_k^{(m)})_m$, $k = 1, \ldots, n$, son acotadas.

Sea la sucesión $(\beta_1^{(m)})_m$ acotada, entonces por el T de B-W de ella se puede extraer una subsucesión convergente $\beta_1^{(m_j)} \overset{j\to\infty}{\longrightarrow} \beta_1$.

Escojamos de cada una de las sucesiones restantes $(\beta_k^{(m)})_m$, $k = 2, \ldots, n$, las subsucesiones definidas por los índices m_j.

Entonces ha de existir (¿por qué?) una sucesión $(y_m)_m \subset \mathbb{X}$ tal que

$$y_m = \beta_1^{(m)} x_1 + \cdots + \beta_n^{(m)} x_n, \quad \sum_{k=1}^{n} |\beta_k^{(m)}| = 1, \text{ y } \|y_m\| \stackrel{m\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

De la condición $\sum_{k=1}^{n} |\beta_k^{(m)}| = 1$ se sigue que las n sucesiones numéricas $(\beta_k^{(m)})_m$, $k = 1, \dots, n$, son acotadas.

Sea la sucesión $(\beta_1^{(m)})_m$ acotada, entonces por el T de B-W de ella se puede extraer una subsucesión convergente $\beta_1^{(m_j)} \stackrel{j\to\infty}{\longrightarrow} \beta_1$.

Escojamos de cada una de las sucesiones restantes $(\beta_k^{(m)})_m$, $k = 2, \dots, n$, las subsucesiones definidas por los índices m_j.

Entonces $(\beta_2^{(m_j)})_j$ es acotada y por B-W y podemos extraer una subsucesión convergente $\beta_2^{(j_l)} \stackrel{l\to\infty}{\longrightarrow} \beta_2$. Además, si escogemos los índices j_l definidos, la subsucesión $(\beta_1^{(j_l)})_j \stackrel{l\to\infty}{\longrightarrow} \beta_1$ (¿por qué?).

$$\beta_1^{(m)} \quad \beta_2^{(m)} \quad \beta_3^{(m)} \quad \cdots \quad \beta_n^{(m)},$$

Prueba del Lema técnico

$\beta_1^{(m)} \quad \beta_2^{(m)} \quad \beta_3^{(m)} \quad \cdots \quad \beta_n^{(m)}, \qquad \beta_1^{(m)}$ acotada $\Rightarrow \exists (m_j)_j$

$$\beta_1^{(m)} \quad \beta_2^{(m)} \quad \beta_3^{(m)} \quad \cdots \quad \beta_n^{(m)}, \qquad \beta_1^{(m)} \text{ acotada} \Rightarrow \exists (m_j)_j$$

$$\beta_1^{(m_j)} \quad \beta_2^{(m_j)} \quad \beta_3^{(m_j)} \quad \cdots \quad \beta_n^{(m_j)}, \qquad \beta_1^{(m_j)} \overset{j\to\infty}{\longrightarrow} \beta_1,$$

Prueba del Lema técnico

$$\beta_1^{(m)} \quad \beta_2^{(m)} \quad \beta_3^{(m)} \quad \cdots \quad \beta_n^{(m)}, \qquad \beta_1^{(m)} \text{ acotada} \Rightarrow \exists (m_j)_j$$

$$\beta_1^{(m_j)} \quad \beta_2^{(m_j)} \quad \beta_3^{(m_j)} \quad \cdots \quad \beta_n^{(m_j)}, \qquad \beta_1^{(m_j)} \xrightarrow{j\to\infty} \beta_1, \qquad \beta_{2,3\ldots}^{(m_j)} \overset{j\to\infty}{\not\to} \beta_k$$

Prueba del Lema técnico

$\beta_1^{(m)} \quad \beta_2^{(m)} \quad \beta_3^{(m)} \quad \cdots \quad \beta_n^{(m)}, \qquad \beta_1^{(m)}$ acotada $\Rightarrow \exists (m_j)_j$

$\beta_1^{(m_j)} \quad \beta_2^{(m_j)} \quad \beta_3^{(m_j)} \quad \cdots \quad \beta_n^{(m_j)}, \qquad \beta_1^{(m_j)} \xrightarrow{j\to\infty} \beta_1, \quad \beta_{2,3\ldots}^{(m_j)} \overset{j\to\infty}{\not\to} \beta_k$

$\beta_2^{(m_j)}$ acotada $\Rightarrow (m_{j_l})_l := (j_l)_l$

$\beta_1^{(j_l)} \quad \beta_2^{(j_l)} \quad \beta_3^{(j_l)} \quad \cdots \quad \beta_n^{(j_l)}, \qquad \beta_2^{(j_l)} \xrightarrow{l\to\infty} \beta_2,$

$\beta_1^{(m)} \quad \beta_2^{(m)} \quad \beta_3^{(m)} \quad \cdots \quad \beta_n^{(m)},$ $\quad \beta_1^{(m)}$ acotada $\Rightarrow \exists (m_j)_j$

$\beta_1^{(m_j)} \quad \beta_2^{(m_j)} \quad \beta_3^{(m_j)} \quad \cdots \quad \beta_n^{(m_j)},$ $\quad \beta_1^{(m_j)} \xrightarrow{j\to\infty} \beta_1, \quad \beta_{2,3\ldots}^{(m_j)} \overset{j\to\infty}{\not\to} \beta_k$

$\beta_2^{(m_j)}$ acotada $\Rightarrow (m_{j_l})_l := (j_l)_l$

$\beta_1^{(j_l)} \quad \beta_2^{(j_l)} \quad \beta_3^{(j_l)} \quad \cdots \quad \beta_n^{(j_l)},$ $\quad \beta_2^{(j_l)} \xrightarrow{l\to\infty} \beta_2, \quad \beta_1^{(j_l)} \xrightarrow{l\to\infty} \beta_1$

$\vdots$

y así sucesivamente

Prueba del Lema técnico

$$\beta_1^{(m)} \quad \beta_2^{(m)} \quad \beta_3^{(m)} \quad \cdots \quad \beta_n^{(m)}, \qquad \beta_1^{(m)} \text{ acotada} \Rightarrow \exists (m_j)_j$$

$$\beta_1^{(m_j)} \quad \beta_2^{(m_j)} \quad \beta_3^{(m_j)} \quad \cdots \quad \beta_n^{(m_j)}, \qquad \beta_1^{(m_j)} \xrightarrow{j\to\infty} \beta_1, \quad \beta_{2,3\ldots}^{(m_j)} \overset{j\to\infty}{\not\to} \beta_k$$

$$\beta_2^{(m_j)} \text{ acotada} \Rightarrow (m_{j_l})_l := (j_l)_l$$

$$\beta_1^{(j_l)} \quad \beta_2^{(j_l)} \quad \beta_3^{(j_l)} \quad \cdots \quad \beta_n^{(j_l)}, \qquad \beta_2^{(j_l)} \xrightarrow{l\to\infty} \beta_2, \quad \beta_1^{(j_l)} \xrightarrow{l\to\infty} \beta_1$$

$$\vdots$$

y así sucesivamente

$$\beta_1^{(l_i)} \quad \beta_2^{(l_i)} \quad \beta_3^{(l_i)} \quad \cdots \quad \beta_n^{(l_i)},$$

existe $(l_i)_i$ subsuceción

$$\begin{array}{lllll l}
\beta_1^{(m)} & \beta_2^{(m)} & \beta_3^{(m)} & \cdots & \beta_n^{(m)}, & \beta_1^{(m)} \text{ acotada} \Rightarrow \exists (m_j)_j \\
\beta_1^{(m_j)} & \beta_2^{(m_j)} & \beta_3^{(m_j)} & \cdots & \beta_n^{(m_j)}, & \beta_1^{(m_j)} \xrightarrow{j\to\infty} \beta_1, \quad \beta_{2,3\ldots}^{(m_j)} \overset{j\to\infty}{\not\to} \beta_k \\
 & & & & & \beta_2^{(m_j)} \text{ acotada} \Rightarrow (m_{j_l})_l := (j_l)_l \\
\beta_1^{(j_l)} & \beta_2^{(j_l)} & \beta_3^{(j_l)} & \cdots & \beta_n^{(j_l)}, & \beta_2^{(j_l)} \xrightarrow{l\to\infty} \beta_2, \quad \beta_1^{(j_l)} \xrightarrow{l\to\infty} \beta_1 \\
 & & \vdots & & & \text{y así sucesivamente} \\
\beta_1^{(l_i)} & \beta_2^{(l_i)} & \beta_3^{(l_i)} & \cdots & \beta_n^{(l_i)}, & \text{existe } (l_i)_i \text{ subsuceción} \\
\downarrow & \downarrow & \downarrow & \cdots & \downarrow & \text{tal que } i \to \infty \\
\beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \cdots & \beta_n, &
\end{array}$$

Dicha sucesión de índices define una subsucesión $(y_{l_i})_i$ de $(y_m)_m$ t.q.

$$y_{l_i} = \beta_1^{(l_i)} x_1 + \cdots + \beta_n^{(l_i)} x_n \xrightarrow{i\to\infty} \beta_1 x_1 + \cdots + \beta_n x_n := y.$$

Así, tenemos una sucesión de índices $(l_i)_i$ t.q. $\beta_k^{(l_i)} \stackrel{i\to\infty}{\longrightarrow} \beta_k, \forall k = 1, 2, \dots, n$. Además, dicha sucesión de índices define una subsucesión $(y_{l_i})_i$ de $(y_m)_m$ t.q.

$$y_{l_i} = \sum_{k=1}^{n} \beta_k^{(l_i)} x_k, \quad \text{donde} \quad \beta_k^{(l_i)} \stackrel{i\to\infty}{\longrightarrow} \beta_k \quad \Rightarrow$$

$$\sum_{k=1}^{n} |\beta_k^{(l_i)}| = 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} |\beta_k| = 1, \quad \text{y} \quad \lim_{i\to\infty} y_{l_i} = \sum_{k=1}^{n} \beta_k x_k := y$$

Prueba del Lema técnico

Así, tenemos una sucesión de índices $(l_i)_i$ t.q. $\beta_k^{(l_i)} \stackrel{i\to\infty}{\longrightarrow} \beta_k, \forall k = 1, 2, \dots, n$. Además, dicha sucesión de índices define una subsucesión $(y_{l_i})_i$ de $(y_m)_m$ t.q.

$$y_{l_i} = \sum_{k=1}^{n} \beta_k^{(l_i)} x_k, \quad \text{donde} \quad \beta_k^{(l_i)} \stackrel{i\to\infty}{\longrightarrow} \beta_k \quad \Rrightarrow$$

$$\sum_{k=1}^{n} |\beta_k^{(l_i)}| = 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} |\beta_k| = 1, \qquad \text{y} \qquad \lim_{i\to\infty} y_{l_i} = \sum_{k=1}^{n} \beta_k x_k := y$$

Luego, no todos los $\beta_k = 0$ al mismo tiempo (¿por qué?).

Prueba del Lema técnico

Así, tenemos una sucesión de índices $(l_i)_i$ t.q. $\beta_k^{(l_i)} \overset{i\to\infty}{\longrightarrow} \beta_k, \forall k = 1, 2, \dots, n$. Además, dicha sucesión de índices define una subsucesión $(y_{l_i})_i$ de $(y_m)_m$ t.q.

$$y_{l_i} = \sum_{k=1}^{n} \beta_k^{(l_i)} x_k, \quad \text{donde} \quad \beta_k^{(l_i)} \overset{i\to\infty}{\longrightarrow} \beta_k \quad \Rrightarrow$$

$$\sum_{k=1}^{n} |\beta_k^{(l_i)}| = 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} |\beta_k| = 1, \quad \text{y} \quad \lim_{i\to\infty} y_{l_i} = \sum_{k=1}^{n} \beta_k x_k := y$$

Luego, no todos los $\beta_k = 0$ al mismo tiempo (¿por qué?). Como los vectores $x_1, \dots, x_n$ son **li** $\Rrightarrow y \neq 0$ (¿por qué?).

Así, tenemos una sucesión de índices $(l_i)_i$ t.q. $\beta_k^{(l_i)} \stackrel{i\to\infty}{\longrightarrow} \beta_k$, $\forall k = 1, 2, \ldots, n$. Además, dicha sucesión de índices define una subsucesión $(y_{l_i})_i$ de $(y_m)_m$ t.q.

$$y_{l_i} = \sum_{k=1}^{n} \beta_k^{(l_i)} x_k, \quad \text{donde} \quad \beta_k^{(l_i)} \stackrel{i\to\infty}{\longrightarrow} \beta_k \quad \Rrightarrow$$

$$\sum_{k=1}^{n} |\beta_k^{(l_i)}| = 1 \Rightarrow \sum_{k=1}^{n} |\beta_k| = 1, \quad \text{y} \quad \lim_{i\to\infty} y_{l_i} = \sum_{k=1}^{n} \beta_k x_k := y$$

Luego, no todos los $\beta_k = 0$ al mismo tiempo (¿por qué?). Como los vectores $x_1, \ldots, x_n$ son **li** $\Rrightarrow y \neq 0$ (¿por qué?). Pero recordemos que la norma es una aplicación continua $\Rrightarrow$

$$\lim_{i\to\infty} y_{l_i} = y \neq 0 \quad \Rrightarrow \quad \lim_{i\to\infty} \|y_{l_i}\| = \|y\| \neq 0.$$

Por otro lado $\|y_m\| \stackrel{m\to\infty}{\longrightarrow} 0$, entonces $\lim_{i\to\infty} \|y_{l_i}\| = 0$, luego $\|y\| = 0$ de donde se sigue que $y = 0$ lo cual es una contradicción. ■

x_k l.i. & $\forall \alpha_k$, $\exists c > 0$ t.q. $\|\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n\| \geq c(|\alpha_1| + \cdots + |\alpha_n|)$

Como corolario tenemos el siguiente teorema de completitud:

Teorema

Todo subespacio M de dimensión finita de un espacio normado es completo. En particular, todo espacio normado de dimensión finita es completo.

x_k l.i. & $\forall \alpha_k$, $\exists c > 0$ t.q. $\|\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n\| \geq c(|\alpha_1| + \cdots + |\alpha_n|)$

Como corolario tenemos el siguiente teorema de completitud:

Teorema

Todo subespacio M de dimensión finita de un espacio normado es completo. En particular, todo espacio normado de dimensión finita es completo.

Definición

Una norma $\|\cdot\|$ en un espacio vectorial $\mathbb{X}$ es **equivalente** *a otra norma $\|\cdot\|'$ en $\mathbb{X}$ si existen dos números $a > 0$, $b > 0$, tales que para todo $x \in \mathbb{X}$*

$$a\|x\|' \leq \|x\| \leq b\|x\|'.$$

$$x_k \text{ l.i. } \& \ \forall \alpha_k, \ \exists c > 0 \text{ t.q. } \|\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n\| \geq c(|\alpha_1| + \cdots + |\alpha_n|)$$

Como corolario tenemos el siguiente teorema de completitud:

Teorema

Todo subespacio M de dimensión finita de un espacio normado es completo. En particular, todo espacio normado de dimensión finita es completo.

Definición

Una norma $\|\cdot\|$ en un espacio vectorial $\mathbb{X}$ es **equivalente** *a otra norma $\|\cdot\|'$ en $\mathbb{X}$ si existen dos números $a > 0$, $b > 0$, tales que para todo $x \in \mathbb{X}$*

$$a\|x\|' \leq \|x\| \leq b\|x\|'.$$

Consecuencia:

Si dos normas son equivalentes entonces toda sucesión de Cauchy en el espacio $(\mathbb{X}, \|\cdot\|)$ también lo es en $(\mathbb{X}, \|\cdot\|')$, y viceversa.

x_k l.i. & $\forall \alpha_k$, $\exists c > 0$ t.q. $\|\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n\| \geq c(|\alpha_1| + \cdots + |\alpha_n|)$

Teorema (Equivalencia de las normas en dimensión finita)

Sea $\mathbb{X}$ un espacio vectorial de dimensión finita. Entonces cualquier norma $\|\cdot\|$ en $\mathbb{X}$ es equivalente a cualquier otra norma en $\mathbb{X}$.

x_k l.i. & $\forall \alpha_k$, $\exists c > 0$ t.q. $\|\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n\| \geq c(|\alpha_1| + \cdots + |\alpha_n|)$

Teorema (Equivalencia de las normas en dimensión finita)

Sea $\mathbb{X}$ un espacio vectorial de dimensión finita. Entonces cualquier norma $\|\cdot\|$ en $\mathbb{X}$ es equivalente a cualquier otra norma en $\mathbb{X}$.

Definición

Un subconjunto $M \subset \mathbb{X}$ es compacto si M i.e., $\forall (x_n)_n$ de M tiene una subsucesión convergente en M.

Ya vimos que si $M \subset \mathbb{X}$ es compacto, entonces M es cerrado y acotado y que su recíproco, en general, es falso.

x_k l.i. & $\forall \alpha_k$, $\exists c > 0$ t.q. $\|\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n\| \geq c(|\alpha_1| + \cdots + |\alpha_n|)$

Teorema (Equivalencia de las normas en dimensión finita)

Sea $\mathbb{X}$ un espacio vectorial de dimensión finita. Entonces cualquier norma $\|\cdot\|$ en $\mathbb{X}$ es equivalente a cualquier otra norma en $\mathbb{X}$.

Definición

Un subconjunto $M \subset \mathbb{X}$ es compacto si M i.e., $\forall (x_n)_n$ de M tiene una subsucesión convergente en M.

Ya vimos que si $M \subset \mathbb{X}$ es compacto, entonces M es cerrado y acotado y que su recíproco, en general, es falso. Pero

Teorema

En un espacio normado $\mathbb{X}$ de dimensión finita M es compacto si y sólo si es cerrado y acotado.

$T : \mathcal{D}(T) \subset (\mathbb{X}, \rho) \mapsto (\mathbb{Y}, \sigma)$ es continua en $x_0 \in \mathcal{D}(T)$ si

$$\boxed{\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ t.q. } \forall x \text{ con } \rho(x, x_0) < \delta \Rightarrow \sigma(Tx, Tx_0) < \epsilon}$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\forall (x_n)_n \text{ con } x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x_0,\ Tx_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} Tx_0}$$

Una aplicación es continua en $M \subset \mathcal{D}(T)$ si es continua en todo $x \in M$.

$T : \mathcal{D}(T) \subset (\mathbb{X}, \rho) \mapsto (\mathbb{Y}, \sigma)$ es continua en $x_0 \in \mathcal{D}(T)$ si

$$\boxed{\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ t.q. } \forall x \text{ con } \rho(x, x_0) < \delta \Rightarrow \sigma(Tx, Tx_0) < \epsilon}$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\forall (x_n)_n \text{ con } x_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} x_0,\ Tx_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} Tx_0}$$

Una aplicación es continua en $M \subset \mathcal{D}(T)$ si es continua en todo $x \in M$.

Teorema

Sea $T : \mathcal{D}(T) \subset \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$ continua en el compacto $M \subset \mathcal{D}(T)$. Entonces la imagen de M, $T(M)$ también es un conjunto compacto.

$T : \mathcal{D}(T) \subset (\mathbb{X}, \rho) \mapsto (\mathbb{Y}, \sigma)$ es continua en $x_0 \in \mathcal{D}(T)$ si

$$\boxed{\forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \text{ t.q. } \forall x \text{ con } \rho(x, x_0) < \delta \Rightarrow \sigma(Tx, Tx_0) < \epsilon}$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\forall (x_n)_n \text{ con } x_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} x_0,\ Tx_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} Tx_0}$$

Una aplicación es continua en $M \subset \mathcal{D}(T)$ si es continua en todo $x \in M$.

Teorema

Sea $T : \mathcal{D}(T) \subset \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$ continua en el compacto $M \subset \mathcal{D}(T)$. Entonces la imagen de M, $T(M)$ también es un conjunto compacto.

Ejercicio: Sea una aplicación continua $T : M \subset \mathbb{X} \mapsto \mathbb{R}$ de un compacto M en los reales. Entonces T alcanza su máximo y su mínimo absolutos.

Definición

Una aplicación (operador) $A : \mathcal{D}(T) \subset \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$ *es lineal si*

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad \forall x, y \in \mathcal{D}(T), \qquad T(\alpha z + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y).$$

Definición

Una aplicación (operador) $A : \mathcal{D}(T) \subset \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$ *es lineal si*

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad \forall x, y \in \mathcal{D}(T), \qquad T(\alpha z + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y).$$

Ejemplos: El operador identidad, el operador nulo, el operador derivación (o derivada), ...

Definición

Una aplicación (operador) $A : \mathcal{D}(T) \subset \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$ *es lineal si*

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad \forall x, y \in \mathcal{D}(T), \qquad T(\alpha z + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y).$$

Ejemplos: El operador identidad, el operador nulo, el operador derivación (o derivada), ...

▶Sea $S : C_{[a,b]} \mapsto C_{[a,b]}$, $y(t) = Sf(t) = tf(t)$ que denominaremos operador multiplicación por t.

Definición

Una aplicación (operador) $A : \mathcal{D}(T) \subset \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$ *es lineal si*

$$\forall\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad \forall x, y \in \mathcal{D}(T), \qquad T(\alpha z + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y).$$

Ejemplos: El operador identidad, el operador nulo, el operador derivación (o derivada), . . .

▶Sea $S : C_{[a,b]} \mapsto C_{[a,b]}$, $y(t) = Sf(t) = tf(t)$ que denominaremos operador multiplicación por t.

▶El operador $T : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$, $y = Tx = A \cdot x$, donde $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $x \in \mathbb{R}^n$ e $y \in \mathbb{R}^m$

Definición

Una aplicación (operador) $A : \mathcal{D}(T) \subset \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$ *es lineal si*

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad \forall x, y \in \mathcal{D}(T), \qquad T(\alpha z + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y).$$

Ejemplos: El operador identidad, el operador nulo, el operador derivación (o derivada), ...

▶Sea $S : C_{[a,b]} \mapsto C_{[a,b]}$, $y(t) = Sf(t) = tf(t)$ que denominaremos operador multiplicación por t.

▶El operador $T : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^m$, $y = Tx = A \cdot x$, donde $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $x \in \mathbb{R}^n$ e $y \in \mathbb{R}^m$

▶$S : l^2 \mapsto l^2$ tal que $S(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (0, x_1, x_2, \ldots)$.

Definición

Dado $T : \mathcal{D}(T) \mapsto \mathbb{Y}$, *llamaremos espacio nulo o núcleo de* T *al espacio* $\mathcal{N}(T)$ *de todos los vectores* $x \in \mathcal{D}(T)$ *tales que* $Tx = 0$.

Definición

Dado $T : \mathcal{D}(T) \mapsto \mathbb{Y}$, *llamaremos espacio nulo o núcleo de* T *al espacio* $\mathcal{N}(T)$ *de todos los vectores* $x \in \mathcal{D}(T)$ *tales que* $Tx = 0$.

Teorema

Sea $T : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$ *una aplicación lineal. Entonces*

1. $\mathcal{I}(T)$ *es un subespacio vectorial de* $\mathbb{Y}$.
2. *Si* $\dim \mathcal{D}(T) = n < \infty$, *entonces* $\dim \mathcal{I}(T) \leq n$.
3. $\mathcal{N}(T)$ *es un subespacio vectorial de* $\mathcal{D}(T)$.

Definición

Dado $T : \mathcal{D}(T) \mapsto \mathbb{Y}$, llamaremos espacio nulo o núcleo de T al espacio $\mathcal{N}(T)$ de todos los vectores $x \in \mathcal{D}(T)$ tales que $Tx = 0$.

Teorema

Sea $T : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$ una aplicación lineal. Entonces

1. *$\mathcal{I}(T)$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{Y}$.*
2. *Si $\dim \mathcal{D}(T) = n < \infty$, entonces $\dim \mathcal{I}(T) \leq n$.*
3. *$\mathcal{N}(T)$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{D}(T)$.*

Teorema

Sea $T : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$ una aplicación lineal con $\mathcal{D}(T) \subset \mathbb{X}$ y $\mathcal{I}(T) \subset \mathbb{Y}$.

1. *Existe T^{-1} de T, si y sólo si $Tx = 0$ implica $x = 0$.*
2. *Si existe T^{-1}, entonces T^{-1} es lineal.*
3. *Si T es invertible y $\dim \mathcal{D}(T) = n < \infty \Rightarrow \dim \mathcal{I}(T) = \dim \mathcal{D}(T)$*

Ejemplo

Sea $T : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$ *una aplicación lineal y supongamos que* $\dim \mathbb{X} = n < \infty$*.* *Entonces* $\dim \mathbb{X} = n = \dim \mathcal{N}(T) + \dim \mathcal{I}(T)$*.*

Ejemplo

Sea $T : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$ *una aplicación lineal y supongamos que* $\dim \mathbb{X} = n < \infty$. *Entonces* $\dim \mathbb{X} = n = \dim \mathcal{N}(T) + \dim \mathcal{I}(T)$.

Ejercicio

Sea $T : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$ *una aplicación lineal y supongamos que* $\dim \mathbb{X} = \dim \mathbb{Y} = n < \infty$. *Prueba que* $\mathcal{I}(T) = \mathbb{Y}$ *si y sólo si* T^{-1} *existe.*

Ayuda: *Usa el resultado del ejemplo anterior.*

Ejemplo

Sea $T : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$ *una aplicación lineal y supongamos que* $\dim \mathbb{X} = n < \infty$. *Entonces* $\dim \mathbb{X} = n = \dim \mathcal{N}(T) + \dim \mathcal{I}(T)$.

Ejercicio

Sea $T : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$ *una aplicación lineal y supongamos que* $\dim \mathbb{X} = \dim \mathbb{Y} = n < \infty$. *Prueba que* $\mathcal{I}(T) = \mathbb{Y}$ *si y sólo si* T^{-1} *existe.*

Ayuda: *Usa el resultado del ejemplo anterior.*

Lo anterior no es cierto para dimensión infinita. Sea $\mathbb{X}$ el conjunto de las funciones infinitamente derivables en $\mathbb{R}$. Sea $D : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{X}$, $y(t) = Dx(t) = x'(t)$ (derivada) ...

Definición

Sean $\mathbb{X}$ *e* $\mathbb{Y}$ *dos espacios normados y sea el operador* $T : \mathcal{D}(T) \mapsto \mathbb{Y}$ *lineal.* T *es acotado si existe* $c \geq 0$ *tal que*[a]

$$\|Tx\| \leq c\|x\|, \qquad \forall x \in \mathcal{D}(T). \qquad\qquad (*)$$

[a] Se sobrentiende que $\|x\|$ es la norma en $\mathbb{X}$ y $\|Tx\|$ es en $\mathbb{Y}$.

Definición

Sean $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$ dos espacios normados y sea el operador $T : \mathcal{D}(T) \mapsto \mathbb{Y}$ lineal. T es acotado si existe $c \geq 0$ tal que[a]

$$\|Tx\| \leq c\|x\|, \qquad \forall x \in \mathcal{D}(T). \qquad\qquad (*)$$

[a] Se sobrentiende que $\|x\|$ es la norma en $\mathbb{X}$ y $\|Tx\|$ es en $\mathbb{Y}$.

De lo anterior se sigue que si T es acotado, entonces para todo $x \neq 0$,

$$\frac{\|Tx\|}{\|x\|} \leq c, \qquad \forall x \in \mathcal{D}(T),\ x \neq 0.$$

El menor valor de c para el cual (*) se cumple lo denotaremos por $\|T\|$ y se denomina **norma del operador** lineal T.

Tomando supremos en $x \neq 0$ en $\frac{\|Tx\|}{\|x\|} \leq c$ e ínfimos en c tenemos

$$\sup_{x \in \mathbb{X} \setminus \{0\}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \leq \|T\|.$$

Por otro lado, para todo $y \neq 0$

$$\frac{\|Ty\|}{\|y\|} \leq \sup_{x \in \mathbb{X} \setminus \{0\}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} := c',$$

luego $\|Ty\| \leq c'\|y\|$ por lo tanto

$$\|T\| = \inf\{c : \|Ty\| \leq c\|y\|, \quad \forall y \in \mathbb{X}\} \leq c' = \sup_{x \in \mathbb{X} \setminus \{0\}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|},$$

de donde se sigue que

$$\|T\| = \sup_{x \in \mathbb{X} \setminus \{0\}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}$$

Tomando supremos en $x \neq 0$ en $\frac{\|Tx\|}{\|x\|} \leq c$ e ínfimos en c tenemos

$$\sup_{x\in\mathbb{X}\setminus\{0\}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \leq \|T\|.$$

Por otro lado, para todo $y \neq 0$

$$\frac{\|Ty\|}{\|y\|} \leq \sup_{x\in\mathbb{X}\setminus\{0\}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} := c',$$

luego $\|Ty\| \leq c'\|y\|$ por lo tanto

$$\|T\| = \inf\{c : \|Ty\| \leq c\|y\|, \quad \forall y \in \mathbb{X}\} \leq c' = \sup_{x\in\mathbb{X}\setminus\{0\}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|},$$

de donde se sigue que

$$\|T\| = \sup_{x\in\mathbb{X}\setminus\{0\}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \quad \Longleftrightarrow \quad \|T\| = \sup_{x\in\mathbb{X}, \|x\|=1} \|Tx\|.$$

Si $T = 0$ obviamente $\|T\| = 0$. Si $T = I$, $\|T\| = 1$.

Si $T = 0$ obviamente $\|T\| = 0$. Si $T = I$, $\|T\| = 1$.

Si en $\|Tx\| \leq c\|x\|$, tomamos ínfimos en $c \Longrightarrow$

$$\forall x \in \mathbb{X}, \quad \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \leq \|T\| \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{\|Tx\| \leq \|T\|\|x\|}$$

Si $T = 0$ obviamente $\|T\| = 0$. Si $T = I$, $\|T\| = 1$.

Si en $\|Tx\| \leq c\|x\|$, tomamos ínfimos en $c \Longrightarrow$

$$\forall x \in \mathbb{X}, \quad \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \leq \|T\| \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{\|Tx\| \leq \|T\|\|x\|}$$

Ejercicio: Prueba que la expresión

$$\boxed{\|T\| = \sup_{x \in \mathbb{X}, \|x\|=1} \|Tx\|}$$

define una norma.

Si $T = 0$ obviamente $\|T\| = 0$. Si $T = I$, $\|T\| = 1$.

Si en $\|Tx\| \le c\|x\|$, tomamos ínfimos en $c \Longrightarrow$

$$\forall x \in \mathbb{X}, \quad \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \le \|T\| \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{\|Tx\| \le \|T\|\|x\|}$$

Ejercicio: Prueba que la expresión

$$\boxed{\|T\| = \sup_{x \in \mathbb{X}, \|x\|=1} \|Tx\|}$$

define una norma.

Corolario: El conjunto de todos los operadores lineales acotados de $\mathbb{X}$ en $\mathbb{Y}$, que denotaremos por $\mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$ es un espacio normado.

Teorema

Toda aplicación lineal $T : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$ *de un espacio normado de dimensión finita* $\mathbb{X}$ *en otro espacio normado cualquiera* $\mathbb{Y}$ *es acotada.*

Teorema

Toda aplicación lineal $T : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$ *de un espacio normado de dimensión finita* $\mathbb{X}$ *en otro espacio normado cualquiera* $\mathbb{Y}$ *es acotada.*

Teorema

Toda aplicación lineal $T : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$ de un espacio normado de dimensión finita $\mathbb{X}$ en otro espacio normado cualquiera $\mathbb{Y}$ es acotada.

Como $\dim(\mathbb{X}) = n$, $\forall x \in \mathbb{X}$, $x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k \;\; \Rightarrow$

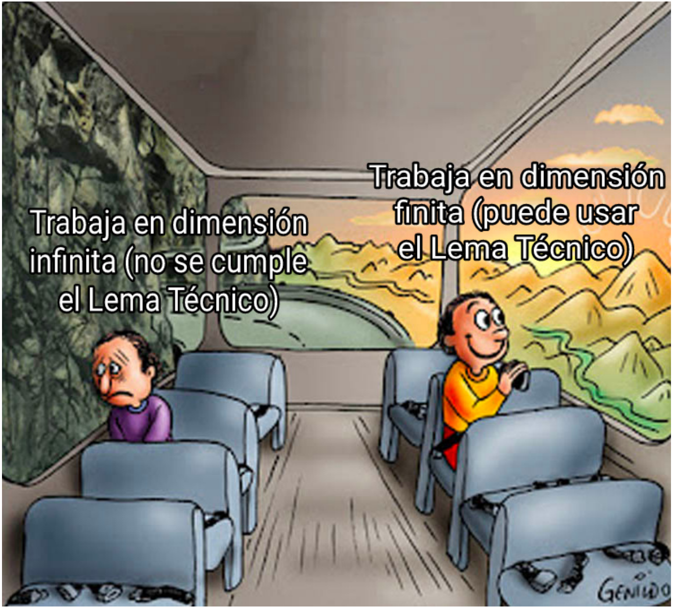
$$\|Tx\| = \left\| T \sum_{k=1}^{n} x_k e_k \right\| \leq \sum_{k=1}^{n} |x_k| \|Te_k\| \leq \max_k \|Te_k\| \sum_{k=1}^{n} |x_k|.$$

Por otro lado, usando el lema técnico $\exists c > 0$ tal que

$$\|x\| = \left\| \sum_{k=1}^{n} x_k e_k \right\| \geq c \sum_{k=1}^{n} |x_k|.$$

Combinando ambas tenemos

$$\|Tx\| \leq \frac{\max_k \|Te_k\|}{c} \|x\| \quad \Rrightarrow \quad \|Tx\| \leq \gamma \|x\|.$$


Trabaja en dimensión
infinita (no se cumple
el Lema Técnico)
Trabaja en dimensión
finita (puede usar
el Lema Técnico)
GENiDO

Teorema

Sea $T : \mathcal{D}(T) \subset \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$ *una aplicación lineal de un espacio normado* $\mathbb{X}$ *a otro espacio normado* $\mathbb{Y}$*. Entonces*

1. T *es continuo si y sólo si* T *es acotado.*
2. *Si* T *es continuo en algún* $x_0 \in \mathcal{D}(T)$, T *lo es en todo* $\mathcal{D}(T)$.

Teorema

Sea $T : \mathcal{D}(T) \subset \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$ *una aplicación lineal de un espacio normado* $\mathbb{X}$ *a otro espacio normado* $\mathbb{Y}$*. Entonces*

1. T *es continuo si y sólo si* T *es acotado.*
2. *Si* T *es continuo en algún* $x_0 \in \mathcal{D}(T)$, T *lo es en todo* $\mathcal{D}(T)$.

Asumiremos que T no es el operador nulo.

1. $\Rightarrow$ Sea T acotado y sea $x_0 \in \mathcal{D}(T)$ cualquiera. Como T es lineal y acotado, entonces

$$\|Tx - Tx_0\| = \|T(x - x_0)\| \leq \|T\|\|x - x_0\|.$$

Entonces, $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta = \epsilon / \|T\| > 0$ tal que, $\forall x$ con $\|x - x_0\| < \delta$, $\|Tx - Tx_0\| < \epsilon$.

$\Leftarrow$ Sea T lineal y continuo en $x_0 \in \mathcal{D}(T)$ cualquiera. Entonces $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que, $\forall x$ con $\|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|Tx - Tx_0\| < \epsilon$.
Sea $y \neq 0$ en $\mathcal{D}(T)$ cualquiera. Escojamos x tal que

$$x - x_0 = \frac{\delta}{2\|y\|} y \quad \Rrightarrow \quad \|x - x_0\| < \delta \quad \Rrightarrow \quad \|Tx - Tx_0\| < \epsilon.$$

Para dichos x tenemos (linealidad de T) que

$$\|Tx - Tx_0\| = \|T(x - x_0)\| = \left\| T \frac{\delta}{2\|y\|} y \right\| = \frac{\delta}{2\|y\|} \|Ty\| \leq \epsilon$$

$$\Rrightarrow \quad \|Ty\| \leq \frac{2\epsilon}{\delta} \|y\| \quad \|Ty\| \leq \gamma \|y\|$$

$\Leftarrow$ Sea T lineal y continuo en $x_0 \in \mathcal{D}(T)$ cualquiera. Entonces $\forall\epsilon > 0$, $\exists\delta > 0$ tal que, $\forall x$ con $\|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|Tx - Tx_0\| < \epsilon$.
Sea $y \neq 0$ en $\mathcal{D}(T)$ cualquiera. Escojamos x tal que

$$x - x_0 = \frac{\delta}{2\|y\|} y \quad \Rrightarrow \quad \|x - x_0\| < \delta \quad \Rrightarrow \quad \|Tx - Tx_0\| < \epsilon.$$

Para dichos x tenemos (linealidad de T) que

$$\|Tx - Tx_0\| = \|T(x - x_0)\| = \left\| T\frac{\delta}{2\|y\|} y \right\| = \frac{\delta}{2\|y\|} \|Ty\| \leq \epsilon$$

$$\Rrightarrow \quad \|Ty\| \leq \frac{2\epsilon}{\delta} \|y\| \quad \|Ty\| \leq \gamma\|y\|$$

2. Nótese que en la prueba anterior se probó que si T era continuo en un punto $x_0 \in \mathcal{D}(T)$, entonces era acotado en $\mathcal{D}(T)$. Pero entonces por 1, al ser acotado en $\mathcal{D}(T)$, es continuo en $\mathcal{D}(T)$.

Teorema (Banach-Steinhaus)

Sea $(T_n)_n$ una sucesión de operadores lineales acotados $T_n : \mathbb{X} \mapsto \mathbb{Y}$. de un espacio de Banach $\mathbb{X}$ a otro normado cualquiera $\mathbb{Y}$ tales que la sucesión $(\|T_n x\|)_n$ es acotada para cada $x \in \mathbb{X}$, o sea,

$$\|T_n x\| \leq c_x \qquad n = 1, 2, \ldots, \quad c_x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Entonces la sucesión de normas $(\|T_n\|)_n$ es acotada, es decir, existe un $c \geq 0$ tal que

$$\|T_n\| \leq c \qquad n = 1, 2, \ldots. \tag{2}$$

Ejercicio: Sea $(T_n)_n \in \mathcal{L}(\mathbb{X}, \mathbb{Y})$. Probar que si T_n es puntualmente convergente a un operador T entonces la sucesión $(T_n)_n$ está uniformemente acotada, i.e.,

$$\exists c > 0 \text{ tal que } \forall n \in \mathbb{N}, \quad \|T_n\| < c,$$

y el operador T es lineal y acotado (continuo).

Dada una función $f(x)$ periódica de periodo 2π definiremos la serie trigonométrica de Fourier por

$$Sf(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx),$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

¿$\forall x \in [0, 2\pi)$ las sumas parciales $S_n f(x) \to Sf(x)$?

$$S_n f(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)$$

Dada una función $f(x)$ periódica de periodo 2π definiremos la serie trigonométrica de Fourier por

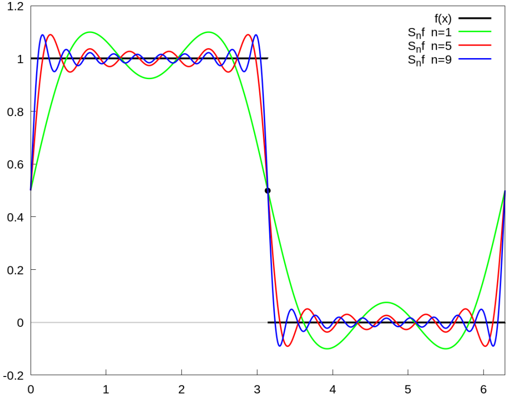
$$Sf(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx),$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

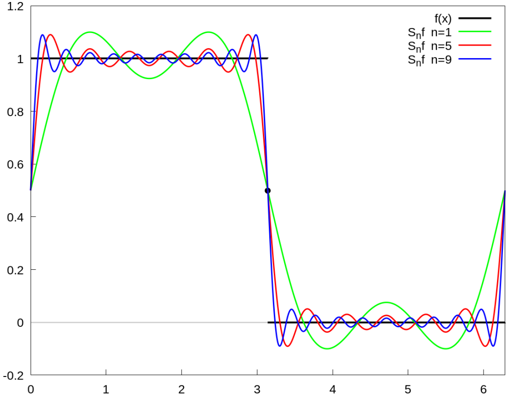
¿$\forall x \in [0, 2\pi)$ las sumas parciales $S_n f(x) \to Sf(x)$?

$$S_n f(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \qquad \text{¿}Sf(x) = f(x)\text{?}$$

Por ejemplo, si tomamos la función discontinua $f(x) = 1$ si $0 \leq x < \pi$ y 0 si $\pi \leq x < 2\pi$, su serie de Fourier converge en todo punto de $[0, 2\pi)$, incluido el punto de discontinuidad $x = 1/2$.'

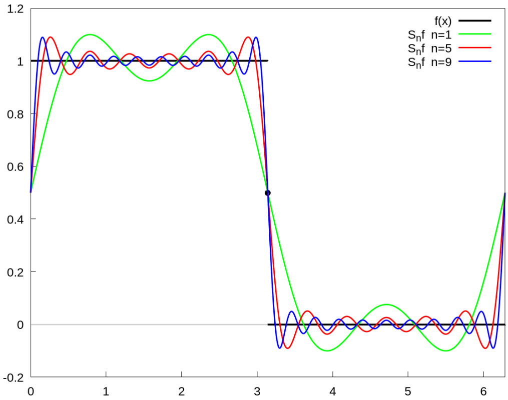


Por ejemplo, si tomamos la función discontinua $f(x) = 1$ si $0 \leq x < \pi$ y 0 si $\pi \leq x < 2\pi$, su serie de Fourier converge en todo punto de $[0, 2\pi)$, incluido el punto de discontinuidad $x = 1/2$.‘



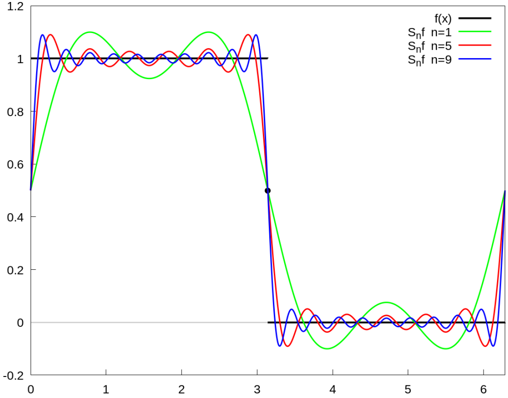
La continuidad no es necesaria para la convergencia de la serie de Fourier

Por ejemplo, si tomamos la función discontinua $f(x) = 1$ si $0 \leq x < \pi$ y 0 si $\pi \leq x < 2\pi$, su serie de Fourier converge en todo punto de $[0, 2\pi)$, incluido el punto de discontinuidad $x = 1/2$.‘



La continuidad no es necesaria para la convergencia de la serie de Fourier ¿y es suficiente?

Por ejemplo, si tomamos la función discontinua $f(x) = 1$ si $0 \leq x < \pi$ y 0 si $\pi \leq x < 2\pi$, su serie de Fourier converge en todo punto de $[0, 2\pi)$, incluido el punto de discontinuidad $x = 1/2$.'



La continuidad no es necesaria para la convergencia de la serie de Fourier ¿y es suficiente? **NO!!!**

Vamos a probar que existen funciones 2π-periódicas continuas que divergen en un punto x_0 dado.

Vamos a probar que existen funciones 2π-periódicas continuas que divergen en un punto x_0 dado.

Sustituyendo a_n y b_n en $S_n f(x)$ obtenemos

$$S_n f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t) D_n(t-x)dt, \quad D_n(z) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos(kz)$$

donde $D_n(z)$ es el núcleo de Dirichlet.
Usando la identidad

$$2\cos(kz)\sin t/2 = \sin(k+1/2)z - \sin(k-1/2)z,$$

y sumando de $k=1$ hasta n se tiene

$$D_n(z) = \frac{\sin(n+1/2)z}{2\sin z/2}, \quad z \neq 0, \quad D_n(0) = n + \frac{1}{2}.$$

Nótese que $|D_n(z)| \leq n + 1/2$.

Definamos el espacio $\tilde{C}$ de las funciones continuas en $[0, 2\pi]$ tales que $f(0) = f(2\pi)$ dotado con la norma del supremo:

$$\|f\| = \max_{x\in[0,2\pi]} |f(x)|.$$

$\tilde{C}$ es un subespacio cerrado de $C^{\infty}_{[0,2\pi]}$ (¿por qué?), luego es completo.

Definamos el espacio $\tilde{C}$ de las funciones continuas en $[0, 2\pi]$ tales que $f(0) = f(2\pi)$ dotado con la norma del supremo:

$$\|f\| = \max_{x \in [0,2\pi]} |f(x)|.$$

$\tilde{C}$ es un subespacio cerrado de $C^{\infty}_{[0,2\pi]}$ (¿por qué?), luego es completo.

Sin pérdida de generalidad tomaremos como punto de divergencia $x = 0$.

Definamos el espacio $\tilde{C}$ de las funciones continuas en $[0, 2\pi]$ tales que $f(0) = f(2\pi)$ dotado con la norma del supremo:

$$\|f\| = \max_{x\in[0,2\pi]} |f(x)|.$$

$\tilde{C}$ es un subespacio cerrado de $C^{\infty}_{[0,2\pi]}$ (¿por qué?), luego es completo.

Sin pérdida de generalidad tomaremos como punto de divergencia $x = 0$.

Definamos la sucesión $(T_n)_n$ de funcionales lineales $T_n : \tilde{C} \mapsto \mathbb{R}$

$$T_n f = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)D_n(t)dt.$$

Nótese que $T_n f = S_n f(0)$.

Definamos el espacio $\tilde{C}$ de las funciones continuas en $[0, 2\pi]$ tales que $f(0) = f(2\pi)$ dotado con la norma del supremo:

$$\|f\| = \max_{x\in[0,2\pi]} |f(x)|.$$

$\tilde{C}$ es un subespacio cerrado de $C^{\infty}_{[0,2\pi]}$ (¿por qué?), luego es completo.

Sin pérdida de generalidad tomaremos como punto de divergencia $x = 0$.

Definamos la sucesión $(T_n)_n$ de funcionales lineales $T_n : \tilde{C} \mapsto \mathbb{R}$

$$T_n f = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) D_n(t) dt.$$

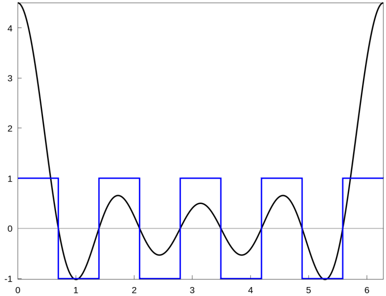
Nótese que $T_n f = S_n f(0)$.

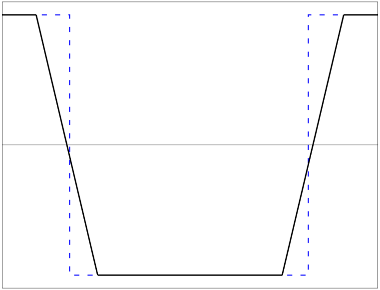
Vamos a probar que T_n es acotada para cada n y

$$\|T_n\| = l_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |D_n(t)| dt.$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$, $D_n(x) = 0$ en los puntos $a_i = \frac{2i\pi}{2i+1}$, $i = 1, 2, \ldots, 2n + 1$, es no negativa en $[0, a_1]$, $\ldots [a_{2n}, a_{2n+1}]$, cuya unión llamaremos Σ_+ y no positiva en $[a_1, a_2]$, $\ldots [a_{2n-}, a_{2n}]$, cuya unión llamaremos Σ_-.

Vamos a construir para cada $n \in \mathbb{N}$ una sucesión $(f_k)_k \in \tilde{C}$ en $[0, 2\pi]$





$\vdots$

Problema: *Prueba que* $T : C^{\infty}_{[0,1]} \mapsto C^{\infty}_{[0,1]}$, $y = Tx$, *definido por*

$$y(t) = \int_0^1 k(t,\tau)x(\tau)d\tau,$$

con $k(t,\tau)$ *continua en el cuadrado* $[0,1]\times[0,1]$ *es lineal y acotado y que*

$$\|T\| = K = \max_{t\in[0,1]} \int_0^1 |k(t,\tau)|d\tau.$$

Problema: *Prueba que* $T : C^{\infty}_{[0,1]} \mapsto C^{\infty}_{[0,1]}$, $y = Tx$, *definido por*

$$y(t) = \int_0^1 k(t,\tau)x(\tau)d\tau,$$

con $k(t,\tau)$ *continua en el cuadrado* $[0,1] \times [0,1]$ *es lineal y acotado y que*

$$\|T\| = K = \max_{t\in[0,1]} \int_0^1 |k(t,\tau)|d\tau.$$

Solución: Comenzamos con

$$|y(t)| \leq \int_0^1 |k(t,\tau)||x(\tau)|d\tau \leq \|x\| \int_0^1 |k(t,\tau)|d\tau$$

Problema: *Prueba que* $T : C^{\infty}_{[0,1]} \mapsto C^{\infty}_{[0,1]}$, $y = Tx$, *definido por*

$$y(t) = \int_0^1 k(t,\tau)x(\tau)d\tau,$$

con $k(t,\tau)$ *continua en el cuadrado* $[0,1]\times[0,1]$ *es lineal y acotado y que*

$$\|T\| = K = \max_{t\in[0,1]} \int_0^1 |k(t,\tau)|d\tau.$$

Solución: Comenzamos con

$$|y(t)| \leq \int_0^1 |k(t,\tau)||x(\tau)|d\tau \leq \|x\| \int_0^1 |k(t,\tau)|d\tau$$

Tomando el supremo en $t\in[0,1] \Rightarrow \|Tx\| \leq K\|x\| \Rightarrow \|T\| \leq K$

$$K = \max_{t\in[0,1]} \int_0^1 |k(t,\tau)|d\tau.$$

Definamos la función

$$u_n(t) = \begin{cases} -1 & t \leq -1/n, \\ nt, & -1/n \leq t \leq 1/n \\ 1, & t \geq 1/n. \end{cases}$$

Sea la sucesión $x_n(t,\tau) = u_n(k(t,\tau))$.

Definamos la función

$$u_n(t) = \begin{cases} -1 & t \leq -1/n, \\ nt, & -1/n \leq t \leq 1/n \\ 1, & t \geq 1/n. \end{cases}$$

Sea la sucesión $x_n(t,\tau) = u_n(k(t,\tau))$.Nótese que $\|x_n\| = 1$, y que

$$k(t,\tau)u_n(k(t,\tau)) \geq 0, \text{ e igual a } |k(t,\tau)| \text{ cuando } |k(t,\tau)| \geq 1/n.$$

Definamos la función

$$u_n(t) = \begin{cases} -1 & t \leq -1/n, \\ nt, & -1/n \leq t \leq 1/n \\ 1, & t \geq 1/n. \end{cases}$$

Sea la sucesión $x_n(t,\tau) = u_n(k(t,\tau))$.Nótese que $\|x_n\| = 1$, y que

$$k(t,\tau)u_n(k(t,\tau)) \geq 0, \text{ e igual a } |k(t,\tau)| \text{ cuando } |k(t,\tau)| \geq 1/n.$$

Sea $I_n \subset [0,1]$ el conjunto de puntos donde se cumple la desigualdad

$$|Tx_n(t,\tau)| = \int_0^1 k(t,\tau)x_n(t,\tau)d\tau = \left[\int_{I_n} + \int_{[0,1]\setminus I_n}\right] \geq \int_{I_n} k(t,\tau)x_n(t,\tau)d\tau$$

Definamos la función

$$u_n(t) = \begin{cases} -1 & t \leq -1/n, \\ nt, & -1/n \leq t \leq 1/n \\ 1, & t \geq 1/n. \end{cases}$$

Sea la sucesión $x_n(t,\tau) = u_n(k(t,\tau))$.Nótese que $\|x_n\| = 1$, y que

$$k(t,\tau)u_n(k(t,\tau)) \geq 0, \text{ e igual a } |k(t,\tau)| \text{ cuando } |k(t,\tau)| \geq 1/n.$$

Sea $I_n \subset [0,1]$ el conjunto de puntos donde se cumple la desigualdad

$$|Tx_n(t,\tau)| = \int_0^1 k(t,\tau)x_n(t,\tau)d\tau = \left[\int_{I_n} + \int_{[0,1]\setminus I_n}\right] \geq \int_{I_n} k(t,\tau)x_n(t,\tau)d\tau$$

$$\int_{I_n} k(t,\tau)x_n(t,\tau)d\tau = \int_{I_n} |k(t,\tau)|d\tau = \int_0^1 |k(t,\tau)|d\tau - \int_{[0,1]\setminus I_n} |k(t,\tau)|d\tau$$

$$|Tx_n(t,\tau)| \geq \int_0^1 |k(t,\tau)|d\tau - \int_{[0,1]\setminus I_n} |k(t,\tau)|d\tau$$

En $[0,1] \setminus I_n$, $|k(t,\tau)| < 1/n$, entonces

$$|Tx_n(t,\tau)| \geq \int_{I_n} |k(t,\tau)|d\tau \geq \int_0^1 |k(t,\tau)|d\tau - \frac{1}{n}.$$

$$|Tx_n(t,\tau)| \geq \int_0^1 |k(t,\tau)|d\tau - \int_{[0,1]\setminus I_n} |k(t,\tau)|d\tau$$

En $[0,1] \setminus I_n$, $|k(t,\tau)| < 1/n$, entonces

$$|Tx_n(t,\tau)| \geq \int_{I_n} |k(t,\tau)|d\tau \geq \int_0^1 |k(t,\tau)|d\tau - \frac{1}{n}.$$

Tomamos supremos en n

$$\sup_n |Tx_n(t,\tau)| \geq \int_0^1 |k(t,\tau)|d\tau.$$

$$|Tx_n(t,\tau)| \geq \int_0^1 |k(t,\tau)|d\tau - \int_{[0,1]\setminus I_n} |k(t,\tau)|d\tau$$

En $[0,1] \setminus I_n$, $|k(t,\tau)| < 1/n$, entonces

$$|Tx_n(t,\tau)| \geq \int_{I_n} |k(t,\tau)|d\tau \geq \int_0^1 |k(t,\tau)|d\tau - \frac{1}{n}.$$

Tomamos supremos en n

$$\sup_n |Tx_n(t,\tau)| \geq \int_0^1 |k(t,\tau)|d\tau.$$

Tomamos el máximo en t

$$\max_{t\in[0,1]} \left[\sup_n |Tx_n(t,\tau)|\right] \geq \max_t \int_0^1 |k(t,\tau)|d\tau = K \quad \Rightarrow$$

$$|Tx_n(t,\tau)| \geq \int_0^1 |k(t,\tau)|d\tau - \int_{[0,1]\setminus I_n} |k(t,\tau)|d\tau$$

En $[0,1] \setminus I_n$, $|k(t,\tau)| < 1/n$, entonces

$$|Tx_n(t,\tau)| \geq \int_{I_n} |k(t,\tau)|d\tau \geq \int_0^1 |k(t,\tau)|d\tau - \frac{1}{n}.$$

Tomamos supremos en n

$$\sup_n |Tx_n(t,\tau)| \geq \int_0^1 |k(t,\tau)|d\tau.$$

Tomamos el máximo en t

$$\max_{t\in[0,1]} \left[\sup_n |Tx_n(t,\tau)|\right] \geq \max_t \int_0^1 |k(t,\tau)|d\tau = K \quad \Rightarrow$$

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| \geq \max_{t\in[0,1]} \left[\sup_n |Tx_n(t,\tau)|\right] \geq \max_{t\in[0,1]} \int_0^1 |k(t,\tau)|d\tau = K$$

Corolario: el funcional $f : C^{\infty}_{[0,1]} \mapsto C^{\infty}_{[0,1]}$ con

$$f(x) = \int_0^1 k(\tau)x(\tau)d\tau$$

con $k(\tau)$ continua en $[0,1]$ es acotado y $\|f\| = \displaystyle\int_0^1 |k(\tau)|d\tau$

Corolario: el funcional $f : C^{\infty}_{[0,1]} \mapsto C^{\infty}_{[0,1]}$ con

$$f(x) = \int_0^1 k(\tau)x(\tau)d\tau$$

con $k(\tau)$ continua en $[0,1]$ es acotado y $\|f\| = \displaystyle\int_0^1 |k(\tau)|d\tau$

Problema: *Prueba que* $T : L^1[0,1] \mapsto L^1_{[0,1]}$, $y = Tx$, *definido por*

$$y(t) = \int_0^1 k(t,\tau)x(\tau)d\tau,$$

es lineal y acotado y que

$$\|T\| = \max_{\tau\in[0,1]} \int_0^1 |k(t,\tau)|dt$$

$$\|Tx\| = \int_0^1 |y(t)|dt = \int_0^1 \left| \int_0^1 k(t,\tau)x(\tau)d\tau \right| dt$$

$$\begin{aligned} \|Tx\| &= \int_0^1 |y(t)|dt = \int_0^1 \left| \int_0^1 k(t,\tau)x(\tau)d\tau \right| dt \\ &\leq \int_0^1 \left(\int_0^1 |k(t,\tau)||x(\tau)|d\tau \right) dt \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\|Tx\| &= \int_0^1 |y(t)|dt = \int_0^1 \left| \int_0^1 k(t,\tau)x(\tau)d\tau \right| dt \\
&\leq \int_0^1 \left(\int_0^1 |k(t,\tau)||x(\tau)|d\tau \right) dt \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^1 |k(t,\tau)|dt \right) |x(\tau)|d\tau
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\|Tx\| &= \int_0^1 |y(t)|dt = \int_0^1 \left| \int_0^1 k(t,\tau)x(\tau)d\tau \right| dt \\
&\leq \int_0^1 \left(\int_0^1 |k(t,\tau)||x(\tau)|d\tau \right) dt \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^1 |k(t,\tau)|dt \right) |x(\tau)|d\tau \\
&\leq \max_{\tau\in[0,1]} \left(\int_0^1 |k(t,\tau)|dt \right) \|x\| = K\|x\| \ \Rightarrow \|T\| \leq K
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\|Tx\| &= \int_0^1 |y(t)|dt = \int_0^1 \left| \int_0^1 k(t,\tau)x(\tau)d\tau \right| dt \\
&\le \int_0^1 \left(\int_0^1 |k(t,\tau)||x(\tau)|d\tau \right) dt \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^1 |k(t,\tau)|dt \right) |x(\tau)|d\tau \\
&\le \max_{\tau\in[0,1]} \left(\int_0^1 |k(t,\tau)|dt \right) \|x\| = K\|x\| \ \Rightarrow \|T\| \le K
\end{aligned}
$$

Sea $\tau_0 \in [0,1]$ el valor donde se alcanza el máximo $K = \displaystyle\int_0^1 |k(t,\tau_0)|dt$.

$$\begin{aligned}
\|Tx\| &= \int_0^1 |y(t)|dt = \int_0^1 \left|\int_0^1 k(t,\tau)x(\tau)d\tau\right| dt \\
&\leq \int_0^1 \left(\int_0^1 |k(t,\tau)||x(\tau)|d\tau\right) dt \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^1 |k(t,\tau)|dt\right) |x(\tau)|d\tau \\
&\leq \max_{\tau\in[0,1]} \left(\int_0^1 |k(t,\tau)|dt\right) \|x\| = K\|x\| \ \Rightarrow \|T\| \leq K
\end{aligned}$$

Sea $\tau_0 \in [0,1]$ el valor donde se alcanza el máximo $K = \displaystyle\int_0^1 |k(t,\tau_0)|dt$.

$k(t,\tau)$ es continua en un compacto, $\Rightarrow$ es uniformemente continua.

Entonces $\forall\epsilon > 0\ \exists\delta > 0$ tal que si

$$|t-t'| < \delta, \quad |\tau-\tau'| < \delta \quad \Rightarrow \quad |k(t,\tau) - k(t',\tau')| < \epsilon$$

Sea $I \subset [0,1] = [\tau_1, \tau_2]$, t.q. $t_1 \leq t_0 \leq t_2$, $\tau_2 - \tau_1 < \delta$ y sea la función

$$\tilde{x}(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{t_2 - t_1}, & t \in [\tau_1, \tau_2], \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases} \qquad \text{además } \|\tilde{x}\| = 1.$$

Sea $I \subset [0,1] = [\tau_1, \tau_2]$, t.q. $t_1 \le t_0 \le t_2$, $\tau_2 - \tau_1 < \delta$ y sea la función

$$\tilde{x}(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{t_2 - t_1}, & t \in [\tau_1, \tau_2], \\ 0, & \text{en otro caso}, \end{cases} \qquad \text{además } \|\tilde{x}\| = 1.$$

$$\begin{aligned} \|T\| &= \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| \ge \|T\tilde{x}\| = \int_0^1 \left| \int_0^1 k(t,\tau)\tilde{x}(\tau)d\tau \right| dt \\ &= \frac{1}{t_2 - t_1} \int_0^1 \left| \int_{t_1}^{t_2} k(t,\tau)d\tau \right| dt \end{aligned}$$

Sea $I \subset [0,1] = [\tau_1, \tau_2]$, t.q. $t_1 \le t_0 \le t_2$, $\tau_2 - \tau_1 < \delta$ y sea la función

$$\tilde{x}(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{t_2 - t_1}, & t \in [\tau_1, \tau_2], \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases} \qquad \text{además } \|\tilde{x}\| = 1.$$

$$\begin{aligned} \|T\| &= \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| \ge \|T\tilde{x}\| = \int_0^1 \left| \int_0^1 k(t,\tau)\tilde{x}(\tau)d\tau \right| dt \\ &= \frac{1}{t_2 - t_1} \int_0^1 \left| \int_{t_1}^{t_2} k(t,\tau)d\tau \right| dt \end{aligned}$$

$$k(t,\tau_0) = k(t,\tau) + k(t,\tau_0) - k(t,\tau) \quad \Rightarrow$$

$$\left| \int_{t_1}^{t_2} k(t,\tau)d\tau \right| \ge \left| \int_{t_1}^{t_2} k(t,\tau_0)d\tau \right| - \epsilon = (t_2 - t_1)|k(t,\tau_0)| - \epsilon,$$